PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U STROJARSTVU

Rendulić, Nikolina

Veleučilište u Karlovcu

Strojarski odjel

Stručni studij strojarstva

Nikolina Rendulić

PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U STROJARSTVU

ZAVRŠNI RAD

Karlovac, 2020.

Karlovac University of Applied Sciences

Mechanical engineering Department

Proffesional undergraduate study of Mechanical engineering

Nikolina Rendulić

Application of linear programming in mechanical engineering

Final paper

Karlovac, 2020.

Veleučilište u Karlovcu

Strojarski odjel

Stručni studij strojarstva

Nikolina Rendulić

PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U STROJARSTVU

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Marin Maras, dipl.ing.math

Karlovac, 2020.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
Trg J.J.Strossmayera 9

HR-47000, Karlovac, Croatia
Tel. +385 - (0)47 - 843 - 510
Fax. +385 - (0)47 - 843 – 579
KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

HRN EN ISO 9001:2009

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

Stručni / specijalistički studij: Stručni studij strojarstva

Usmjerenje: Strojarske konstrukcije Karlovac, 2020.

ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

Student: Nikolina Rendulić Matični broj: 0110616028

Naslov: Primjena linearnog programiranja u strojarstvu

Opis zadatka: U radu se koristeći MS-Excel analizira primjena linearnog programiranja u strojarstvu. Obrađeni primjeri su: optimalni proizvodni program, modeliranje smjese, poslovno udruživanje, transportni problem i problem raspoređivanja.

Zadatak zadan:	Rok predaje rada:	Predviđeni datum obrane:
10/2019	6/2020	9/2020

Mentor:
Marin Maras, predavač

Predsjednik Ispitnog povjerenstva:
mr.sc. Marina Tevčić, viši predavač

PREDGOVOR

Izjavljujem da sam završni rad napisala samostalno, koristeći se znanjem stečenim tijekom obrazovanja na Veleučilištu u Karlovcu, određenom literaturom te uz stručnu pomoć i vođenje mentora Marina Marasa, dipl.ing.math, kojemu iskreno zahvaljujem na pruženoj pomoći.

SAŽETAK

Završni rad prikazuje primjene linearnog programiranja u strojarstvu. Obrađeni su problemi optimalnog proizvodnog programa, modeliranje smjese, problemi poslovnog udruživanja, transportni problem te problem raspoređivanja. Osim teorijskog objašnjenja navedenih problema, definirani su i matematički modeli čije je rješavanje obavljeno pomoću alata Rješavač u MS Excel-u. Ovisno o vrsti problema, ciljevi rješavanja su različiti: maksimalna dobit, minimalni trošak, maksimalno iskorištenje resursa te minimalno vrijeme proizvodnje.

KLJUČNE RIJEČI

Linearno programiranje, optimalni proizvodni program, modeliranje smjese, poslovno udruživanje, transportni problem, problem raspoređivanja, MS Excel

SUMMARY

The final paper presents applications of linear programming in mechanical engineering. Addressed are the problems of optimal production program, mixture modeling, business association problem, transportation problem and scheduling problem. In addition to the theoretical explanation of the above problems, mathematical models were also defined whose solution was performed using the Solver tool in MS Excel. Depending on the type of problem, the solution goals are different: maximum profit, minimum cost, maximum utilization of resources and minimum production time.

KEY WORDS

Linear programming, optimal production program, model of mixtures, business association, transportation problem, scheduling problem, MS Excel

SADRŽAJ

1. UVOD

Tema ovog završnog rada je prikaz problema linearnog programiranja u strojarstvu. Linearno programiranje promatra probleme u kojima se linearna funkcija cilja mora optimizirati (maksimizirati ili minimizirati) uz ograničenja dana u obliku nejednadžbi. Proizvodnja se najčešće optimizira radi postizanja maksimalne dobiti, ali funkcije cilja mogu biti i minimalni troškovi izrade, maksimalno iskorištenje resursa, minimalni troškovi transporta, maksimalna proizvodnja i sl. Svrha poslovnog udruživanja je postizanje bolje produktivnosti, odnosno veće dobiti. Poduzeća koja su se udružila imat će zajednički kapacitet s kojim moraju raspolagati, a najčešće će to biti zajednički materijal. Modeliranje smjese se najčešće javlja u metalurgiji pri proizvodnji legura te je potrebno na osnovi raspoloživih sirovina i minimalnih ili maksimalnih zahtjeva sadržaja komponenti u smjesi odrediti optimalni udio sirovina uz ostvarenje minimalnih ukupnih troškova. Kod transportnog problema potrebno je transportirati materijal, proizvode, sklopove i sl. do odredišta uz minimalne transportne troškove. Problem raspoređivanja je specijalni slučaj transportnog problema te su njegova rješenja uvijek 0 ili 1, točnije binarna.

2. LINEARNO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje je grana matematike koja se bavi problemom optimizacije sustava unutar zadanih ograničenja [1]. Njome se pokušava postići najbolji ishod (npr. maksimalni profit ili minimalni trošak) u nekom matematičkom modelu čiji su uvjeti iskazani linearno.

Vidimo da je uz definiranje pojma linearnog programiranja i njegovih ciljeva, potrebno razumjeti i pojam optimizacije: "Optimiranje (prema lat. optimus: najbolji), matematički je postupak kojim se pri projektiranju ili vođenju promatranog sustava ostvaruje (određuje) najbolji mogući izbor ekonomskih i (ili) tehničkih veličina na temelju odabranih kriterija." [2]

Optimizacijske tehnike ili modeli, u općem smislu, označavaju procese pronalaska maksimalne ili minimalne vrijednosti funkcije promatranog procesa. Taj proces definiran je i ograničen ulaznim varijablama koje utječu na problem koji se rješava, te se raznim metodama pokušava pronaći najbolji slučaj kako bi se postigla željena vrijednost funkcije cilja, ovisno o kriteriju koji ju određuje. U praksi, najčešći ciljevi optimizacije usmjereni su postizanju maksimalne dobiti ili minimalne potrošnje, a konkretno strojarski inženjeri će linearno programiranje najčešće koristiti za:

- određivanje količina proizvoda (koje je moguće izraditi s raspoloživim resursima i prodati po aktualnim cijenama) s kojima se postiže maksimalna dobit,
- određivanje plana proizvodnje (koja se može ostvariti s raspoloživim resursima uz aktualne troškove) s kojima se postižu minimalni troškovi,
- određivanje količine sirovine (određenih svojstava) čijim se miješanjem formiraju proizvodi (različitih sastava i cijena) uz maksimalnu dobit,
- određivanje količina sirovina (različitih sastava i cijena) čijim se miješanjem formira proizvod (određenih svojstava) uz minimalne troškove. [3]

Tehniku linearnog programiranja je prvi razvio Leonid Kantorovich 1939. godine kako bi za vrijeme II. svjetskog rata planirao troškove i zaradu i tako smanjio troškove vojske i povećao gubitke neprijatelja. Ta tehnika nije bila dostupna široj javnosti i zbog toga nije bila korištena u rješavanju svakodnevnih problema sve do 1947. godine kada je George B. Dantzig objavio simpleks metodu, a John von Neumann razvio teoriju dualnosti kao rješenje problema linearnog programiranja i primijenio je u području teorije igara. Nakon rata, mnoge su industrije pronašle korist linearne optimizacije (u koju se ubrajaju i tehnike rješavanja problema pomoću linearnog programiranja) u svakodnevnim planiranjima troškova i zarade [4].

2.1. Matematički model linearnog programiranja

Da bi se problem mogao riješiti metodom linearnog programiranja, potrebno je promatrani proces napisati u matematičkom obliku, odnosno pretvoriti stvarne informacije (tehničke, ekonomske) u matematičke ovisnosti pomoću simbola i varijabli, a time i ustanoviti matematički model procesa.

Matematički model sastoji se od funkcije cilja, ograničenja i uvjeta nenegativnosti. [3]

Funkcija cilja ima oblik:

$$F = opt \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j = opt(\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{X}) \rightarrow \boldsymbol{MAX}(\boldsymbol{MIN}) \tag{2.1-1}$$

gdje je: c_j – j-ti koeficijent funkcije cilja (jedinični trošak ili jedinična cijena)

C - $[c_1, c_2 ... c_n]$ jednodimenzionalni vektor koeficijenata funkcije cilja

x_j – promjenjiva veličina (količina)

X - $[x_1, x_2 ... x_n]$ jednodimenzionalni vektor promjenjivih veličina

n – broj promjenjivih veličina

opt - znači da treba odrediti skup vrijednosti promjenjivih veličina kojima se postiže maksimalna ili minimalna vrijednost funkcije cilja F uz zadana ograničenja

Ograničenja imaju oblik:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \cdot x_j\right) \leq (ili\ \geq) b_i \leftrightarrow A \cdot X \leq (ili\ \geq) B \qquad (2.1\text{-}2)$$

gdje je: a_{ij} - ij-ti koeficijent skupa ograničenja (A matrica tipa ***m×n***)
b_i – i-ti slobodni član ograničenja (***m*** komponenti)

Primjeri ograničenja su broj radnika, količina materijala na skladištu, raspoloživost strojeva, tržišna potražnja i drugi. Jednadžbe ograničenja također imaju linearnu karakteristiku.

Uvjet nenegativnosti :

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \qquad (2.1\text{-}3)$$

znači da sve varijable moraju biti veće ili jednake nuli.

Osim uvjeta nenegativnosti, postoji i uvjet realne vrijednosti koeficijenata i slobodnih članova:

$$c_j, a_{ij} \in R$$

gdje je: R – skup realnih brojeva

Formalnim se postupkom linearnog programiranja traži aktualni optimum (maksimum, opt=max ili minimum, opt=min) za zadanu linearnu funkciju cilja (2.1-1) s *n* promjenjivih veličina, uz zadovoljavanje *m* linearnih ograničenja vrijednosti promjenjivih veličina (2.1-2). Moguće je $n>m$, $n=m$ ili $n<m$, a postupak linearnog programiranja moguće je provesti na više načina. U nastavku je dan jedan jednostavan primjer kako se određuje matematički model linearnog programiranja.

Primjer: [3]

Tvrtka može proizvoditi dva proizvoda (P_1 i P_2) u četiri pogona (I, II, III i IV) koji su specijalizirani za proizvodnju – pogoni I i II za proizvode tipa P_1, pogoni III i IV za proizvode tipa P_2. Za proizvodnju je potrebna radna snaga i dvije vrste sirovina (S_1 i S_2). Proizvodno-ekonomski pokazatelji su dati u tablici. Potrebno je odrediti optimalni mjesečni plan proizvodnje.

Tablica 1. Proizvodno ekonomski pokazatelji za izradu proizvoda

	Proizvod P_1		Proizvod P_2		Mjesečni raspoloživi resursi
	Pogon I	Pogon II	Pogon III	Pogon IV	
Radna snaga, h/t_p	5	3	5	7	520 [h]
Sirovina S_1, t_{S1}/t_p	5	7	9	15	650 [t_{S1}]
Sirovina S_2, t_{S2}/t_p	9	7	5	3	620 [t_{S2}]
Jedinična dobit, kn/t_p	900	700	900	1500	

U tablici su s t_{s1}/t_p i t_{s2}/t_p izražene mase sirovina u tonama za tonu proizvoda, oznaka h/t_p prikazuje koliko je utrošeno sati po toni proizvoda dok je kn/t_p oznaka za dobit po toni u kunama.

<u>Funkcija cilja:</u>

$$F = \max_{x}(900x_1 + 700x_2 + 900x_3 + 1500x_4)$$

gdje x_1, x_2, x_3 x_4 označavaju nepoznatu količinu proizvoda u tonama po pogonima

Ograničenja:

Kako za jedinicu proizvoda P1 pogona I treba utrošiti 5 sati rada, to znači da za x_1 jedinica proizvoda treba utrošiti $5x_1$ sati rada. Isto vrijedi i za pogone II, III i IV te dobivamo ograničenje:

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 520$$

Na isti način dobivamo i ograničenja vezana za sirovine S1 i S2:

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 15x_4 \leq 650$$

$$9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 620$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Na kraju dobivamo rješenja:

$x_1 = 61$ $\qquad F = 89500\ kn$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_4 = 23$

što znači da je optimalni mjesečni plan proizvodnje 89 500 kn.

2.2. Vrste problema i primjena linearnog programiranja u strojarstvu

Kao što je i navedeno, razlozi optimiranja procesa mogu biti raznovrsni, ali većina analiza se provodi s ciljem smanjenja troškova, odnosno maksimiziranja dobiti. Optimizacijske se metode, unutar strojarskog područja djelovanja, primjenjuju prilikom rješavanja pet osnovnih problema: optimalni proizvodni program, modeliranje smjese, poslovno udruživanje, transportni problem i problem raspoređivanja.

2.2.1. Optimalni proizvodni program

Optimalni proizvodni program podrazumijeva učinkovito korištenje resursa proizvodnje, najčešće s ciljem postizanja maksimalne dobiti ili najmanjih gubitaka. Funkcija cilja se definira tako da se postižu maksimalni uvjeti proizvodnosti, uz najmanje cjenovne gubitke. Funkcije cilja su najčešće: maksimalna iskoristivost kapaciteta strojeva, maksimalna produktivnost, minimalna cijena izrade, maksimalna dobit itd.
Prilikom optimiranja ograničenja predstavljaju ljudske resurse, tržište, raspoloživost strojeva i dr.

2.2.2. Modeliranje smjese

Ovakve vrste problema najčešće se pojavljuju u metalurgiji, prilikom proizvodnje legura s određenim udjelom legiranih elemenata. Da bi se dobio određeni sastav legure, određuju se količine sirovina, s unaprijed poznatim sastavima, koje su potrebne da bi se osigurala potrebna kvaliteta. Modeliranje smjesa javljala se i u drugim industrijama, primjerice farmaceutskoj pri određivanju proizvodnje lijekova, zatim prehrambenoj industriji, građevinskoj itd.

2.2.3. Problemi poslovnog udruživanja

Radi povećanja konkurentnosti, dva ili više poduzeća mogu se odlučiti djelomično dijeliti resurse. To često uključuje međusobno korištenje strojnih kapaciteta ili materijala. Tako se često matematičkim modelom određuje npr. broj proizvedenih dijelova u određenom poduzeću, pri čemu funkcija cilja može biti maksimalna dobit, maksimalno iskorištenje materijala ili kapaciteta i slično.

2.2.4. Transportni problemi

Transport materijala ili proizvoda, od poznatih točaka i cijene transporta moguće je optimizirati metodama linearnog programiranja. Pri tome kriteriji, osim minimalnih troškova, mogu biti i minimalni prijeđeni put, minimalno vrijeme prijevoza itd.

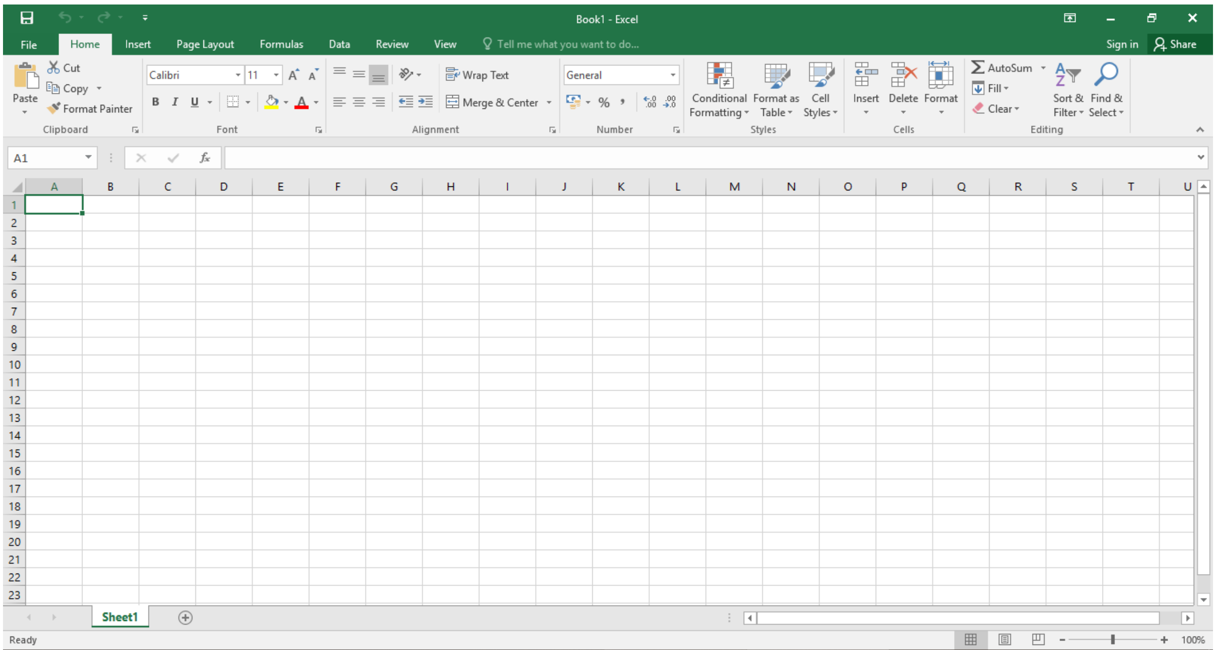
2.2.5. Problem raspoređivanja

Ovaj problem odnosi se prvenstveno na raspodjelu radnika, što se čini ovisno o njegovoj učinkovitosti, kvaliteti rada (proizvoda), dostupnosti, količini proizvedenog škarta itd. Problem se razlikuje od prethodno navedenih po tome što su rješenja binarnog tipa, odnosno kao rješenje se mogu pojaviti samo brojevi 0 i 1.

3. ALAT ZA RJEŠAVANJE U MS EXCEL-u

Microsoft Excel je program integriran u sustav Microsoft Office te je jedan od najpopularnijih programa za tablično računanje. Na tržište je prvi put plasiran 1982.g. pod nazivom Multiplan, a 1985.g. dobiva naziv Excel. [5] MS Excel služi za organiziranje, računanje i analiziranje podataka. Također može poslužiti i za izradu jednostavnijih baza podataka.

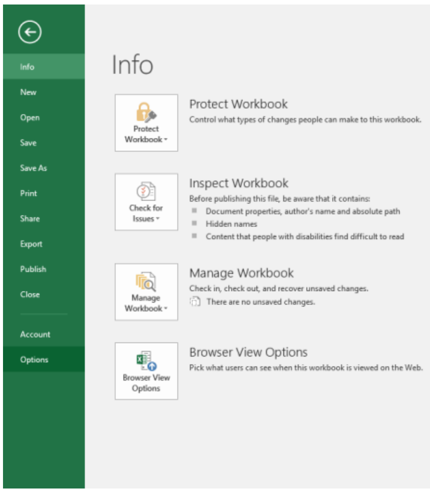
Radna knjiga (*Book*) je osnovna datoteka MS Excela, a sastoji se od radnih listova (*Sheet*), a svaki radni list se sastoji od ćelija (*Cells*). Jedna ćelija se nalazi na presjeku stupca označenog slovom i retka označenog brojem te se tako i adresira. Ćelija predstavlja osnovu za upis podataka i formula, koji se mogu uređivati na traci formule. Traka formula, radna knjiga, radni listovi i ćelije su upravo karakteristike po kojima je MS Excel prepoznatljiv.



Slika 1. Sučelje Microsoft Excela

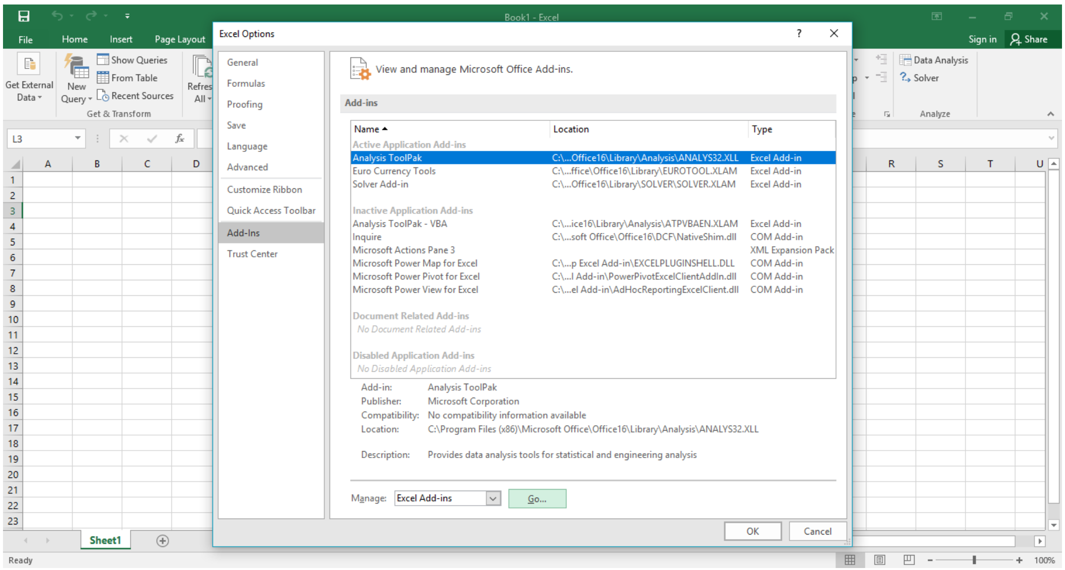
Uz primarne funkcije MS Excel ima i alate za rješavanje problema. Jedan od tih alata kao dodatak Excelu je i Alat za rješavanje *(Solver)* kao alat za optimizaciju te alat Analiza podataka *(Data Analysis)* za statističku obradu podataka.

Da bi se prethodno navedena dva alata mogla koristiti, potrebno ih je prvo instalirati i aktivirati. Taj postupak se provodi tako da se u izborniku Datoteka (*File*), izabere Mogućnosti (*Options*) (Slika 2. *Aktiviranje alata Solver; odabir Options na dnu izbornika File*).



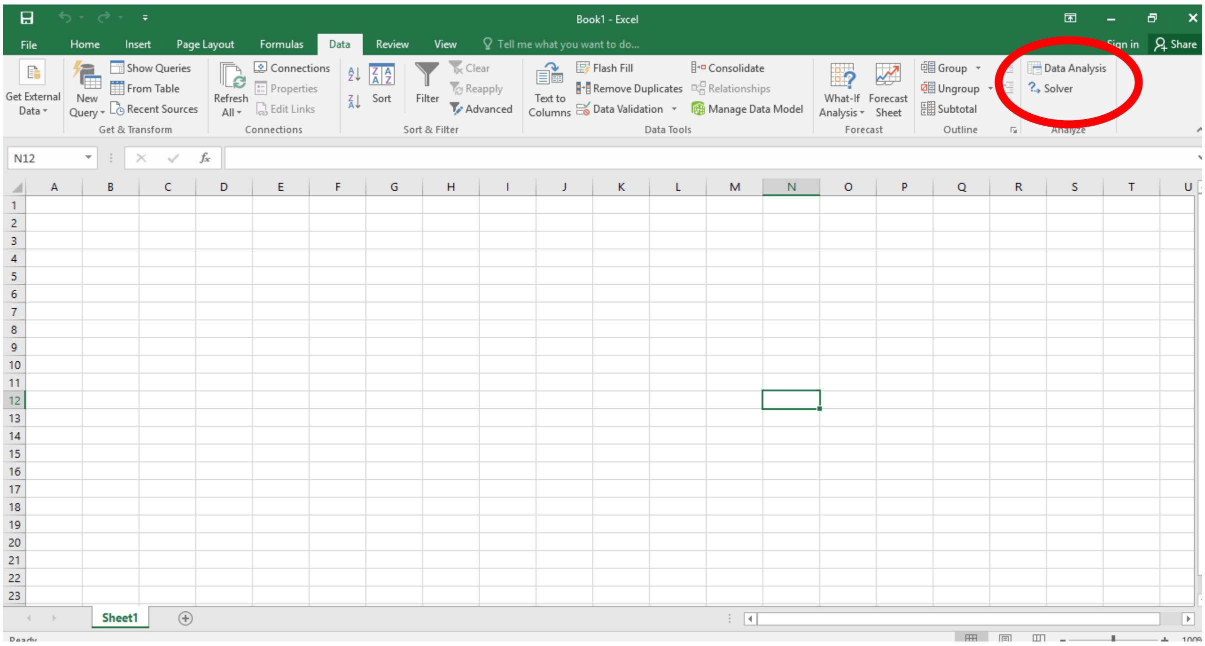
Slika 2. Aktiviranje alata Solver; odabir Options na dnu izbornika File

U kartici Mogućnosti (*Options*) potrebno je s lijeve strane odabrati kategoriju Dodaci (*Add-Ins*). Pri dnu kartice Mogućnosti obavezno je u okviru Upravljanje (*Manage*) označiti stavku Dodaci programa Excel (*Excel Add-ins*), a zatim izabrati naredbu Idi (*Go*). (Slika 3. *Dijaloški okvir Excel Options s okvirom Add-Ins*) [6]



Slika 3. Dijaloški okvir Excel Options s okvirom Add-Ins

Nakon instaliranja i aktiviranja programskih dodataka, u izborniku Podaci (*Data*), dostupni su alati Alat za rješavanje (*Solver)* i Analiza podataka (*Data Analysis*) što je prikazano na Slika 4. *Alat za rješavanje i Analiza podataka*



Slika 4. Alat za rješavanje i Analiza podataka

Postupak rješavanja problema pomoću alata Rješavač bit će objašnjen na primjerima u nastavku rada.

4. PROBLEM OPTIMALNOG PROIZVODNOG PROGRAMA

Potrebno je odrediti optimalnu proizvodnju strojnih dijelova za vagone uz ostvarenje maksimalne dobiti. Tržište dnevno može primiti maksimalno 30 komada proizvoda P1, 35 komada proizvoda P2, 40 komada proizvoda P3. Prodajna cijena proizvoda P1 je 60 novčanih jedinica po komadu (n.j./kom), za proizvod P2 45 n.j./kom, a za proizvod P3 55 n.j./kom. Prodajna cijena je izračunata na temelju troškova materijala i troškova kapaciteta. Svi proizvodi se izrađuju iz lima 6000x2000x30 mm čiji je oblik potrebno izrezati na plinskoj rezačici. Glodalica je na raspolaganju 12,5 sati, tokarilica 11,5 sati, a plinska rezačica 7,5 sati. U proizvodnom procesu svaki proizvod koristi sva tri stroja. U Tablica 2. *Tehnološki i ekonomski podaci za izradu proizvoda* prikazana je produktivnost, troškovi materijala po proizvodu i troškovi kapaciteta strojeva po vremenskoj jedinici. [7]

Tablica 2. Tehnološki i ekonomski podaci za izradu proizvoda

Vrsta proizvoda	Vrsta stroja	Produktivnost (kom/sat)	Troškovi materijala (n.j./kom)	Troškovi kapaciteta (n.j./sat)
P1	Glodalica	8	9	110
	Tokarilica	12		120
	Plinska rezačica	15		80
P2	Glodalica	10	6	110
	Tokarilica	7		120
	Plinska rezačica	13		80
P3	Glodalica	8	8	110
	Tokarilica	11		120
	Plinska rezačica	15		80

4.1. Matematički model

Na osnovi definiranog problema optimalnog proizvodnog programa, bit će prikazan matematički model.

Funkcija cilja:

Dobit za svaki pojedini proizvod dobije se kao razlika prodajne cijene i troškova (materijalnih i troškova kapaciteta) te se nakon toga dobit proizvoda iste vrste množi s njihovom količinom (P1, P2, P3). Svaki proizvod koristi sva tri stroja u proizvodnom procesu.

$$FC = \left(60 - \frac{1}{8} \cdot 110 - \frac{1}{12} \cdot 120 - \frac{1}{15} \cdot 80 - 9\right) \cdot P1 + \left(45 - \frac{1}{10} \cdot 110 - \frac{1}{7} \cdot 120 - \frac{1}{13} \cdot 80 - 6\right) \cdot P2 + (55 - \frac{1}{8} \cdot 110 - \frac{1}{11} \cdot 120 - \frac{1}{15} \cdot 80 - 8) \cdot P3 \rightarrow \max[n.j.]$$

Ograničenja:

Glodalica: $\frac{1}{8} \cdot P1 + \frac{1}{10} \cdot P2 + \frac{1}{8} \cdot P3 \leq 12{,}5\ [sat]$

Tokarilica: $\frac{1}{12} \cdot P1 + \frac{1}{7} \cdot P2 + \frac{1}{11} \cdot P3 \leq 11{,}5\ [sat]$

Plinska rezačica: $\frac{1}{15} \cdot P1 + \frac{1}{13} \cdot P2 + \frac{1}{15} \cdot P3 \leq 7{,}5\ [sat]$

Tržište:

$P1 \leq 30[kom]$

$P2 \leq 35[kom]$

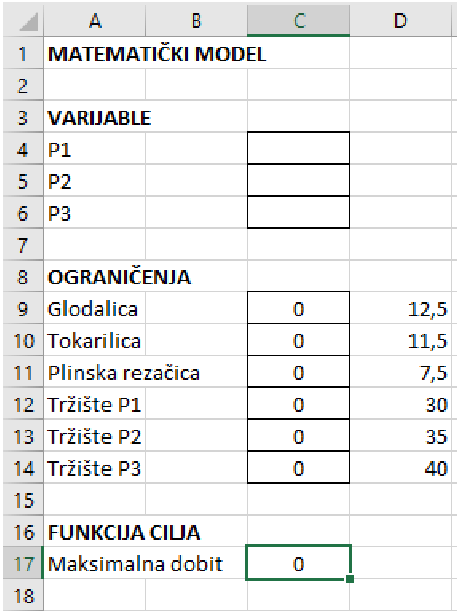
$P3 \leq 40[kom]$

Uvjeti nenegativnosti: P1, P2, P3 ≥ 0

4.2. Optimalno rješenje

Kao što je već navedeno, rješavanje ovog definiranog problema bit će obavljeno u programu MS Excel pomoću alata Rješavač (*Solver*) koji služi kao alat za optimizaciju.

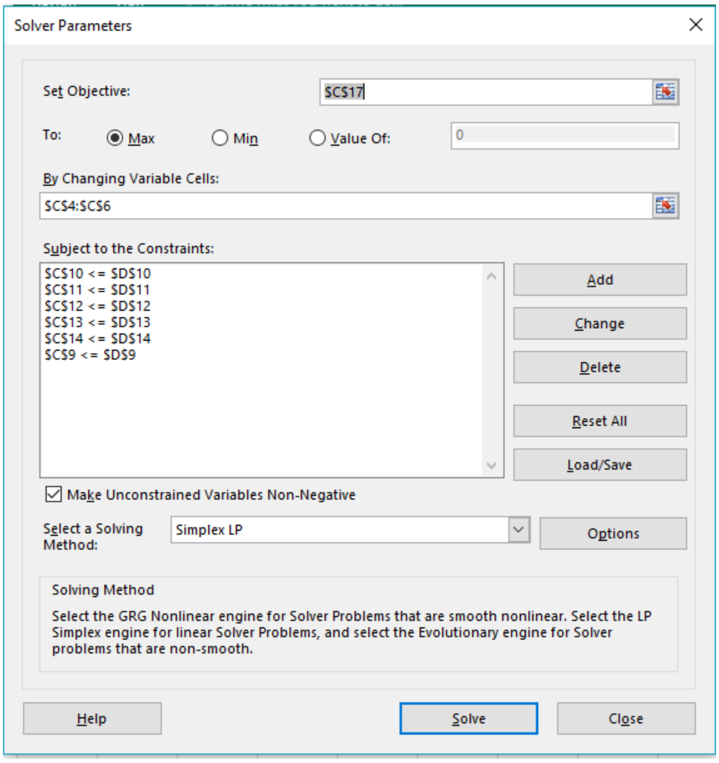
Prvi korak u rješavanju definiranog problema je pripremanje matematičkog modela na radnom listu. Potrebno je definirati ćelije s varijablama koje su u ovom slučaju P1, P2 i P3, zatim definirati ćelije s ograničenjima, a to su glodalica, tokarilica, plinska rezačica i tržište. Mora se definirati i zadnja ćelija s formulom funkcije cilja (Slika 5. *Pripremanje matematičkog modela*). U ćelijama gdje su dobivene vrijednosti 0, korištene su formule prikazane u matematičkom modelu.



	A	B	C	D
1	**MATEMATIČKI MODEL**			
2				
3	**VARIJABLE**			
4	P1			
5	P2			
6	P3			
7				
8	**OGRANIČENJA**			
9	Glodalica		0	12,5
10	Tokarilica		0	11,5
11	Plinska rezačica		0	7,5
12	Tržište P1		0	30
13	Tržište P2		0	35
14	Tržište P3		0	40
15				
16	**FUNKCIJA CILJA**			
17	Maksimalna dobit		0	
18				

Slika 5. Pripremanje matematičkog modela

Drugi korak je pokretanje alata Rješavač i popunjavanje potrebnih parametara. (Slika 6. *Popunjavanje parametara*)



Slika 6. Popunjavanje parametara

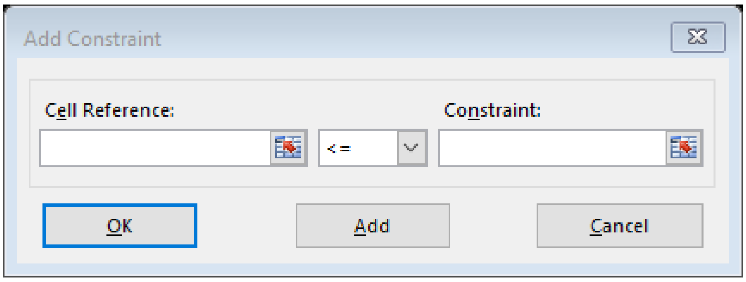
U Parametri Rješavača (*Solver Parameters*) potrebno je aktivirati Pretvori varijable bez ograničenja u pozitivne (*Make Unconstrained Variables Non-Negative*) jer predstavljaju uvjet nenegativnosti i metodu rješavanja postaviti na Jednostavni LP (*Simplex LP*). [6]

U polje Postavljanje cilja (*Set Objective*) upisuje se adresa ćelije u kojoj je dana funkcija cilja. Adrese se, gdje je to potrebno, mogu unositi i klikom miša u odgovarajuću ćeliju, samo što će se u tom slučaju, u polju koje traži adresu, ona pojaviti kao apsolutna adresa (npr. u ovom slučaju $C$14).

U retku *To* potrebno je označiti maksimum (*Max*) jer je cilj definiranog problema maksimalna dobit. Osim te, ponuđene su i opcije *Min* koja se odabire ako se funkcija želi minimizirati te *Value of* ako se želi vidjeti za koje će vrijednosti varijabla odlučivanja funkcije cilja poprimiti željenu vrijednost.

U polje *By Changing Variable Cells* upisuje se raspon ćelija koje predstavljaju vrijednosti varijabli odlučivanja.

Ograničenja se upisuju u polje *Subject to the Constraints* i to klikom na gumb *Add* dijaloškog okvira *Solver Parameters* čime se pokreće dijaloški okvir *Add Constraint* (Slika 7. *Dodavanje ograničenja*)

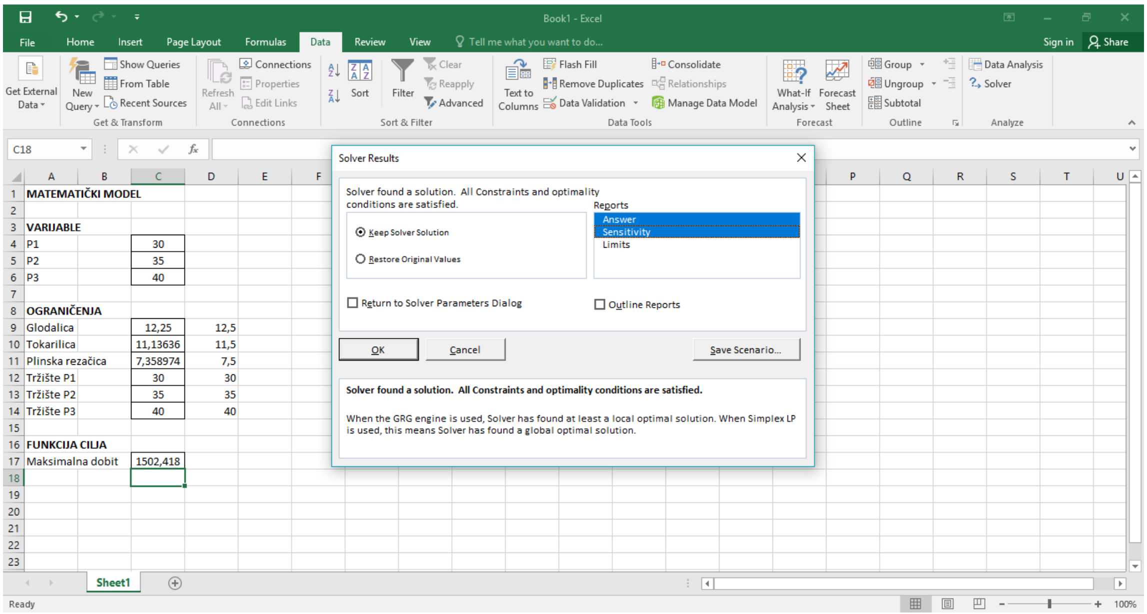


Slika 7. Dodavanje ograničenja

U polje *Cell Reference* upisuje se adresa koja se odnosi na lijevu stranu danog ograničenja (u ovom slučaju neka od ćelija stupca C, počevši od C9), dok se u polje *Constraint* upisuje slobodni koeficijent desne strane danog ograničenja (to je neka od ćelija stupca D ovog primjera, počevši od ćelije D9). Svako novo ograničenje može se unijeti klikom na gumb *Add*, a nakon unosa svih ograničenja, klik na gumb *OK* vraća korisnika na dijaloški okvir *Solver Parameters*.

Unošenjem svih potrebnih parametara u dijaloškom okviru *Solver Parameters* klikom na gumb *Solve* pokreće se izračun postavljenog zadatka.

Nakon pronalaženja rješenja moguć je prikaz tri vrste izvještaja: izvještaj odgovora, izvještaj o osjetljivosti i izvještaj o granicama varijabli. U Izvještaju odgovora (*Answer Report*) nalazi se optimalno rješenje i dopunske varijable, a u Izvještaju osjetljivosti (*Sensitivity Report*) analiza osjetljivosti promjene koeficijenata u funkciji cilja i desne strane ograničenja. Izvještaj o granicama (*Limits Report*) sastoji se od izvještaja o utjecaju vrijednosti varijabli na vrijednost funkcije cilja. [6] U ovom problemu optimalnog proizvodnog programa prikazat će se Izvještaj odgovora i Izvještaj osjetljivosti. (Slika 8. *Rezultati alata za rješavanje*)



Slika 8. Rezultati alata za rješavanje

Izvještaj odgovora (Slika 9. *Izvještaj odgovora*) sastoji se od tri dijela: Ciljna ćelija (*Objective Cell*) koja pokazuje vrijednost funkcije cilja, Varijabilna ćelija (*Variable Cells*) koja pokazuje vrijednost varijabli i Ograničenja (*Constraints*).

U prvom dijelu, uz naziv *Objective Cell* , u zagradi se nalazi i napomena traži li se u zadanom problemu maksimum funkcije cilja (*Max*), njezin minimum (*Min*) ili pak određena vrijednost te funkcije (*Value of*). U ovom primjeru traži se maksimum. U stupcu *Cell* nalazi se apsolutna adresa ćelije u koju je upisana formula za izračunavanje funkcije cilja, a u ovom slučaju je to ćelija \$C\$17, dok se u stupcu *Name* nalazi tekst koji je upisan u ćeliju lijevo od ciljne ćelije. U stupcu *Original Value* nalazi se početna vrijednost funkcije cilja, dok se u stupcu *Final Value* nalazi njezina konačna, optimalna vrijednost. [6] U ovom je primjeru početni iznos funkcije cilja jednak je nuli, dok konačna vrijednost iznosi 1502,42 novčanih jedinica.

U drugom dijelu *Variable Cells* su podaci o varijablama odlučivanja. [6] U stupcu *Cell* nalaze se apsolutne adrese ćelija u kojima su vrijednosti tih varijabla, u ovom slučaju \$C\$4, \$C\$5 i \$C\$6, a u stupcu *Name* tekst koji je upisan u ćelije lijevo od ćelija u kojima su varijable. Stupac *Original Value* sadrži početne vrijednosti varijabla, dok se u stupcu *Final Value* nalaze one vrijednosti tih varijabla za koje funkcija cilja poprima optimalnu vrijednost. U ovom su primjeru početne vrijednosti varijabla jednake nuli, dok su optimalne vrijednosti P1=30, P2=35 i P3=40, što znači da je proizvedeno 30 proizvoda P1, 35 proizvoda P2 i 40 proizvoda P3 koji zadovoljavaju maksimalni zahtjev tržišta.

Podaci o ograničenjima, *Constraints*, prikazani su u trećem dijelu ovog izvještaja. U stupcu *Cell* nalaze se apsolutne adrese ćelija u kojima su upisane formule za izračun lijevih strana ograničenja, a u stupcu *Name* tekst koji je upisan u ćelije lijevo od njih. U stupcu *Cell Value* su iznosi lijevih strana pojedinih ograničenja izračunati za vrijednost varijabli odlučivanja za koje funkcija cilja postiže optimalnu vrijednost, dok se u stupcu *Formula* nalaze formule koje opisuju pojedina ograničenja. Status pojedinog ograničenja opisuje se u stupcu *Status*: *Binding* (obvezujuće) za ona ograničenja kod kojih su resursi iskorišteni do kraja (lijeva strana ograničenja jednaka je desnoj), odnosno *Not Binding* (neobvezujuće) za ograničenja kod kojih resursi nisu do kraja iskorišteni. Sukladno statusu, u stupcu *Slack* Excel upisuje 0 za sva ograničenja koja su iskorištena do kraja (imaju status *Binding*), odnosno broj koji je različit od nule i koji prikazuje koliko je ostalo na zalihi pojedinog neobvezujućeg ograničenja, koje ima status *Not Binding*. [6] U ovom primjeru vidimo da nijedan stroj nije maksimalno iskorišten, tj. mogu još raditi. Tokarilica ima neiskorišteno 0,36 sati, plinska rezačica 0,14, a glodalica 0,25 sati, odnosno toliko još mogu raditi da bi bile maksimalno iskorištene. U nastavku je dan prikaz izračuna postotka iskoristivosti strojeva.

$\frac{12{,}5-0{,}25}{12{,}5} = 0{,}98 = 98\% \rightarrow$ glodalica je iskorištena 98%

$\frac{11{,}5-0{,}36}{11{,}5} = 0{,}97 = 97\% \rightarrow$ tokarilica je iskorištena 97%

$\frac{7{,}5-0{,}14}{7{,}5} = 0{,}98 = 98\% \rightarrow$ plinska rezačica je iskorištena 98%

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$C$17	Maksimalna dobit	0	1502,418415

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$C$4	P1	0	30	Contin
$C$5	P2	0	35	Contin
$C$6	P3	0	40	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$C$10	Tokarilica	11,13636364	$C$10<=$D$10	Not Binding	0,363636364
$C$11	Plinska rezačica	7,358974359	$C$11<=$D$11	Not Binding	0,141025641
$C$12	Tržište P1	30	$C$12<=$D$12	Binding	0
$C$13	Tržište P2	35	$C$13<=$D$13	Binding	0
$C$14	Tržište P3	40	$C$14<=$D$14	Binding	0
$C$9	Glodalica	12,25	$C$9<=$D$9	Not Binding	0,25

Slika 9. Izvještaj odgovora

Izvještaj o osjetljivosti, prikazan na Slika 10. *Izvještaj o osjetljivosti*, daje informacije o osjetljivosti modela na promjenu ulaznih podataka, a sastoji se od dva dijela. Prvi dio, *Variable Cells*, odnosi se na varijable odlučivanja: u stupcu *Cell* su apsolutne adrese ćelija u kojima su vrijednosti tih varijabla, u stupcu *Name* tekst koji je korisnik upisao u ćelije lijevo od ćelija u kojima su varijable odlučivanja, a u stupcu *Final Value* nalaze se one vrijednosti tih varijabla za koje funkcija cilja poprima optimalnu vrijednost. [6]

U stupcu *Reduced Cost* (Reducirani trošak) bit će vrijednost nula kod svih varijabla odlučivanja kojima je konačna vrijednost (vrijednost za koju funkcija cilja postiže optimum) različita od nule. U ovom je primjeru za sve tri varijable (P1, P2 i P3) reducirani trošak nula što znači da varijable imaju neku završnu vrijednost.

Zadani koeficijenti funkcije cilja (konstante koje u funkciji cilja množe pojedinu varijablu odlučivanja) prikazani su u stupcu *Objective Coefficient*. Za proizvod P1 koeficijent je 21,92, za P2 4,7, a za P3 17. U stupcu *Allowable Increase* nalazi se najveće moguće povećanje tih koeficijenata, a koje neće dovesti do promjene optimalnog rješenja problema. To prikazano povećanje nekog od koeficijenata podrazumijeva da se oni drugi koeficijenti pri tom ne mijenjaju. Suprotno od toga, u stupcu *Allowable Decrease* dano je najveće moguće smanjenje koeficijenata funkcije cilja koje neće dovesti do promjene optimalnog rješenja, a podrazumijeva i da se pritom drugi koeficijenti ne mijenjaju. [6] U ovom primjeru ako se za proizvod P1 dobit (koeficijent funkcije cilja uz varijablu P1) smanji za maksimalno 21,92 n.j., rješenje se neće promijeniti ako pri tome vrijednosti dobiti P2 i P3 ostanu iste. Također vrijedi i za dopustivo smanjenje za P2 od 4,7 n.j. i za P3 od 17 n.j. ukoliko koeficijenti u funkciji cilja preostalih varijabli ostanu iste vrijednosti. Dopustiva povećanja u sva tri slučaja su beskonačna (1E+30), što znači da bilo koje povećanje koeficijenta funkcije cilja ne utječe na optimalno rješenje ako su ostali koeficijenti fiksni.

U drugom dijelu ovog izvještaja nalaze se podaci o ograničenjima, *Constraints*. U prva dva stupca nalaze se apsolutne adrese ćelija u kojima su upisane formule za izračun lijevih strana ograničenja te njihovi nazivi. U stupcu *Final Value* su iznosi tih lijevih strana ograničenja izračunati za vrijednosti varijabli odlučivanja za koje funkcija cilja postiže optimalnu vrijednost.

Iz vrijednosti Cijena u sjeni (*Shadow Price*) može se vidjeti što će se dogoditi s vrijednosti funkcije cilja ako se desne strane ograničenja promijene za jednu jedinicu(dok se jedno ograničenje mijenja ostala su fiksna). [6] U ovom primjeru ako se kapacitet tržišta P1 poveća (smanji) za jednu jedinicu, vrijednost funkcije cilja će se povećati (smanjiti) za 21,91 n.j. Povećanjem (smanjenjem) kapaciteta tržišta P2 za jedan vrijednost funkcije cilja će se povećati (smanjiti) za 4,7 n.j., a tržišta P3 za 17 n.j. Iznos različit od nule u stupcu *Shadow Price* pojavit će se samo kod onih ograničenja gdje su resursi iskorišteni do kraja, točnije kod obvezujućih ograničenja kada je vrijednost u stupcu *Final Value* jednaka onoj u stupcu *Constraint R. H. Side* u kojemu su prikazane izvorne vrijednosti desnih strana ograničenja.

U stupcima *Allowable Increase* i *Allowable Decrease* dana su najveća moguća povećanja, odnosno smanjenja vrijednosti desne strane pojedinog ograničenja, a koje neće dovesti do promjene osnovnog svojstva Cijena u sjeni. [6] Kapacitet tržišta za proizvod P1 se može povećati za 2 komada i smanjiti za 30 kom (30-30, 30+2), za proizvod P2 se može povećati za 1,8 kom i smanjiti za 35 kom (35-35, 35+1,8), a za proizvod P3 se može povećati za 2 kom i smanjiti za 40 kom (40-40, 40+2). Za navedene intervale kapaciteta tržišta vrijedi da smanjenje (povećanje) za jedan na tim intervalima zadovoljava svojstvo

Cijena u sjeni od malo prije. Kapaciteti tržišta odnose se na obvezujuća ograničenja. U slučaju neobvezujućih ograničenja Cijene u sjeni su 0, tj. povećanje (smanjenje) ograničenja za jedan nema utjecaja na vrijednost funkcije cilja. Dopuštena smanjenja jednaka su iznosu *Slack* varijabli (zaliha) - to je iznos koji nedostaje da ograničenje postane obvezujuće. Ako se kapacitet tokarilice smanji za 0,36 sati, neće doći do promjene baze optimalnog rješenja. Također vrijedi dopustivo smanjenje za glodalicu od 0,25 sati i za plinsku rezačicu od 0,14 sati. Dopuštena povećanja su beskonačna.

Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$C$4	P1	30	0	21,91666667	1E+30	21,91666667
$C$5	P2	35	0	4,703296703	1E+30	4,703296703
$C$6	P3	40	0	17,00757576	1E+30	17,00757576

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$C$10	Tokarilica	11,13636364	0	11,5	1E+30	0,363636364
$C$11	Plinska rezačica	7,358974359	0	7,5	1E+30	0,141025641
$C$12	Tržište P1	30	21,91666667	30	2	30
$C$13	Tržište P2	35	4,703296703	35	1,833333333	35
$C$14	Tržište P3	40	17,00757576	40	2	40
$C$9	Glodalica	12,25	0	12,5	1E+30	0,25

Slika 10. Izvještaj o osjetljivosti

5. MODELIRANJE SMJESA

Poduzeće planira lansirati na tržište novi proizvod, smjesu dobivenu iz triju različitih sirovina. Potrebno je odrediti udio pojedine sirovine u smjesi pri čemu smjesa treba sadržavati minimalno 3% ugljika, minimalno 1,7 % silicija, minimalno 0,2% mangana, maksimalno 0,08% fosfora te maksimalno 0,01% sumpora. Cilj modela smjese je ostvarivanje minimalne cijene smjese, a da se zadovolji navedeni zahtjev sastava smjese. U Tablica 3. *Sadržaj komponenti u sirovinama* prikazan je kemijski sastav sirovina te njihova cijena. [7]

Tablica 3. Sadržaj komponenti u sirovinama

Sadržaj komponente u sirovini, %	Sirovina S1	Sirovina S2	Sirovina S3
C	2,7	4	3,2
Si	2	1,6	2,8
Mn	0,2	0,5	0,35
P	0,03	0,06	0,045
S	0,01	0,005	0,008
Cijena, n.j.	20	35	28

5.1. Matematički model

Funkcija cilja:

$$FC = 20 \cdot S_1 + 35 \cdot S_2 + 28 \cdot S_3 \rightarrow min[n.j.]$$

Ograničenja:

Ugljik (C): $2{,}7 \cdot S_1 + 4 \cdot S_2 + 3{,}2 \cdot S_3 \geq 3$

Silicij (Si): $2 \cdot S_1 + 1{,}6 \cdot S_2 + 2{,}8 \cdot S_3 \geq 1{,}7$

Mangan (Mn): $0{,}2 \cdot S_1 + 0{,}5 \cdot S_2 + 0{,}35 \cdot S_3 \geq 0{,}2$

Fosfor (P): $0{,}03 \cdot S_1 + 0{,}06 \cdot S_2 + 0{,}045 \cdot S_3 \leq 0{,}08$

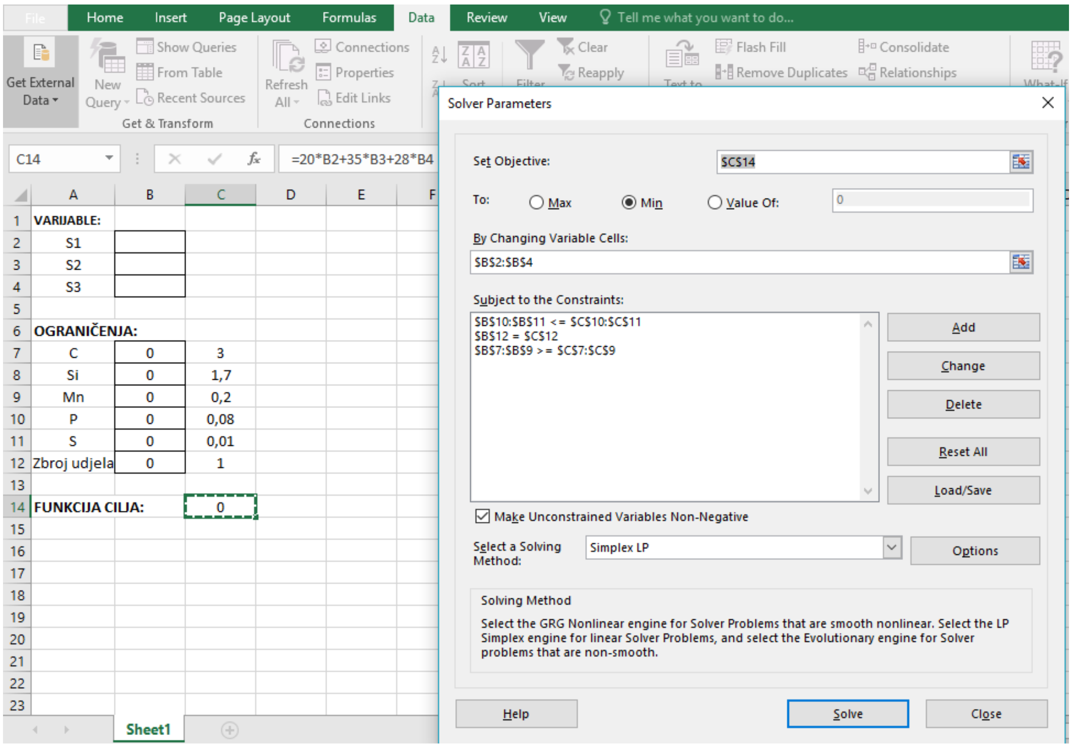
Sumpor (S): $0{,}01 \cdot S_1 + 0{,}005 \cdot S_2 + 0{,}008 \cdot S_3 \leq 0{,}01$

Zbroj udjela sirovina: $S_1 + S_2 + S_3 = 1$

Uvjet nenegativnosti na udio pojedine sirovine u smjesi: $S_1, S_2, S_3 \geq 0$

5.2. Optimalno rješenje

Problem smjese će također biti riješen pomoću alata za rješavanje u MS Excel-u. Na Slika 11. *Priprema modela i popunjavanje parametara alata za rješavanje* prikazan je matematički model na radnom listu te parametri Rješavača.



Slika 11. Priprema modela i popunjavanje parametara alata za rješavanje

Na Slika 12. *Izvještaj o odgovoru* prikazan je Izvještaj o odgovoru dobiven pomoću alata Rješavač. Iz njega je vidljivo da je vrijednost funkcije cilja 23,46 n.j. te ona predstavlja minimalnu cijenu smjese. Varijable predstavljaju udio sirovina stoga se smjesa sastoji od 77% sirovine S1 i 23% sirovine S2. Vrijednost sirovine S3 jednaka je nuli što znači da ona neće biti korištena za izradu smjese. Vidljivo je da je ograničenje ugljika obvezujuće, odnosno dopunska (*Slack*) varijabla iznosi 0 što znači da smjesa sadrži minimalni postotak ugljika od 3%. Dopunska varijabla za silicij je 0,2 što govori da smjesa sadrži 0,2% više silicija od minimalnog zahtjeva, dok mangana sadrži 0,069% više od minimalnog zahtjeva. Dopunska varijabla za fosfor iznosi 0,043, tj. smjesa može sadržavati još 0,043% fosfora, a za sumpor ta vrijednost iznosi 0,0011%.

Objective Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$C$14	FUNKCIJA CILJA:	0	23,46153846

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$2	S1	0	0,769230769	Contin
$B$3	S2	0	0,230769231	Contin
$B$4	S3	0	0	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$B$10	P	0,036923077	$B$10<=$C$10	Not Binding	0,043076923
$B$11	S	0,008846154	$B$11<=$C$11	Not Binding	0,001153846
$B$12	Zbroj udjela	1	$B$12=$C$12	Binding	0
$B$7	C	3	$B$7>=$C$7	Binding	0
$B$8	Si	1,907692308	$B$8>=$C$8	Not Binding	0,207692308
$B$9	Mn	0,269230769	$B$9>=$C$9	Not Binding	0,069230769

Slika 12. Izvještaj o odgovoru

Iz prvog dijela Izvještaja o osjetljivosti (Slika 13. *Izvještaj o osjetljivosti*) vide se vrijednosti dopustivog povećanja i smanjenja cijena sirovina(koeficijenata funkcije cilja) koje ne utječu na optimalno rješenje. Za sirovinu S1 dopustivo povećanje je 3,625 što znači da se optimalno rješenje neće promijeniti ako se cijena od S1 (koeficijent u funkciji cilja uz S1) poveća za taj iznos, a da pri tome vrijednosti ostalih cijena ostanu iste. Dopustivo smanjenje je beskonačno, odnosno cijena bi bila 0 (što nema smisla u ekonomskom pogledu, već samo matematičkom). Cijena sirovine S2 može se mijenjati od 20 (35-15) do 40,8 (35+5,8) n.j., a da se pri tome ne promijeni optimalno rješenje problema, ako je pritom cijena S1 i dalje 20, a S3 28 n.j. Reducirani trošak za S3 u iznosu od 2,23 kaže za koliko treba smanjiti cijenu od S3 kako bi varijabla S3 bila različita od nule.

U drugom dijelu izvještaja nalaze se vrijednosti dopustivog povećanja i smanjenja za desnu stranu obvezujućih (neobvezujućih) ograničenja koja utječu (ne utječu) na bazu optimalnog rješenja. Cijene u sjeni kazuju za koliko se promijeni vrijednost funkcije cilja ako se pojedino ograničenje poveća ili smanji za jedan, a ostala su nepromijenjena. Doprinos Cijena u sjeni ne postoji ako su ograničenja neobvezujuća, a postoji ako su ona obvezujuća. Ako se udio fosfora P smanji za 0,04%, neće doći do promjene baznog rješenja. Isto vrijedi za smanjenje udjela sumpora S od 0,001%. Do promjene baznog rješenja neće doći ni kada se udio silicija Si poveća za 0,21%, a mangana Mn 0,07%.

Dopuštena povećanja sumpora i fosfora su beskonačna, kao i dopuštena smanjenja silicija i mangana. Sva prethodno spomenuta ograničenja su neobvezujuća i Cijene u sjeni su 0. Udio ugljika C može se mijenjati od 2,7% (3-0,3) do 3,675% (3+0,675), a da se pritom vrijednosti ostalih ograničenja ne mijenjaju. Ovo ograničenje je obvezujuće s Cijenama u sjeni različitim od 0, a to znači da će se vrijednost funkcije cilja povećati za 11,53 n.j. u slučaju povećanja desne strane ograničenja za jedan. Ograničenje Zbroj udjela nema smisla razmatrati u prethodnom kontekstu.

6	Variable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$2	S1	0,769230769	0	20	3,625	1E+30
10	$B$3	S2	0,230769231	0	35	5,8	15
11	$B$4	S3	0	2,230769231	28	1E+30	2,230769231
12							
13	Constraints						
14			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
15	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
16	$B$10	P	0,036923077	0	0,08	1E+30	0,043076923
17	$B$11	S	0,008846154	0	0,01	1E+30	0,001153846
18	$B$12	Zbroj udjela	1	-11,15384615	1	0,056603774	0,073369565
19	$B$7	C	3	11,53846154	3	0,675	0,3
20	$B$8	Si	1,907692308	0	1,7	0,207692308	1E+30
21	$B$9	Mn	0,269230769	0	0,2	0,069230769	1E+30

Slika 13. Izvještaj o osjetljivosti

6. PROBLEM POSLOVNOG UDRUŽIVANJA

Dva poduzeća (PO1, PO2) su se udružila u cilju zajedničke proizvodnje tri vrste proizvoda (P1, P2, P3) u cilju ostvarivanja maksimalne dobiti. Za proizvodnju će koristiti dvije vrste materijala te tri vrste strojeva. Određena je ukupna količina pojedinog proizvoda koje tržište može primiti u razdoblju od jedne godine. Tržište godišnje može primiti maksimalno 1500 komada proizvoda P1, maksimalno 2000 kom proizvoda P2 te maksimalno 1700 kom proizvoda P3. Podaci o jediničnoj dobiti pojedinog proizvoda prikazani su u Tablica 4. *Podaci o jediničnoj dobiti*. Dobit za isti proizvod ovisi o poduzeću u kojem se proizvodi jer se razlikuju troškovi proizvodnje, a prodajna cijena je ista.

Tablica 4. Podaci o jediničnoj dobiti

Jedinična dobit, kn/kom	Proizvodi		
	Proizvod 1	Proizvod 2	Proizvod 3
Poduzeće 1	150	200	250
Poduzeće 2	180	190	210

Proizvodnja će se odvijati na tokarilici, glodalici i bušilici. Raspolaganje strojeva jednako je u oba poduzeća te je tako tokarilica na raspolaganju 7,5 sati, a glodalica i bušilica 15 sati. Uzima se 288 radnih dana godišnje. Potrošnja materijala se razlikuje u poduzećima zbog različite iskoristivosti polaznog materijala. Materijali od kojih će se proizvodi izrađivati su konstrukcijski čelik i aluminij. Raspoloživa količina konstrukcijskog čelika je 30 000 kg i od njega se izrađuje proizvod P1, a aluminija 35 000 kg te se od njega izrađuju proizvodi P2 i P3. Podaci o utrošku materijala za pojedini proizvod prikazani su u Tablica 5. *Podaci o utrošku materijala*. [8]

Tablica 5. Podaci o utrošku materijala

Utrošak materijala, kg/kom	Proizvod 1	Proizvod 2	Proizvod 3
Poduzeće 1	8	9	8,2
Poduzeće 2	7,5	9,5	10

Vrijeme obrade proizvoda na strojevima u oba poduzeća prikazano je u *Tablica 6. Vrijeme obrade proizvoda*.

Tablica 6. Vrijeme obrade proizvoda

Poduzeće	Vrijeme obrade, min/kom	Proizvod 1	Proizvod 2	Proizvod 3
Poduzeće 1	Tokarilica	25	15	18
	Glodalica	30	20	22
	Bušilica	20	10	12
Poduzeće 2	Tokarilica	27	20	21
	Glodalica	25	17	28
	Bušilica	15	13	16

Cilj udruživanja je ostvarenje maksimalne dobiti.

6.1. Matematički model

Funkcija cilja:

Maksimizacija dobiti u kunama:

$FC = 150P1PO1 + 200P2PO1 + 250P3PO1 + 180P1PO2 + 190P2PO2 + 210P3PO2$

Ograničenja:

Materijal:

Konstrukcijski čelik: $8P1PO1 + 7{,}5P1PO2 \leq 30000\ kg$

Aluminij: $9P2PO1 + 8{,}2P3PO1 + 9{,}5P2PO2 + 10P3P02 \leq 35000\ kg$

Tržište:

$P1PO1 + P1PO2 \leq 1500\ [kom]$

$P2PO1 + P2PO2 \leq 2000\ [kom]$

$P3PO1 + P3PO2 \leq 1700\ [kom]$

Strojevi u poduzeću 1:

Tokarilica: $25P1PO1 + 15P2PO1 + 18P3PO1 \leq 129600(7{,}5h \cdot 60min \cdot\ 288)min$

Glodalica: $30P1PO1 + 20P2PO1 + 22P3PO1 \leq 259200\ (15 \cdot 60 \cdot 288)min$

Bušilica: $20P1PO1 + 10P2PO1 + 12P3PO1 \leq 259200\ (15 \cdot 60 \cdot 288)\ min$

Strojevi u poduzeću 2:

Tokarilica: $27P1PO2 + 20P2PO2 + 21P3PO2 \leq 129600\ min$

Glodalica: $25P1PO2 + 17P2PO2 + 28P3PO2 \leq 259200\ min$

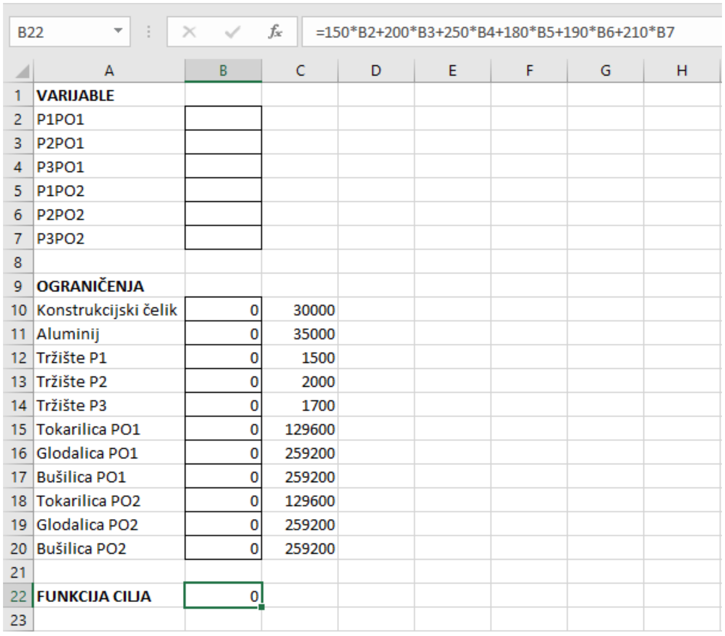
Bušilica: $15P1PO2 + 13P2PO2 + 16P3PO2 \leq 259200\ min$

<u>Uvjeti nenegativnosti</u> količina proizvoda po poduzećima:

$$P1PO2, P2PO1, P3PO1, P1PO2, P2PO2, P3PO2 \geq 0$$

6.2. Optimalno rješenje

Pri modeliranju problema i postavljanja matematičkog modela prvo je potrebno definirati varijable. Kod definiranog problema varijable su proizvodi u pojedinim poduzećima, a u ovom slučaju su to proizvodi poduzeća 1 (P1PO1, P2PO1, P3PO1) i proizvodi poduzeća 2 (P1PO2, P2PO2, P3PO2). Nakon toga, potrebno je definirati i ograničenja vezana za materijal, tržište i strojeve, a u ovom slučaju su to raspoloživost materijala (konstrukcijskog čelika i aluminija), zahtjev tržišta za pojedini proizvod te kapacitet strojeva u pojedinom poduzeću. Funkcija cilja ovog problema je maksimalna dobit. Unos tih podataka prikazan je na Slika 14. *Pripremanje matematičkog modela*.

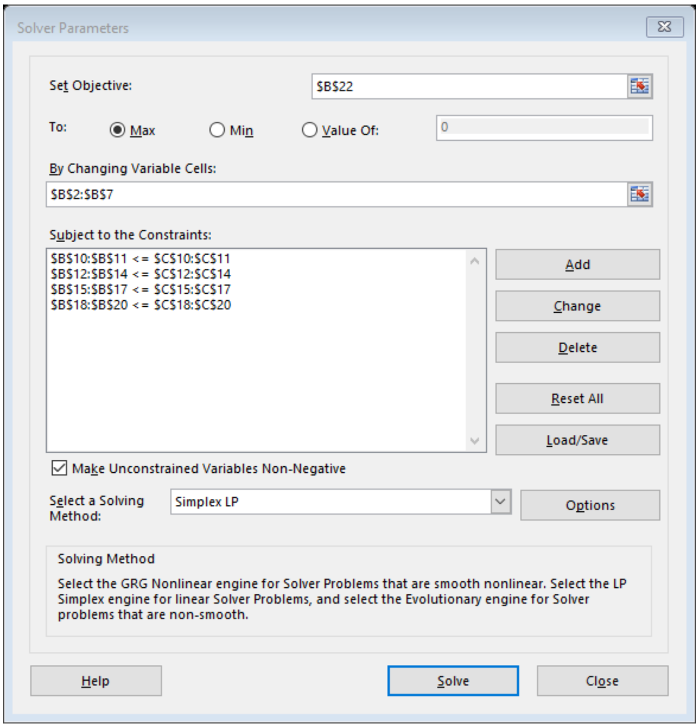


B22 =150*B2+200*B3+250*B4+180*B5+190*B6+210*B7

	A	B	C
1	**VARIJABLE**		
2	P1PO1		
3	P2PO1		
4	P3PO1		
5	P1PO2		
6	P2PO2		
7	P3PO2		
8			
9	**OGRANIČENJA**		
10	Konstrukcijski čelik	0	30000
11	Aluminij	0	35000
12	Tržište P1	0	1500
13	Tržište P2	0	2000
14	Tržište P3	0	1700
15	Tokarilica PO1	0	129600
16	Glodalica PO1	0	259200
17	Bušilica PO1	0	259200
18	Tokarilica PO2	0	129600
19	Glodalica PO2	0	259200
20	Bušilica PO2	0	259200
21			
22	**FUNKCIJA CILJA**	0	
23			

Slika 14. Pripremanje matematičkog modela

Zatim slijedi unošenje svih parametara u dijaloški okvir *Solver Parameters*. (Slika 15. *Popunjavanje parametara alata za rješavanje*)



Slika 15. Popunjavanje parametara alata za rješavanje

Nakon rješavanja, dobivena rješenja prikazana su u Izvještaju o odgovoru i Izvještaju o osjetljivosti.

U Izvještaju o odgovoru (Slika 16. *Izvještaj o odgovoru*) vrijednost funkcije cilja je 1095000 kn. Poduzeće 1 proizvelo je 2000 komada proizvoda P2 te 1700 komada proizvoda P3 što zadovoljava maksimalan zahtjev tržišta za oba proizvoda. Poduzeće 2 proizvelo je 1500 komada proizvoda P1 što je također maksimalan zahtjev tržišta.

Dostupna količina aluminija iznosila je 35000 kg od kojih je neiskorištenih ostalo 3060 kg, dok je konstrukcijskog čelika na raspolaganju bilo 30000 kg, a neiskorištenog ga je ostalo 18750 kg što je vidljivo iz stupca *Slack.*

Kod ograničenja kapaciteta strojeva, u oba poduzeća niti jedan stroj nije maksimalno iskorišten. U poduzeću 1 tokarilica može raditi još 69000 min, glodalica 181800 min, a bušilica 218800 min, dok u poduzeću 2 tokarilica može raditi još 89100 min, glodalica 221700 min, a bušilica 236700 min.

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$22	FUNKCIJA CILJA	0	1095000

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$2	P1PO1	0	0	Contin
$B$3	P2PO1	0	2000	Contin
$B$4	P3PO1	0	1700	Contin
$B$5	P1PO2	0	1500	Contin
$B$6	P2PO2	0	0	Contin
$B$7	P3PO2	0	0	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$B$10	Konstrukcijski čelik	11250	$B$10<=$C$10	Not Binding	18750
$B$11	Aluminij	31940	$B$11<=$C$11	Not Binding	3060
$B$12	Tržište P1	1500	$B$12<=$C$12	Binding	0
$B$13	Tržište P2	2000	$B$13<=$C$13	Binding	0
$B$14	Tržište P3	1700	$B$14<=$C$14	Binding	0
$B$15	Tokarilica PO1	60600	$B$15<=$C$15	Not Binding	69000
$B$16	Glodalica PO1	77400	$B$16<=$C$16	Not Binding	181800
$B$17	Bušilica PO1	40400	$B$17<=$C$17	Not Binding	218800
$B$18	Tokarilica PO2	40500	$B$18<=$C$18	Not Binding	89100
$B$19	Glodalica PO2	37500	$B$19<=$C$19	Not Binding	221700
$B$20	Bušilica PO2	22500	$B$20<=$C$20	Not Binding	236700

Slika 16. Izvještaj o odgovoru

U Izvještaju o osjetljivosti (Slika 17. *Izvještaj o osjetljivosti*) prikazani su podaci o osjetljivosti definiranog problema na promjene ulaznih podataka. U prvom dijelu izvještaja nalaze se vrijednosti dopustivog povećanja i smanjenja koji ne utječu na optimalno rješenje. U poduzeću 1 za proizvod P1 rješenje se neće promijeniti ukoliko se dobit (koeficijent funkcije cilja uz varijablu P1) poveća za 30 kn (dopustivo povećanje) ako pri tome vrijednost ostalih dobiti ostanu iste. Isto vrijedi i za proizvod P2 za koji je dopustivo smanjenje 10 kn te za proizvod P3 kod kojeg je dopustivo smanjenje 40 kn. U poduzeću 2, dopustivo smanjenje za proizvod P1 je 30 kn, dopustivo povećanje za proizvod P2 je 10 kn, a za proizvod P3 dopustivo povećanje je 40 kn. Reducirani trošak za proizvod P1 poduzeća 1 iznosi -30 kn što znači da se vrijednost dobiti proizvoda treba povećati za 30 kn da bi se isplatila njegova proizvodnja u poduzeću 1. U poduzeću 2, reducirani trošak za proizvod P2 iznosi -10 kn, a za proizvod P3 -40 kn, što znači da se za te vrijednosti treba povećati dobit po pojedinom proizvodu da bi njihova proizvodnja u poduzeću 2 bila isplativa.

U drugom dijelu izvještaja o osjetljivosti nalaze se vrijednosti dopustivog povećanja i smanjenja koje utječu na bazu optimalnog rješenja ako su ograničenja obvezujuća. Ako se kapacitet konstrukcijskog čelika smanji za 18750 kg, neće doći do promjene baze optimalnog rješenja. Također to isto vrijedi i za aluminij ako se njegov kapacitet smanji za 3060 kg. Kapacitet tržišta P1 može se povećati za 2500, a smanjiti za 1500 komada. Za P2, kapacitet tržišta može se povećati za 340, a smanjiti za 2000 komada, dok se kapacitet tržišta P3 može povećati za 373,17, a smanjiti za 1700 komada.

Kapaciteti strojeva u poduzeću 1 imaju sljedeće dopustivo smanjenje: tokarilica 69000 min, glodalica 181800 min, a bušilica 218800 min. U poduzeću 2 dopustivo smanjenje za tokarilicu je 89100 min, za glodalicu 221700 min, a za bušilicu 236700 min. Beskonačni iznosi kod dopuštenih povećanja nisu značajna jer se nalaze uz neobvezujuća ograničenja koja već imaju zalihe. Obvezujuća su ograničenja za kapacitet svih tržišta. Cijena u sjeni za tržište P1 iznosi 180 kn što znači da ako se zahtjev tržišta povisi (smanji) za jednu jedinicu na dopustivom intervalu, vrijednost funkcije cilja povećat (smanjit) će se za 180 kn. Ako se zahtjev tržišta P2 poveća (smanji) za jednu jedinicu, funkcija cilja povećat (smanjit) će se za 200 kn, dok će ta vrijednost za tržište P3 iznositi 250 kn.

6 Variable Cells

7/8	Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
9	$B$2	P1PO1	0	-30	150	30	1E+30
10	$B$3	P2PO1	2000	0	200	1E+30	10
11	$B$4	P3PO1	1700	0	250	1E+30	40
12	$B$5	P1PO2	1500	0	180	1E+30	30
13	$B$6	P2PO2	0	-10	190	10	1E+30
14	$B$7	P3PO2	0	-40	210	40	1E+30

15

16 Constraints

17/18	Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
19	$B$10	Konstrukcijski čelik	11250	0	30000	1E+30	18750
20	$B$11	Aluminij	31940	0	35000	1E+30	3060
21	$B$12	Tržište P1	1500	180	1500	2500	1500
22	$B$13	Tržište P2	2000	200	2000	340	2000
23	$B$14	Tržište P3	1700	250	1700	373,170732	1700
24	$B$15	Tokarilica PO1	60600	0	129600	1E+30	69000
25	$B$16	Glodalica PO1	77400	0	259200	1E+30	181800
26	$B$17	Bušilica PO1	40400	0	259200	1E+30	218800
27	$B$18	Tokarilica PO2	40500	0	129600	1E+30	89100
28	$B$19	Glodalica PO2	37500	0	259200	1E+30	221700
29	$B$20	Bušilica PO2	22500	0	259200	1E+30	236700

Slika 17. Izvještaj o osjetljivosti

7. TRANSPORTNI PROBLEM

Tri pogona (P1, P2 i P3) proizvode sklopove koje je potrebno transportirati na četiri skladišta (S1, S2, S3 i S4). Sklopove treba transportirati na skladišta uz minimalne troškove. Tablica 7. *Troškovi transporta, ponuda i potražnja* prikazana je zahtijevana i raspoloživa količina sklopova te troškovi transporta. [1]

Tablica 7. Troškovi transporta, ponuda i potražnja

Troškovi transporta, n.j./kom	S1	S2	S3	S4	Raspoloživa količina, kom
P1	50	60	90	75	1500
P2	100	70	80	110	1200
P3	45	70	120	65	1400
Zahtijevana količina, kom	900	1200	700	800	

7.1. Matematički model

Na osnovi definiranog problema, bit će definiran matematički model.

Funkcija cilja:

$$FC = 50x_{11} + 60x_{12} + 90x_{13} + 75x_{14} + 100x_{21} + 70x_{22} + 80x_{23} + 110x_{24} + 45x_{31} + 70x_{32} + 120x_{33} + 65x_{34} \rightarrow min[n.j.]$$

Ograničenja:

Ponuda:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1500$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1200$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1400$$

Potražnja:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 900$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1200$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 700$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 800$$

Uvjeti nenegativnosti za količine: $x_{ij} \geq 0$ $(i = 1,2,3\ pogon; j = 1,2,3,4\ skladište)$

7.2. Optimalno rješenje

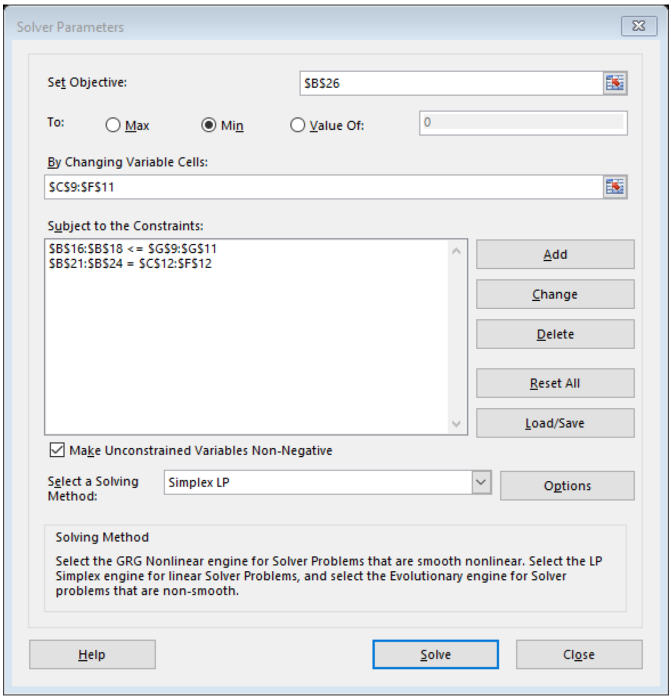
Prilikom rješavanja transportnog problema pomoću Rješavača, u MS Excel-u za brže rješavanje koristit će se funkcije SUM i SUMPRODUCT koje služe za zbrajanje umnožaka. Priprema modela na radnom listu prikazana je na Slika 18. *Priprema modela na radnom listu*.

Ograničenja za ponudu i potražnju napisana su pomoću funkcije SUM pa tako formula za ponudu P1 glasi =SUM(C9:F9), za ponudu P2 =SUM(C10:F10), a za ponudu P3 =SUM(C11:F11). Formule za potražnju su sljedeće: za S1 =SUM(C9:C11), za S2 =SUM(D9:D11), za S3 =SUM(E9:E11), te za S4 =SUM(F9:F11). Formula za funkciju cilja napisana je pomoću funkcije SUMPRODUCT te ona glasi =SUMPRODUCT(C3:F5;C9:F11), a definirana je ćelijama s jediničnim troškovima (C3:F5) i ćelijama u koje će se upisati varijable rješenja (C9:F11).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			S1	S2	S3	S4	Ponuda
3		P1	50	60	90	75	1500
4		P2	100	70	80	110	1200
5		P3	45	70	120	65	1400
6		Potražnja	900	1200	700	800	
7							
8			S1	S2	S3	S4	Ponuda
9		P1					1500
10		P2					1200
11		P3					1400
12		Potražnja	900	1200	700	800	
13							
14	OGRANIČENJA						
15	Ponuda						
16	P1	0					
17	P2	0					
18	P3	0					
19							
20	Potražnja						
21	S1	0					
22	S2	0					
23	S3	0					
24	S4	0					
25							
26	FUNKCIJA CILJA	0					
27							

Slika 18. Priprema modela na radnom listu

Nakon upisivanja formula na radnom listu, slijedi pokretanje alata Rješavač i popunjavanje potrebnih parametara (Slika 19. *Popunjavanje parametara*). Ovoga puta funkcija cilja je postavljena na minimum (*Min*) jer je cilj problema minimalni trošak transporta. Što se tiče ograničenja, ponuda je zapisana kao ($B$16:$B$18)≤ ($G$9:$G$11), a potražnja kao ($B$21:$B$24=$C$12:$F$12).



Slika 19. Popunjavanje parametara

Dobiveni rezultati prikazani su u Izvještaju o odgovoru (Slika 20. *Izvještaj o odgovoru*) te na samom modelu (Slika 21. *Optimalni plan transporta*). Funkcija cilja, odnosno minimalni transportni troškovi iznose 222000 n.j. Iz stupca *Final Value* vidljivo je da su svi sklopovi iz pogona P1 isporučeni, točnije na skladište S1 isporučeno je 300 komada sklopova, a na skladište S2 1200 komada što daje ukupan zbroj od 1500 raspoloživih komada. Iz pogona P2 na skladište S3 isporučeno je 700 komada što znači da je na zalihama ostalo 500 komada sklopova što se vidi i u trećem dijelu izvještaja o odgovoru u stupcu *Slack* (Zaliha). Iz pogona P3 svi su sklopovi isporučeni, njih 600 isporučeno je na skladište S1, a 800 na skladište S4. Potražnja skladišta je zadovoljena, skladištu S1 isporučeno je 900 komada sklopova, skladištu S2 1200 komada, skladištu S3 700 komada, a skladištu S4 800 komada sklopova.

14	Objective Cell (Min)					
15	Cell	Name	Original Value	Final Value		
16	$B$26	FUNKCIJA CILJA	0	222000		
17						
18						
19	Variable Cells					
20	Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer	
21	$C$9	P1 S1	0	300	Contin	
22	$D$9	P1 S2	0	1200	Contin	
23	$E$9	P1 S3	0	0	Contin	
24	$F$9	P1 S4	0	0	Contin	
25	$C$10	P2 S1	0	0	Contin	
26	$D$10	P2 S2	0	0	Contin	
27	$E$10	P2 S3	0	700	Contin	
28	$F$10	P2 S4	0	0	Contin	
29	$C$11	P3 S1	0	600	Contin	
30	$D$11	P3 S2	0	0	Contin	
31	$E$11	P3 S3	0	0	Contin	
32	$F$11	P3 S4	0	800	Contin	
33						
34						
35	Constraints					
36	Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
37	$B$16	P1 Ponuda	1500	$B$16<=$G$9	Binding	0
38	$B$17	P2 Ponuda	700	$B$17<=$G$10	Not Binding	500
39	$B$18	P3 Ponuda	1400	$B$18<=$G$11	Binding	0
40	$B$21	S1 Potražnja	900	$B$21=$C$12	Binding	0
41	$B$22	S2 Potražnja	1200	$B$22=$D$12	Binding	0
42	$B$23	S3 Potražnja	700	$B$23=$E$12	Binding	0
43	$B$24	S4 Potražnja	800	$B$24=$F$12	Binding	0

Slika 20. Izvještaj o odgovoru

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			S1	S2	S3	S4	Ponuda
3		P1	50	60	90	75	1500
4		P2	100	70	80	110	1200
5		P3	45	70	120	65	1400
6		Potražnja	900	1200	700	800	
7							
8			S1	S2	S3	S4	Ponuda
9		P1	300	1200	0	0	1500
10		P2	0	0	700	0	1200
11		P3	600	0	0	800	1400
12		Potražnja	900	1200	700	800	
13							
14	**OGRANIČENJA**						
15	Ponuda						
16	P1	1500					
17	P2	700					
18	P3	1400					
19							
20	Potražnja						
21	S1	900					
22	S2	1200					
23	S3	700					
24	S4	800					
25							
26	**FUNKCIJA CILJA**	222000					

Slika 21. Optimalni plan transporta

U prvom dijelu Izvještaja o osjetljivosti (Slika 22. *Izvještaj o osjetljivosti*) reducirani trošak za P1S1, P1S2, P2S3, P3S1 i P3S4 je 0 jer im vrijednosti nisu nule, odnosno iz navedenih pogona se u navedena skladišta transportirala određena količina sklopova. Za ostale pogone vrijednost reduciranog troška govori za koliko se treba smanjiti trošak da bi transport na određeno skladište bio isplativ. Ti iznosi su ujedno i dopustivo smanjenje koeficijenata funkcije cilja da pritom ne dođe do promjene optimalnog rješenja.

U drugom dijelu izvještaja, iz stupca Cijena u sjeni vidi se da ako se ponuda P3 poveća za jednu jedinicu, funkcija cilja će se smanjiti za 5 n.j. Isto tako, ako se potražnja skladišta smanji za jednu jedinicu, funkcija cilja će se smanjiti za određeni iznos koji za S1 iznosi 50, za S2 60, za S3 80, a za S4 70 n.j. Količina komada u pogonu P1 ne može se smanjiti, već samo beskonačno povećati bez utjecaja na vrijednsot funkcije cilja. Raspoloživa količina komada pogona P2 može se kretati od 700 (1200-500) do beskonačno bez utjecaja na vrijednost funkcije cilja, dok je za pogon P3 taj raspon od 1400 do 1700 kom (1400+300). Dopustivo smanjenje za skladište S1 je 300, za S2 1200, a za S4 300 kom, dok se za skladište S3 zahtijevana količina može mijenjati od 0 (700-700) do 1200 (700+500) komada.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$C$9	P1 S1	300	0	50	5	5
$D$9	P1 S2	1200	0	60	10	1E+30
$E$9	P1 S3	0	10	90	1E+30	10
$F$9	P1 S4	0	5	75	1E+30	5
$C$10	P2 S1	0	50	100	1E+30	50
$D$10	P2 S2	0	10	70	1E+30	10
$E$10	P2 S3	700	0	80	10	1E+30
$F$10	P2 S4	0	40	110	1E+30	40
$C$11	P3 S1	600	0	45	5	5
$D$11	P3 S2	0	15	70	1E+30	15
$E$11	P3 S3	0	45	120	1E+30	45
$F$11	P3 S4	800	0	65	5	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$16	P1 Ponuda	1500	0	1500	1E+30	0
$B$17	P2 Ponuda	700	0	1200	1E+30	500
$B$18	P3 Ponuda	1400	-5	1400	300	0
$B$21	S1 Potražnja	900	50	900	0	300
$B$22	S2 Potražnja	1200	60	1200	0	1200
$B$23	S3 Potražnja	700	80	700	500	700
$B$24	S4 Potražnja	800	70	800	0	300

Slika 22. Izvještaj o osjetljivosti

8. PROBLEM RASPOREĐIVANJA

Pet radnika treba obaviti pet poslova. Svaki radnik je osposobljen za obavljanje svih poslova, ali pri tome radnici utroše različita vremena, navedena u Tablica 8. *Vrijeme potrebno za obavljanje posla*, za obavljanje istih/različitih poslova. U aktualnom vremenskom razdoblju jedan radnik može biti angažiran samo na jednom od poslova. Odredite optimalnu proizvodnju. [6]

Tablica 8. Vrijeme potrebno za obavljanje posla

Radnici	Poslovi				
	P1	P2	P3	P4	P5
R1	4	21	12	5	10
R2	8	23	3	5	5
R3	33	14	13	10	7
R4	14	21	19	11	11
R5	9	16	10	15	13

8.1. Matematički model

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, ako\ je\ i-ti\ radnik\ na\ j-tom\ poslu \\ 0,\ inače \end{cases} \qquad \text{i,j=1,…,5}$$

<u>Funkcija cilja:</u>

$$\begin{aligned} FC = {} & 4x_{11} + 21x_{12} + 12x_{13} + 5x_{14} + 10x_{15} + 8x_{21} + 23x_{22} + 3x_{23} + 5x_{24} + 5x_{25} \\ & + 33x_{31} + 14x_{32} + 13x_{33} + 10x_{34} + 7x_{35} + 14x_{41} + 21x_{42} + 19x_{43} \\ & + 11x_{44} + 11x_{45} + 9x_{51} + 16x_{52} + 10x_{53} + 15x_{54} + 13x_{55} \rightarrow MIN \end{aligned}$$

<u>Ograničenja:</u>

Budući da svaki radnik može biti angažiran samo na jednom poslu suma je jedan u svakoj od jednakosti koja slijedi.

Ponuda:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$

Potražnja:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$

Ovakva vrsta problema ubraja se u cjelobrojno binarno programiranje jer su rješenja cjelobrojna i mogu poprimiti vrijednost 0 ili 1. Varijabla koja će imati vrijednost 0 označavat će mjesto na koje ništa nije raspoređeno, dok će varijabla s vrijednošću 1 prikazivati da je na tom mjestu nešto raspoređeno.

8.2. Optimalno rješenje

Rješavanjem problema raspoređivanja, koristit će se funkcije SUM i SUMPRODUCT kao i za transportni problem. Priprema modela na radnom listu prikazana je Slika 23. *Priprema modela na radnom list.*

	A	B	C	D	E	F	G
1		P1	P2	P3	P4	P5	
2	R1	4	21	12	5	10	
3	R2	8	23	3	5	5	
4	R3	33	14	13	10	7	
5	R4	14	21	19	11	11	
6	R5	9	16	10	15	13	
7							
8							
9		P1	P2	P3	P4	P5	
10	R1						1
11	R2						1
12	R3						1
13	R4						1
14	R5						1
15		1	1	1	1	1	
16							
17							
18	FUNKCIJA CILJA:		0				
19							
20	OGRANIČENJA:						
21	Ponuda:	R1	0				
22		R2	0				
23		R3	0				
24		R4	0				
25		R5	0				
26							
27	Potražnja:	P1	0				
28		P2	0				
29		P3	0				
30		P4	0				
31		P5	0				

Slika 23. Priprema modela na radnom listu

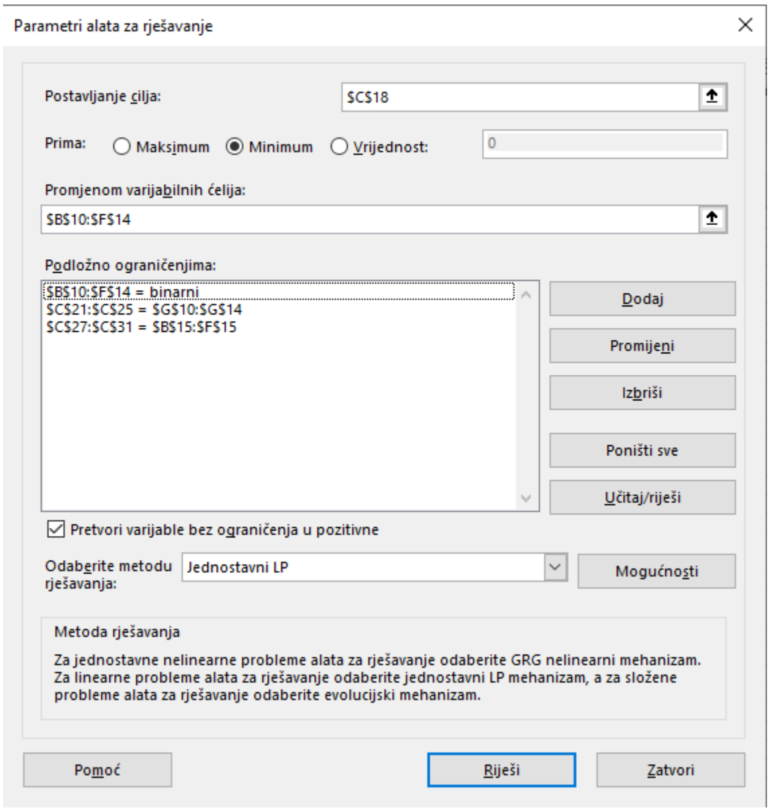
Formule za ponudu i potražnju napisane su pomoću funkcije SUM te one glase:

- Za R1: =SUM(B10:F10)
- Za R2: =SUM(B11:F11)
- Za R3: =SUM(B12:F12)
- Za R4: =SUM(B13:F13)
- Za R5: =SUM(B14:F14)
- Za S1: =SUM(B10:B14)
- Za S2: =SUM(C10:C14)
- Za S3: =SUM(D10:D14)
- Za S4: =SUM(E10:E14)
- Za S5: =SUM(F10:F14)

Formula za funkciju cilja je =SUMPRODUCT(B2:F6;B10:F14).

Također je vidljivo da desne strane ograničenja ponude i potražnje imaju vrijednost 1 jer jedan radnik može raditi samo u jednoj stanici.

Zatim pokrećemo Rješavač te upisujemo potrebne parametre (Slika 23. *Popunjavanje parametara*). Funkcija cilja je postavljena na minimum jer se traži obavljanje poslova u najkraćem mogućem roku. Ograničenja za ponudu zapisana su kao ($C$21:$C$25=$G$10:$G$14), a za potražnju ($C$27:$C$31=$B$15:$F$15). Potrebno je dodati i ograničenje da varijable moraju biti binarne ($B$10:$F$14=binarni).



Slika 24. Popunjavanje parametara

Nakon rješavanja dobije se optimalni plan na radnom listu (Slika 25. *Optimalni plan*) te Izvještaj o odgovoru (Slika 26. *Prvi i drugi dio izvještaja o odgovoru* i Slika 27. *Treći dio izvještaja o odgovoru*). Dobivena rješenja pokazuju da će radnik R1 raditi na prvom, radnik R2 na trećem, radnik R3 na petom, radnik R4 na četvrtom, a radnik R5 na drugom poslu. Pri takvom rasporedu najmanje vrijeme za obavljanje poslova je 41 sat.

Upravo zbog toga što je problem binarni, u rješenju nema izvještaja o osjetljivosti.

Na Slikama 26. i 27. može se očitati u kojoj ćeliji se nalazi funkcija cilja te njezina početna i završna vrijednost, tj. optimalno rješenje zadatka. Također se vide i podaci o varijablama kod kojih su završne vrijednosti binarne, točnije broj 1 je za one ćelije koje pokazuju na kojem pogonu radi pojedini radnik. Što se tiče dijela izvještaja u kojem su ograničenja, može se zaključiti da je svaki radnik raspoređen na jedan pogon, tj. da nema slobodnih pogona.

	A	B	C	D	E	F	G
1		P1	P2	P3	P4	P5	
2	R1	4	21	12	5	10	
3	R2	8	23	3	5	5	
4	R3	33	14	13	10	7	
5	R4	14	21	19	11	11	
6	R5	9	16	10	15	13	
7							
8							
9		P1	P2	P3	P4	P5	
10	R1	1	0	0	0	0	1
11	R2	0	0	1	0	0	1
12	R3	0	0	0	0	1	1
13	R4	0	0	0	1	0	1
14	R5	0	1	0	0	0	1
15		1	1	1	1	1	
16							
17							
18	**FUNKCIJA CILJA:**		41				
19							
20	**OGRANIČENJA:**						
21	Ponuda:	R1	1				
22		R2	1				
23		R3	1				
24		R4	1				
25		R5	1				
26							
27	Potražnja	P1	1				
28		P2	1				
29		P3	1				
30		P4	1				
31		P5	1				

Slika 25. Optimalni plan

14	Ciljna ćelija (Minimum)				
15	Ćelija	Naziv	Izvorna vrijednost	Završna vrijednost	
16	$C$18	FUNKCIJA CILJA: P2	0	41	
17					
18					
19	Varijabilne ćelije				
20	Ćelija	Naziv	Izvorna vrijednost	Završna vrijednost	Cijeli broj
21	$B$10	R1 P1	0	1	Binarni
22	$C$10	R1 P2	0	0	Binarni
23	$D$10	R1 P3	0	0	Binarni
24	$E$10	R1 P4	0	0	Binarni
25	$F$10	R1 P5	0	0	Binarni
26	$B$11	R2 P1	0	0	Binarni
27	$C$11	R2 P2	0	0	Binarni
28	$D$11	R2 P3	0	1	Binarni
29	$E$11	R2 P4	0	0	Binarni
30	$F$11	R2 P5	0	0	Binarni
31	$B$12	R3 P1	0	0	Binarni
32	$C$12	R3 P2	0	0	Binarni
33	$D$12	R3 P3	0	0	Binarni
34	$E$12	R3 P4	0	0	Binarni
35	$F$12	R3 P5	0	1	Binarni
36	$B$13	R4 P1	0	0	Binarni
37	$C$13	R4 P2	0	0	Binarni
38	$D$13	R4 P3	0	0	Binarni
39	$E$13	R4 P4	0	1	Binarni
40	$F$13	R4 P5	0	0	Binarni
41	$B$14	R5 P1	0	0	Binarni
42	$C$14	R5 P2	0	1	Binarni
43	$D$14	R5 P3	0	0	Binarni
44	$E$14	R5 P4	0	0	Binarni
45	$F$14	R5 P5	0	0	Binarni

Slika 26. Prvi i drugi dio Izvještaja o odgovoru

48	Ograničenja					
49	Ćelija	Naziv	Vrijednost ćelije	Formula	Stanje	Zaliha
50	$C$21	R1 P2	1	$C$21=$G$10	Obvezujuće	0
51	$C$22	R2 P2	1	$C$22=$G$11	Obvezujuće	0
52	$C$23	R3 P2	1	$C$23=$G$12	Obvezujuće	0
53	$C$24	R4 P2	1	$C$24=$G$13	Obvezujuće	0
54	$C$25	R5 P2	1	$C$25=$G$14	Obvezujuće	0
55	$C$27	P1 P2	1	$C$27=$B$15	Obvezujuće	0
56	$C$28	P2 P2	1	$C$28=$C$15	Obvezujuće	0
57	$C$29	P3 P2	1	$C$29=$D$15	Obvezujuće	0
58	$C$30	P4 P2	1	$C$30=$E$15	Obvezujuće	0
59	$C$31	P5 P2	1	$C$31=$F$15	Obvezujuće	0
60	$B$10:$F$14=Binarni					

Slika 27. Treći dio izvještaja o odgovoru

9. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu prikazani su osnovni problemi linearnog programiranja u strojarstvu. Svaki problem je nakon definiranja pretvoren u matematički model te riješen u MS Excel-u pomoću alata Rješavač. Prednost ovakvog rješavanja u MS Excel-u je brže dobivanje rezultata koje je vrlo bitno u poslovanju, a i Excel je program koji može biti instaliran na gotovo svakom računalu te tako svi imaju ovakvu mogućnost rješavanja problema. Jednostavan je za korištenje te se dobije detaljan i opsežan prikaz rezultata u Izvještaju o odgovoru i Izvještaju o osjetljivosti pomoću kojih se utvrđuje kako ulazni podaci utječu na optimalno rješenje. Osim u strojarstvu, linearno programiranje se može primjenjivati i u drugim djelatnostima poput građevine, drvne industrije, u proizvodnji namještaja, stolarije, zatim u farmaceutskoj industriji za proizvodnju lijekova, tekstilnoj industriji i sl.

10. LITERATURA

[1] Petkovićek D., *Linearno programiranje*, http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicek%20-%20Linearno%20programiranje.pdf, pristupljeno 20.12.2019.

[2] Hrvatska enciklopedija, http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=45345, pristupljeno 27.12.2019.

[3] http://www.ffri.hr/~zvonimir/Kvantitativne/08%20Linearno%20programiranje.pdf, pristupljeno 20.12.2019.

[4] Čordaš R., *Linearno programiranje i primjene*, Osijek, 2014.

[5] https://www.versionmuseum.com/history-of/microsoft-excel, pristupljeno 27.12.2019.

[6] Plazibat B., Reić L., *Operacijska istraživanja u MS Excelu* , Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split, 2015.

[7] Rendulić M., *Tipične primjene linearnog programiranja u strojarstvu*, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Slavonski Brod, 2016.

[8] Sabljak V., *Primjena alata Rješavač u MS Excel-u pri optimiranju*, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Slavonski Brod, 2018.

[9] https://mathfaq.com/wp/wpcontent/uploads/simplex_sensitivity.pdf, pristupljeno 01.07.2020.

11. PRILOZI

11.1. Popis simbola

kg – kilograma

kom – komada

n.j. – novčanih jedinica

11.2. Popis slika

11.3. Popis tablica