

# UTJECAJ KONCENTRIRANIH MASA NA VIBRACIJSKO PONAŠANJE ŠTAPNE KONSTRUKCIJE

---

**Bijelić, Josip**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:566864>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-12**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE

JOSIP BIJELIĆ

**UTJECAJ KONCENTRIRANIH MASA NA  
VIBRACIJSKO PONAŠANJE ŠTAPNE  
KONSTRUKCIJE**

ZAVRŠNI RAD

KARLOVAC, 2021. Godina

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE

JOSIP BIJELIĆ

**UTJECAJ KONCENTRIRANIH MASA NA  
VIBRACIJSKO PONAŠANJE ŠTAPNE  
KONSTRUKCIJE**

ZAVRŠNI RAD

Mentor: dr.sc. Josip Hoster

KARLOVAC, 2021. godina

Ime i prezime	Josip Bijelić	
OIB / JMBG		
Adresa		
Tel. / Mob./e-mail		
Matični broj studenta		
JMBAG		
Studij (staviti znak <b>X</b> ispred odgovarajućeg studija)	<input checked="" type="checkbox"/> preddiplomski	<input type="checkbox"/> specijalistički diplomski
Naziv studija	Stručni studij Mehatronike	
Godina upisa	201.	
Datum podnošenja molbe	05.07.2021.	
Vlastoručni potpis studenta/studentice		
Naslov teme na hrvatskom: <b>Utjecaj koncentriranih masa na vibracijsko ponašanje štapne konstrukcije</b>		
Naslov teme na engleskom: <b>Influence of concentrated masses on vibrational behaviour of beam structure</b>		
<p>Opis zadatka:</p> <p>U završnom radu potrebno je opisati konstrukciju ručnih motornih kosilica koje koriste nit kao oštricu. Opisati izvore vibracijske sile kod elektromotornih i benzinskih na ergonomiju. Opisati uvjete uravnoteženosti jednocilindričnih motora za pogon ručne kosilice. Opisati kinematiku i dinamiku cijevne konstrukcije kosilice te koncentriranih masa, glave kosilice, ručki, spojnice cijevi ručke i osnovne cijevi. Opisati numeričke metode proračuna vibracijskog ponašanja cijevne konstrukcije kosilice. Prikazati ubrzanja i amplitude na ručkama kosilica koje su slabo uravnotežene.</p> <p>Kao numerički dio zadatka za odabranu kosilicu provesti proračun utjecaja dodanih koncentriranih masa na ubrzanja i amplitudu na ručkama. Prikazati koja su mjesta na kosilici optimalna za smanjenje vibracija na ručkama. Prikazati kosilicu s dodanim utezima u obliku sklopnog crteža.</p> <p>Zadatak izraditi i opremiti sukladno Pravilniku o završnom radu Veleučilišta u Karlovcu.</p>		
Mentor:		Predsjednik Ispitnog povjerenstva:

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Josipu Hosteru na savjetima, vođenju i podršci. Zahvaljujem se i mojoj obitelji što su bili uz mene za vrijeme studiranja i izrade završnog rada.

Karlovac 15.7.2021.

Josip Bijelić

## **SAŽETAK**

Završni rad se sastoji od teorijskog i numeričkog dijela, u teorijskom dijelu opisane su konstrukcije motornih kosilica i ručnih motornih kosilica. Objasnjen je način rada jednocilindričnih motora koji služe za pokretanje kosilica.

U eksperimentalnom dijelu prikazano je ponašanje vibracija pomoću metode konačnih elemenata, vibracije smo promatrali na štapnoj konstrukciji od koje je izrađena sama kosilica.

Ključne riječi: vibracije, kosilica, štapna konstrukcija, koncentrirane mase.

## **SUMMARY**

The final work consists of a theoretical and a numerical part, in the theoretical part the constructions of motor mowers and hand motor mowers are described. The mode of operation of single-cylinder engines used to start mowers is explained.

In the experimental part, the behavior of vibrations is shown using the finite element method, vibrations were observed on the rod structure from which the mower itself is made.

Keywords: vibrations, mower, rod construction, concentrated masses.

# SADRŽAJ

<b>1.UVOD</b> .....	1
<b>2.KONSTRUKCIJA RUČNIH MOTORNIH KOSILICA</b> .....	5
2.1.Konstrukcija motorne kosilice na 4 kotača i trimera .....	5
2.2.Vrste motora kod motornih kosilica i trimera .....	7
2.2.1.Dvotaktni benzinski motori .....	7
2.2.2.Četverotaktni benzinski motori .....	9
<b>3.VIBRACIJE MOTORNIH KOSILICA TE NJHOV UTJECAJ NA ČOVJEKA</b> .....	10
3.1.Jednocilindrični motori .....	11
3.1.1.Uravnoteženje jednocilindričnih motora .....	11
3.1.2.Uravnoteženje sila inercije oscilirajućih masa .....	14
<b>4.UBRZANJA I AMPLITUDE NA RUČKAMA</b> .....	15
4.1.Matematički prikaz .....	16
<b>5.NUMERIČKE METODE PRORAČUNA VIBRACIJSKOG PONAŠANJA</b> .....	19
5.1.Metoda konačnih razlika .....	20
5.2.Metoda diskretnih elemenata .....	21
5.3. Metoda konačnih elemenata .....	21
5.3.1. Osnovni gredni element .....	23
<b>6.PRORAČUN UTJECAJA DODANIH KONCENTRIRANIH MASA NA UBRZANJA I AMPLITUDU NA RUČKAMA</b> .....	27
<b>7.ZAKLJUČAK</b> .....	38
<b>8.LITERATURA</b> .....	39



## POPIS SLIKA

Slika 1 Ručna kosa .....	1
Slika 2 Prva mehanička kosilica .....	2
Slika 3 Motorna samohodna kosilica .....	2
Slika 4 Motorni trimer .....	3
Slika 5 Električna kosilica .....	4
Slika 6 Konstrukcija motorne kosilice .....	5
Slika 7 Konstrukcija trimera .....	6
Slika 8 Prikaz rada dvotaktnog motora .....	7
Slika 9 Vremenski dijagram benzinskog motora .....	9
Slika 10 Prikaz rada četverotaktnog motora .....	10
Slika 11 Sila na klip i indicirani moment jednocilindričnog četverotaktnog ottovog motora .....	12
Slika 12 Sile plinova i sile inercije u klipnom mehanizmu .....	13
Slika 13 Sila inercije i-toga reda prikazana pomoću dva rotirajuća vektora polovičnih amplituda ....	14
Slika 14 Prikaz protuutega na koljenastom vratilu .....	14
Slika 15 Globalni i lokalni koordinatni sustav motora za trimer .....	15
Slika 16 Raspored sustava za montažu motora .....	18
Slika 17 Shematski prikaz rješavanja inženjerskih problema .....	19
Slika 18 Raspored čvorova: a) jednodimenzijski, b) dvodimenzijski .....	20
Slika 19 Skica 4 osnovna gredna konačna elementa .....	23
Slika 20 Skica štapa te duljine i mase na štapu .....	28
Slika 21 Prikaz djelovanja mase utega na mjestu motora pri 1000 okretaja u minuti .....	34
Slika 22 Prikaz djelovanja mase na mjestu motora utega pri 2000 okretaja u minuti .....	34
Slika 23 Prikaz djelovanja mase na mjestu motora utega pri 4000 okretaja u minuti .....	35
Slika 24 Prikaz djelovanja mase na mjestu motora utega pri 8000 okretaja u minuti .....	35
Slika 25 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 1000 okretaja u minuti .....	36
Slika 26 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 2000 okretaja u minuti .....	36
Slika 27 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 4000 okretaja u minuti .....	37
Slika 28 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 4000 okretaja u minuti .....	37



## 1.UVOD

Strojevi koji se upotrebljavaju za održavanje zatravljenih površina, odnosno motorne kose, ručne kose, kosilice na guranje, električne kosilice olakšavaju rad te značajno utječu na radni učinak košnje.

Ako idemo kronološki prvo su se koristile ručne kose. One se i danas koriste ali u puno manjoj mjeri. Uglavnom ih koriste starija populacija u ruralnim područjima.



Slika 1 Ručna kosa

Nakon toga se javljaju prve kosilice na guranje. One se javljaju sredinom 19. stoljeća.

Prvo su ih pokretali konji, a krajem 19. Stoljeća dizajnirana je kosilica koju pokreće para.



Slika 2 Prva mehanička kosilica

Zatim, početkom 20. Stoljeća javljaju se prve kosilice koje pokreće motor sa unutarnjim izgaranjem.

Razlikujemo 2 vrste motornih kosilica: - motorna kosilica bez pogona (na guranje)

-motorna kosilica na vlastiti pogon (samohodna)

Motorne kosilice na guranje koriste kombinaciju snage motora i snage čovjeka. Idealne su za manje površine, lagane su te je sa njima lako upravljati.

Samohodne kosilice su odlična opcija kad kosimo velike površine. Imaju malu potrošnju i dosta su brze. Mogu imati pogon na prednje, zadnje ili na sva četiri kotača.



Slika 3 Motorna samohodna kosilica

Krajem 20. Stoljeća javljaju se i prvi trimeri na motorni pogon. Njihova je velika prednost ta što mogu dohvatiti svaki kutak i pokositi i najteže površine. Inače su vrlo jednostavni za upravljanje te ne zahtijevaju neko pretjerano znanje za rukovanje. Razlikujemo ih prema vrsti pogona, a mogu biti: motorni, električni i akumulatorski.



Slika 4 Motorni trimer

Posljednje se javljaju električne kosilice. Razlikujemo električne kosilice koje se uključe u struju pomoću kabla i punjive koje koriste bateriju.

Glavna prednost električnih kosilica je njihova profitabilnost, a glavni nedostatak je kratki domet jer mora imati u blizini izvor napajanja. Kod punjivih kosilica električna energija je

izvor snage, tj. motor se napaja iz baterije koja se puni. Negativna strana je mala snaga i relativno kratko vrijeme trajanja baterije.



Slika 5 Električna kosilica

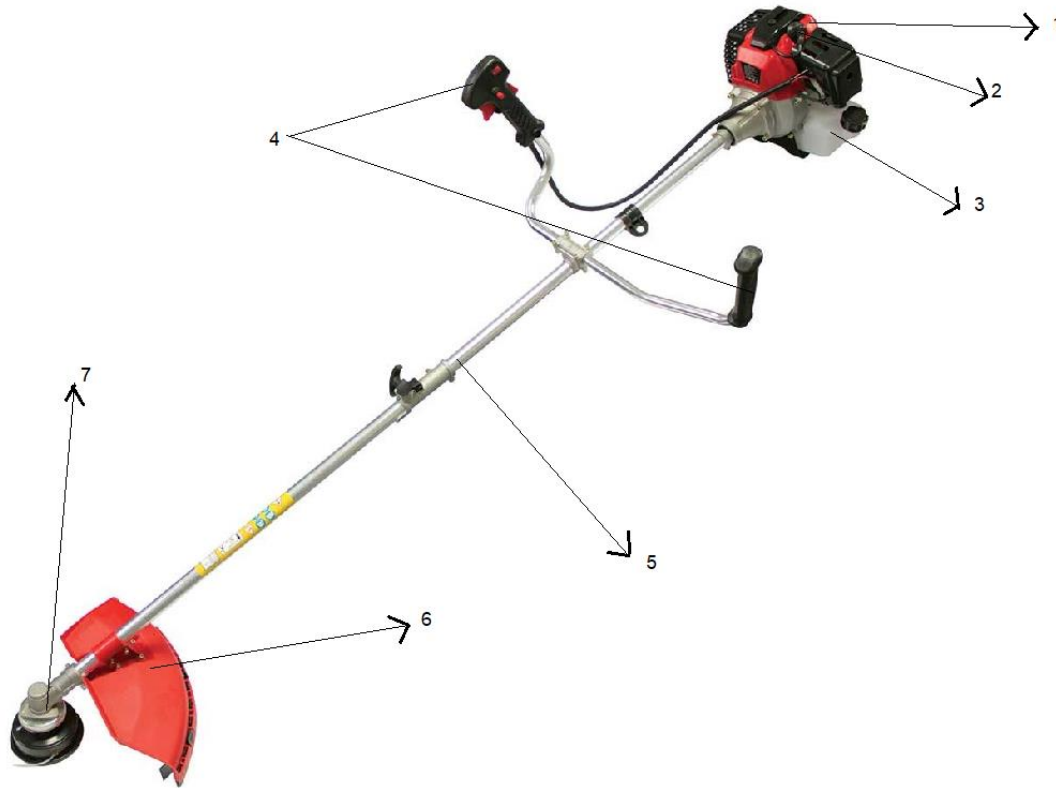
## 2.KONSTRUKCIJA RUČNIH MOTORNIH KOSILICA

### 2.1.Konstrukcija motorne kosilice na 4 kotača i trimera



Slika 6 Konstrukcija motorne kosilice

1. Ručka- uglavnom su ovoga oblika i obložene zaštitnom gumom ili spužvom radi udobnosti
2. Spojka- prilikom pritiska spojke samohodna kosilica se sama počinje kretati. Kad je pustimo kosilica staje
3. Motor- uglavnom su jednocilindarski
4. Zaštita od bacanja trave koju noževi bacaju prilikom rotacije
5. Kotači- pogon može biti na prednje, zadnje ili na sva četiri kotača
6. Spremnik za travu



Slika 7 Konstrukcija trimera

1. Motor- može biti dvotaktni ili četverotaktni
2. Svjećica
3. Spremnik za gorivo
4. Ruče- razlikujemo dvije vrste ručki. Okrugla ručka i široka ručka (bicikl ručka). Široka ručka koristi se za dugotrajniji rad, za rad na većim površinama te je dosta komfornija prilikom dugotrajnog rada. Kod rada na uskim i kosim površinama koristi se okrugla ručka radi lakšeg manevriranja.
5. Cijevi trimera- Cijev trimera izrađena je od aluminija što sanjuje težinu, a dobro podnosi sva opterećenja i vibracije.

Cijev trimera može biti ravna ili zaključljena.



Trimeri sa ravnom šipkom su kraći, i njima je lakše manevrirati. Trimeri sa ravnom šipkom su duži i udobniji za dugotrajni rad.

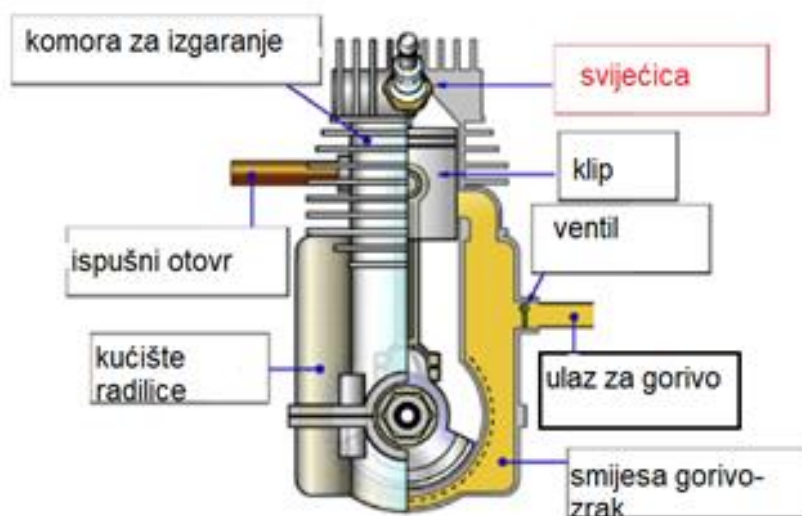
6. Plastična zaštita
7. Pužni zglobov trimera

## 2.2.Vrste motora kod motornih kosilica i trimera

### 2.2.1.Dvotaktni benzinski motori

Dvotaktni benzinski motor čine 3 osnovna konstrukcijska sklopa i pomoćni sustavi:

1. kućište motora - glava, cilindri, kućište radilice
2. klipni mehanizam — klip, klipnjača i radilica (koljenasto vratilo)
3. sustav za stvaranje smjese - karburator ili sustav ubrizgavanja, usisna grana
4. pomoćni sustavi - sustav paljenja, hlađenja, podmazivanja, ispušni sustav



Slika 8 Prikaz rada dvotaktnog motora

## Princip rada

Radni ciklus dvotaktnog motora sastoji se od dva takta: kompresije i proširenja (takt). Unos smjese goriva i ispuh ispušnih plinova, koji se kod četverotaktnih motora izvode u odvojenim hodovima, kod dvotaktnih motora događa se tijekom kompresije i širenja.

Tijekom hoda prema gore, klip se pomiče iz GMT u DMT i komprimira naboj (smjesu zrak-gorivo) u komori za izgaranje .

Zbog pomicanja klipa prema gore, stvara se djelomični vakuum u karteru i to omogućuje ulaz svježeg punjenja u karter kroz nepokriveni ulazni otvor.

Ispušni otvor i ulazni otvor ostaju pokriveni kada je klip u DMT.

Čim dođe do izgaranja svježeg naboja, stvara se velika količina vrućih plinova koji stvaraju vrlo visoki tlak na vrh klipa. Zbog ove sile, klip se pomiče prema dolje i okreće radilicu i obavlja koristan posao.

Daljnijim pomicanjem klipa prema dolje prvo se otkrivaju ispušni otvor i otvor za prijenos, a ispuh započinje kroz ispušni otvor.

Čim se otvori otvor za prijenos, punjenje se kroz njega tjera u cilindar.

Punjenje udara u deflektor na kruni klipa, podiže se na vrh cilindra i istiskuje većinu ispušnih plinova.

Klip je sada na položaju GMT. Cilindar je potpuno napunjen svježim nabojem, ali je donekle razrijeđen ispušnim plinovima.

Konačno, ciklus događaja se zatim ponavlja. Dobivamo dva poteza za jedan obrt radilice.

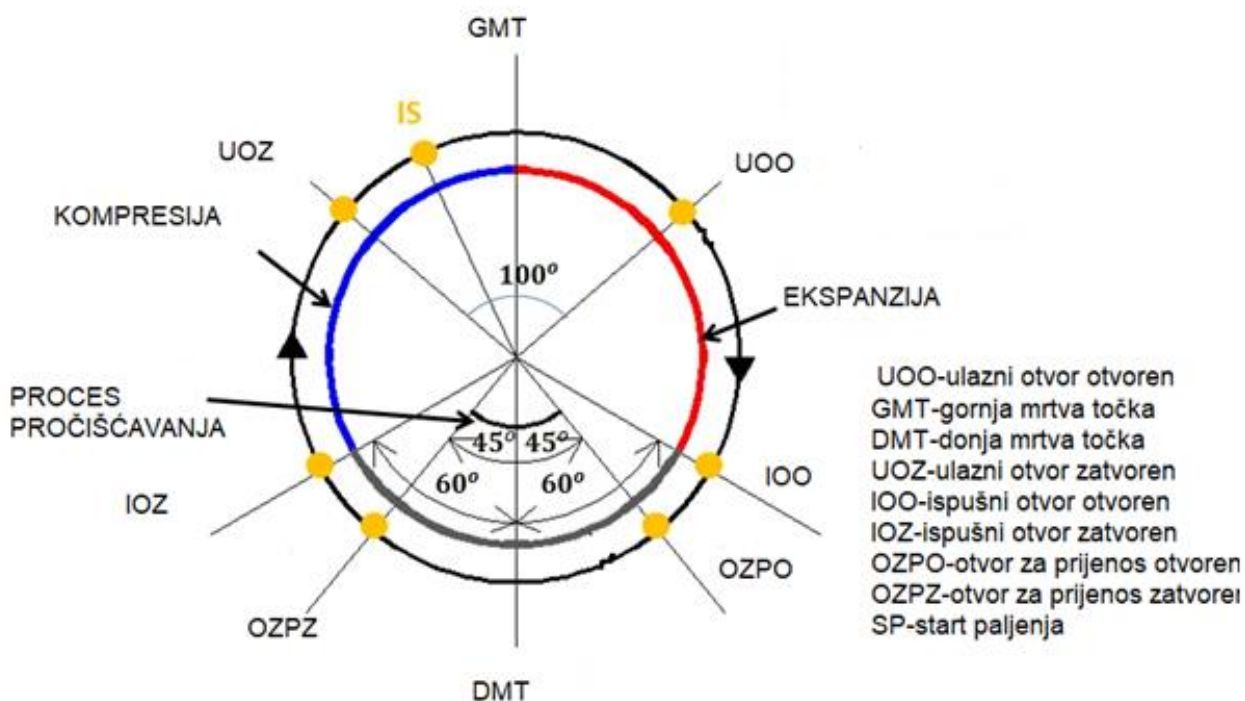
Prednosti dvotaktnih motora:

- manja težina
- Velika snaga u smislu 1 litre radnog volumena
- Jednostavnija i jeftinija za proizvodnju

Mane dvotaktnih motora:

- veća potrošnja goriva

- bučnost. Pri maksimalnom broju okretaja, dvotaktni motori rade nešto glasnije od četverotaktnih motora
- udobnost
- trajnost

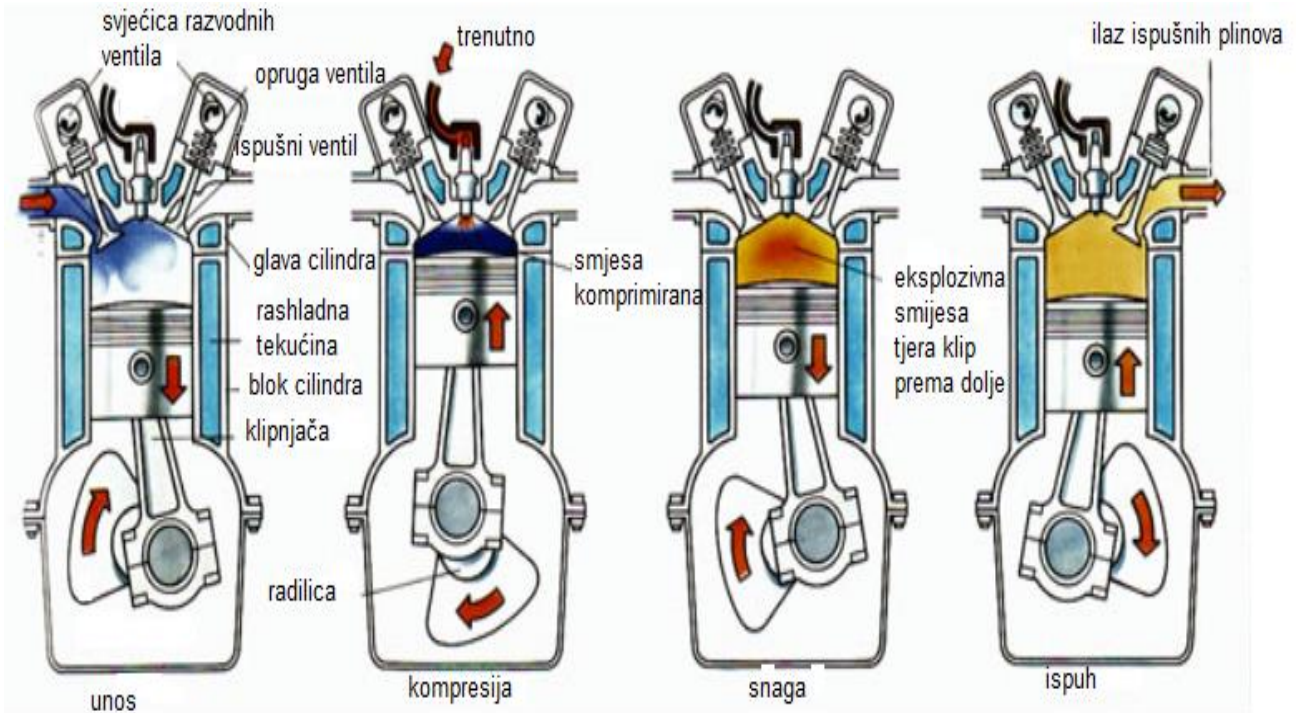


Slika 9 Vremenski dijagram benzinskog motora

### 2.2.2. Četverotaktni benzinski motori

Četverotaktni motor, motor s unutarnjim izgaranjem kojemu ciklus traje četiri takta (takt je vrijeme gibanja od jedne do druge mrtve točke). U prvome taktu klip se giba od gornje mrtve točke (GMT) prema donjoj mrtvoj točki (DMT), volumen cilindra povećava se, usisni je ventil otvoren i usisava se smjesa goriva i zraka u. U drugom taktu klip se kreće od DMT-a do GMT-a, volumen cilindra smanjuje se, ventili su zatvoreni, u cilindru raste tlak i temperatura. Smjesa goriva i zraka zapaljuje se s pomoću električne iskre i izgara. Tijekom izgaranja rastu tlak i temperatura plinova izgaranja. U trećem radnom taktu, ekspanziji, klip se kreće prema DMT-u, volumen se povećava, a tlak i

temperatura se smanjuju. U četvrtom taktu otvara se ispušni ventil, a klip kretanjem od DMT-a do GMT-a istiskuje plinove izgaranja. Tijekom jednoga ciklusa radilica se (koljenasto vratilo) okrene dvaput.[1]



Slika 10 Prikaz rada četverotaktnog motora

### 3.VIBRACIJE MOTORNIH KOSILICA TE NJHOV UTJECAJ NA ČOVJEKA

Kućište mjenjača ili mjenjač nalazi se na dnu pogonskog vratila i prenosi snagu s pogonskog vratila na glavu trimera. Ti se zupčanici s vremenom mogu istrošiti zbog teške uporabe ili nedostatka podmazivanja. Neujednačena vrtnja zupčanika može izazvati izbacivanje iz ravnoteže i urokovati vibriranje trimera. Neugodan zvuk iz mjenjača dobar je pokazatelj ovoga problema.

Kućište za fleksibilno vratilo učvršćuje i podupire osovinu te ju štiti od nečistoća koje bi mogle utjecati njen rad. Ako se kućište ošteti ono vrši pritisak na savitljivu osovinu što

uzrokuje vibracije. Tijekom rada se može čuti i buka na oštećenim mjestu što dodatno ukazuje na taj problem.

Većina trimera ima fleksibilno pogonsko vratilo ugrađeno u kućište vratia, čak i ako je vratilo ravno. Ove fleksibilne osovine mogu početi vibrirati kada se istroše ili kada nisu pravilno podmazane. Vibracije se također javljaju kada je veza između savitljive osovine i glave trimeralabava ili istrošena.

Spojka prenosi snagu motora na pogonsko vratilo . Kada je kvačilo istrošeno i ne aktivira se u potpunosti pri prigušivanju motora, to može uzrokovati vibracije.

U glavi trimera nalazi se kalem od niti, čep i opruga. Prvo što treba provjeriti je dali je glava trimera čvrsto stegnuta. Labava glava trimera uzrokovat će ozbiljne vibracije i na kraju će se odvojiti od trimera.

### **3.1.Jednocilindrični motori**

Jednocilindrični motor je klipni motor s jednim cilindrom. Često se koriste za motocikle, motorne skutere, kartinge, terenska vozila, radio-upravljana vozila, prijenosne alate i vrtne strojeve (poput kosilica, kultivatora i trimera).

Prednosti nad višecilindričnim motorima:

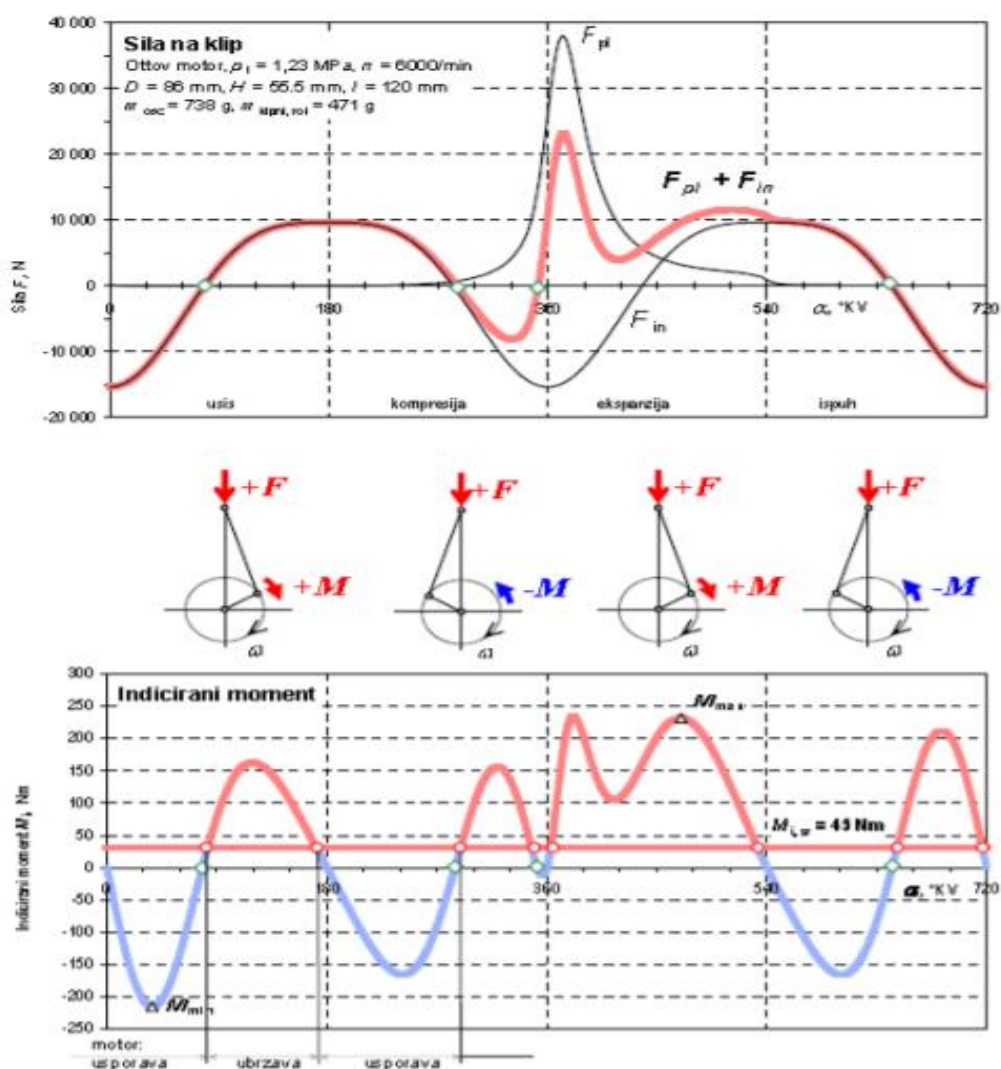
- jednostavniji i kompaktniji
- hlađenje zrakom je učinkovitije za motore s jednim cilindrom od motora s više cilindara

Nedostaci:

- pulsirajuća isporuka snage
- veće vibracije

#### **3.1.1.Uravnoteženje jednocilindričnih motora**

Sile u klipnom mehanizmu izazvane su pritiskom plinova na klip te tromošću, inercijom oscilirajućih i rotirajućih masa. Nejednolika sila plinova u cilindru ima za posljedicu nejednoliki moment motora. S povećanjem broja cilindara smanjuje se neujednačenost rezultirajućeg zakretnog momenta, a postiže se bolja međusobna uravnoteženost inercijskih sila oscilirajućih masa klipnoga mehanizma. Sile plinova i inercije u klipnom mehanizmu okreću koljenasto vratilo ali i opterećuju dijelove motora i stvaraju reakcije u njegovim osloncima. Uravnotežavanjem inercijske sile ne nestaju nego se samo poništava njihovo djelovanje prema van, tj. motor se u osloncima manje tresu.[2]



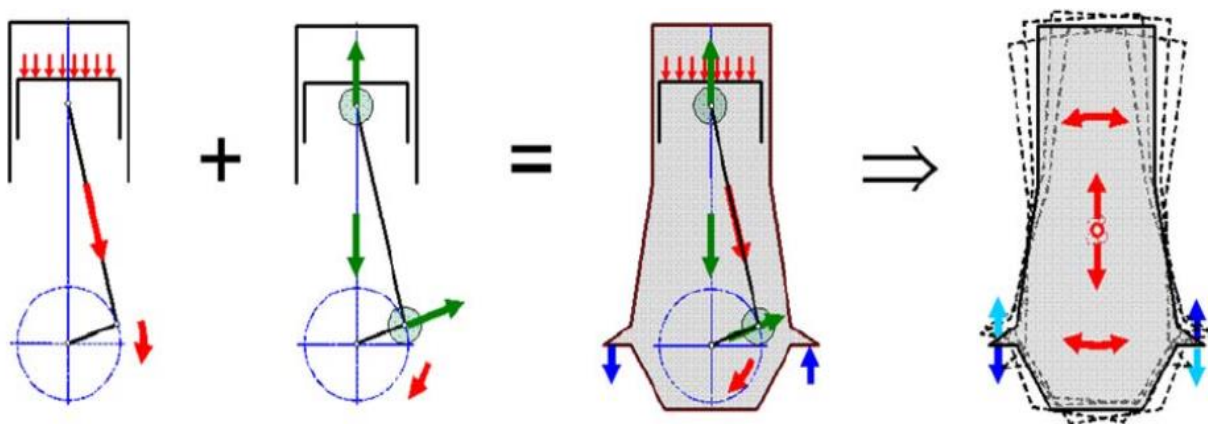
Slika 11 Sila na klip i indicirani moment jednocilindričnog četverotaktnog ottovog motora

Na slici uočavamo da u taktu usisa pozitivna sila  $F$  daje pozitivan moment  $M$ , a u taktu kompresije pozitivna sila  $F$  daje negativan moment  $M$ .

Moment poprima vrijednost nula u dva slučaja:

1. rezultirajuća sila na klip je jednaka nuli ( $F_{pl} + F_{in} = 0$ )
2. u GMT i DMT, tj. kad je kut zakreta koljenastog vratila jednak  $0, \pi, 2\pi, 3\pi..$

Tok grafova jako ovisi o brzini vrtnje motora. Kod brzohodnih motora veći je utjecaj sila inercije  $F_{in}$ .

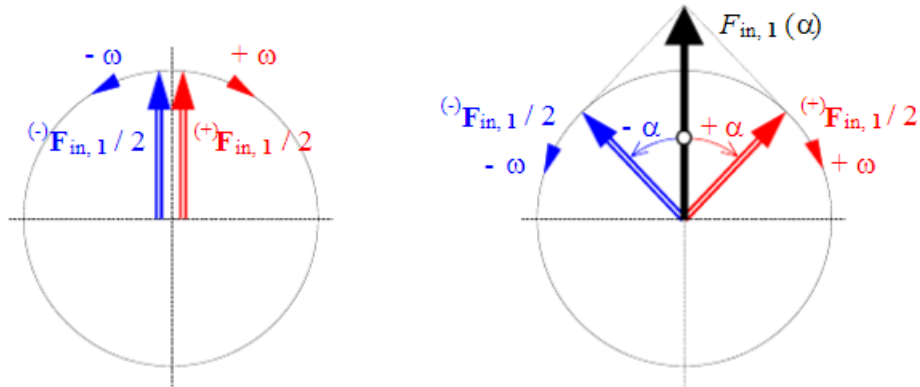


Slika 12 Sile plinova i sile inercije u klipnom mehanizmu

Sile plinova i inercije u klipnom mehanizmu opterećuju dijelove motora i stvaraju reakcije u njegovim osloncima. Sile u klipnom mehanizmu izazvane su pritiskom plinova na klip te inercijom oscilirajućih i rotirajućih masa. Ako je sila plinova u cilindru nejednolika to izaziva ne jednoliki moment motora. Uranoteženjem inercijske sile one ne nestaju nego se samo poništava njihovo djelovanje prema van.

Uravnoteženje sila inercije se može izvesti:

- protutezima na koljenastom vratilu
- parom osovina sa utezima

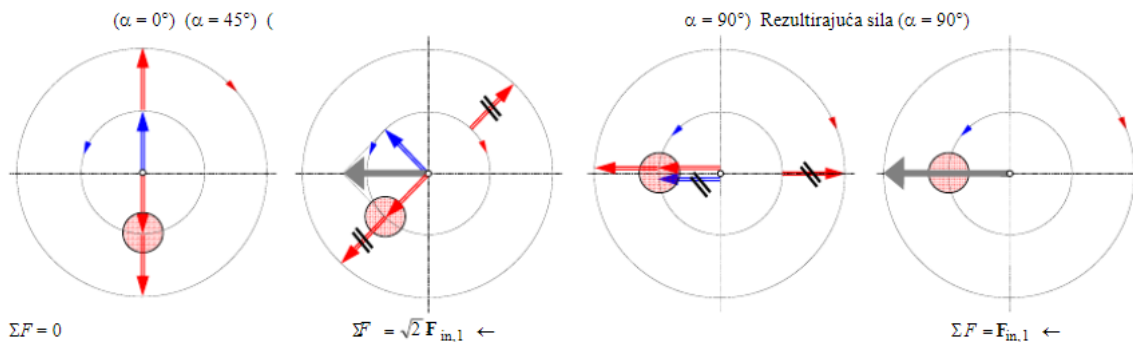


Slika 13 Sila inercije i-toga reda prikazana pomoću dva rotirajuća vektora polovičnih amplituda

### 3.1.2. Uravnoteženje sila inercije oscilirajućih masa

Sile inercije svakog pojedinog reda prikazuju se pomoću dva vektora pomoćnih amplituda koje rotiraju u suprotnim smjerovima. Njihova vektorska suma je u svakom trenutku jednaka sili inercije promatranog reda.

Protutezima na koljenastom vratilu može se uravnotežiti samo onaj vektor koji se okreće u istom smjeru (+ $\omega$ ) kao i koljenasto vratilo, tj. može se uravnotežiti samo 50% sila inercije prvog reda. Za uravnoteženje drugog vektora, u motor treba ugraditi osovinu s utezima koja se okreće jednako brzo kao i koljenasto vratilo, ali u suprotnom smjeru (- $\omega$ ).



Slika 14 Prikaz protutege na koljenastom vratilu

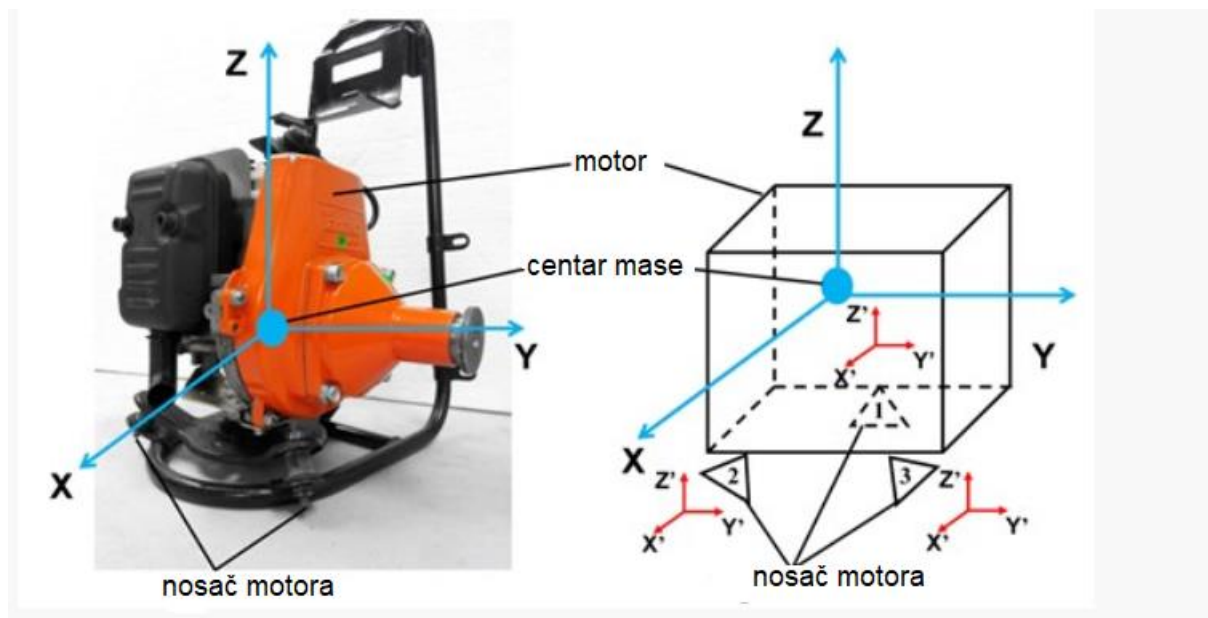


## 4.UBRZANJA I AMPLITUDE NA RUČKAMA

Vibracije na ručkama trimera jedan su od glavnih problema za zdravlje rukovoditelja jer dugotrajna izloženost vibracijama može dovesti do određenih zdravstvenih problema.

Vibracije iz motora i rezne glave se preko cijevi prenose na ručke trimera. Poboljšanje sustava ugradnje motora može smanjiti vibracije koje se prenose s motora na ručke.

Razina vibracija izravno je povezana sa vibracijama motora stoga je potrebno minimizirati vibracije u motoru.



Slika 15 Globalni i lokalni koordinatni sustav motora za trimer

Mjesto ugradnje i orijentacijski kutovi imaju značajan utjecaj na performanse sustava ugradnje motora. Na primjeru ćemo pokazati kako položaj i orijentacijski kutovi nosača utječu na vibracije ručki.

## 4.1. Matematički prikaz

Prvo se mora definirati matematički model za vibracije motora, koji uključuje orijentacijske kutove i mjesto nosača motora. Pretpostavlja se da je motor kruta masa, pri čemu se sve čestice motora kreću istom brzinom. Vibracije krutog okvira motora zanemaruju se jer su zanemarive u usporedbi s vibracijama samog motora. Dinamička svojstva pojedinog nosača motora nazivaju se individualnim svojstvima nosača. Središte mase motora smatra se ishodištem globalnog koordinatnog sustava (slika 12). U tom koordinatnom sustavu X- i Y-osi su paralelne s podom dok je Z-os okomita na nju. Globalni koordinatni sustav označen je kao XYZ a lokalni koordinatni sustav kao X'Y'Z'.

Motori trimera i sustav montaže modelirani su sa šest stupnjeva slobode i predstavljeni su sljedećom jednačinom:

$$[M][X''] + [K(\omega)] = [f] \quad (1)$$

Gdje je [M] matrica krute mase motora

[X''] je translacijski i rotacijski vektor pomaka središta mase

[K(ω)] je modul krutosti

[f] je vektor pobudnih sila i momenata

ω je kutna brzina

Svaki pojedinačni nosač motora povezan je s trodimenzionalnom matricom krutosti [k'(ω)] :

$$\begin{bmatrix} [k_x(\omega)][1 + j\epsilon_x(\omega)] & 0 & 0 \\ 0 & [k_y(\omega)][1 + j\epsilon_y(\omega)] & 0 \\ 0 & 0 & [k_z(\omega)][1 + j\epsilon_z(\omega)] \end{bmatrix} \quad (2)$$

Gdje je  $k_x(\omega)$ ,  $k_y(\omega)$ ,  $k_z(\omega)$  krutost ovisna o frekvenciji

$\epsilon_x(\omega)$ ,  $\epsilon_y(\omega)$ ,  $\epsilon_z(\omega)$  faktor gubitka ovisan o frekvenciji duž tri ortogonalna smijera odgovarajućeg koordinatnog sustava

Ta lokalna složena svojstva krutosti svakog pojedinog nosača motora pretvaraju se u globalnu koordinatu pomoću Eulerove matrice transformacije:

$$\begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ \sin \gamma \cos \beta & \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

Nakon primjene transformacije, dinamička svojstva za svaki pojedini dio nosača u globalnom koordinatnom sustavu postaju:

$$[k(\omega)]_i = [A][k'(\omega)]_i[A]^T = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Gdje  $k_{xx}, k_{xy}, k_{xz}, \dots, k_{zz}$  predstavljaju pojedinačnu krutost nosača duž određene osi u globalnom koordinatnom sustavu

$[A]^T$  je matrica transportiranja za Eulerovu transformacijsku matricu

Dinamička svojstva za cijeli sustav ugradnje motora su suma proizvoda svakog pojedinačnog dinamičkog svojstva u globalnom koordinatnom sustavu s njegovim odgovarajućim vektorom položaja izraženim kao:

$$[K(\omega)] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [k]_i & -\sum_{i=1}^n [k]_i [r]_i \\ \vdots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^n [r]_i^T [k]_i & -\sum_{i=1}^n [r]_i^T [k]_i [r]_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

Gdje je  $[r]_i = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$  matrica položaja svakog nosača motora

Vektor pobudnih sila i njihovih momenata daje:

$$[F]^T = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T$$

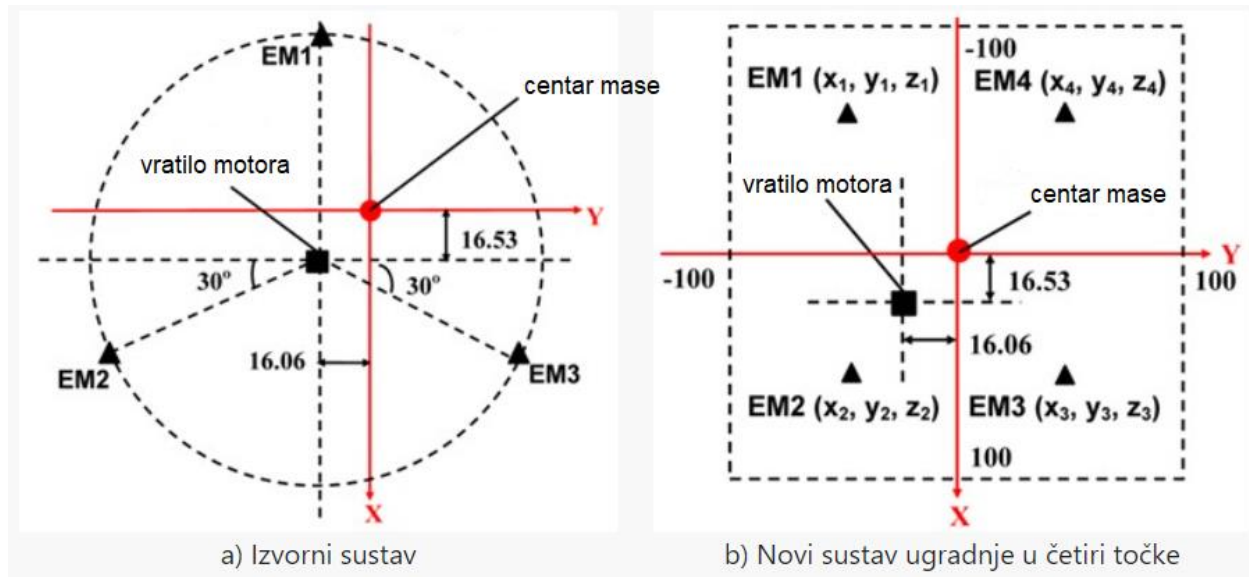
gdje  $F_x, F_y, F_z$  su sile pobude koje djeluju na središte mase motora, dok  $M_x, M_y, M_z$  predstavljaju odgovarajuće momente.

Kutno ubrzanje vibracija ručke i motora glavni su parametri koji određuju učinkovitost sustava u smanjenju vibracija na ručkama.

Ako želimo izmjeriti točan iznos ulaznog ubrzanja motora i prenesenog izlaznog kutnog

ubrzanja ručke koristit ćemo mjerače ubrzanja. Kutne vibracije mjere se neizravno pomoću dva akcelometra koji omogućuju mjerenje relativnog ubrzanja na dva mjesta.

Ova metoda minimiziranja vibracijskog odziva ručke koristi se kako bi se postigla



minimalna prijenosnost kutnog ubrzanja oko osi vrtnje motora.

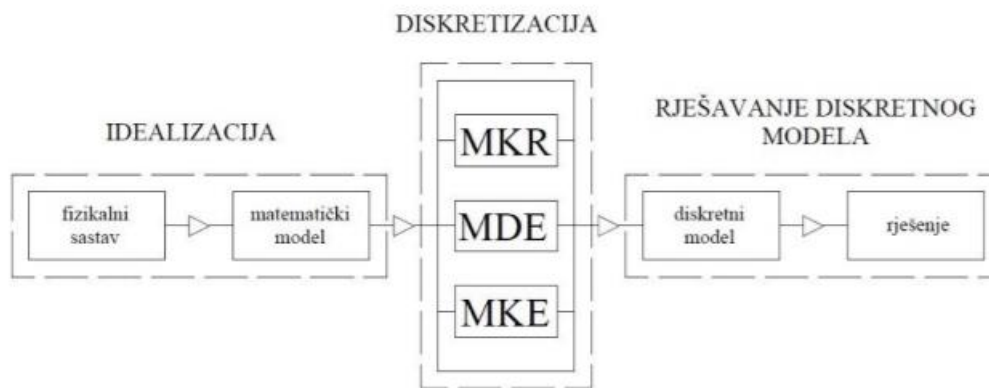
Slika 16 Raspored sustava za montažu motora

Slika 15 a) prikazuje izvorni raspored ugradnje. Tri jedinice nosača motora korištene u ovoj studiji označene su sa EM1, EM2, EM3. Nosači su ugrađeni pod kutom od 120°.

Za poboljšani dizajn odabran je sustav ugradnje u 4 točke. Mijesta na kojima će biti te točke definiraju se na temelju dostupnog prostora. Svaki nosač motora izložen je istim ograničenjima orijentacije od -90° do 90° za svaki orijentacijski kut. Optimalni orijentacijski kutevi i mjesta ugradnje svakog pojedinačnog nosača dobivaju se na temelju minimalnog kutnog ubrzanja u osi vrtnje, što rezultira smanjenjem vibracija na ručkama za čak 70%. [3]

## 5. NUMERIČKE METODE PRORAČUNA VIBRACIJSKOG PONAŠANJA

Numeričke metode je zajednički naziv za postupke numeričkog rješavanja matematičkih modela realnih fizikalnih pojava odnosno inženjerskih problema. Numeričkim postupcima proračuna dobivamo približna rješenja matematičkih modela opisanih pomoću diferencijalnih jednadžbi. Numeričke metode su jeftinije te omogućavaju brže dobivanje rezultata, što ne znači da se eksperimentalna istraživanja ne koriste jer podaci dobiveni eksperimentom služe kao ulazne vrijednosti za numeričke proračune.



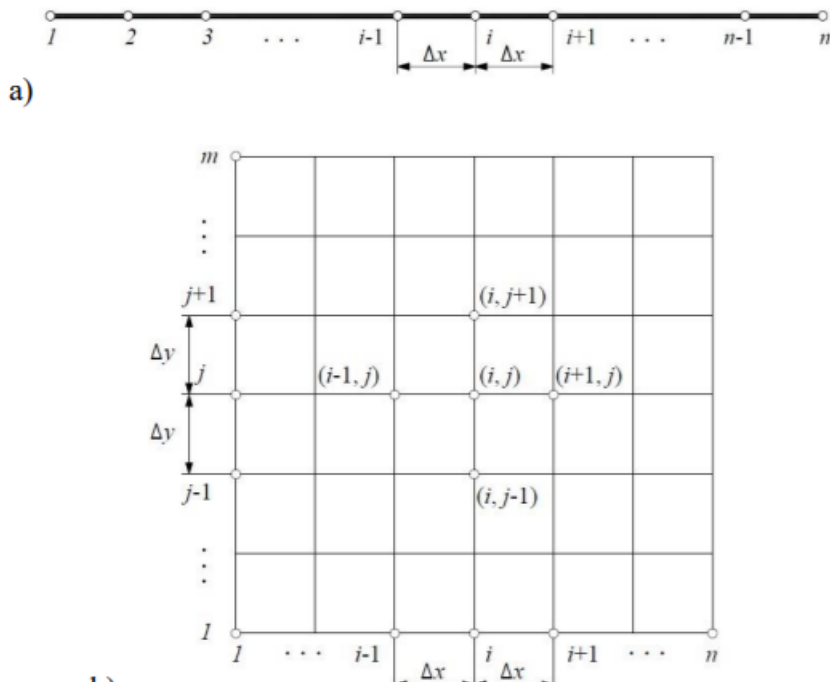
Slika 17 Shematski prikaz rješavanja inženjerskih problema

Postoje tri glavne faze u postupku rješavanja inženjerskih rješenja prilikom primjene numeričkih metoda, to su: idealizacija ili matematičko modeliranje, diskretizacija matematičkog modela i rješavanje sustava diskretiziranih jednadžbi.

Opisivanje fizikalnog sustava odgovarajućim matematičkim modelom naziva se idealizacijom ili matematičkim modeliranjem. Diskretizacija je postupak kojim se kontinuirani sustav zamjenjuje diskretnim sustavom koji se opisuje s konačnim brojem nepoznatih varijabli. Razlikuje se diskretizacija područja i diskretizacija jednadžbi. Diskretizacijske metode koje se primjenjuju su metoda konačnih razlika, koja je ujedno i najstarija, zatim metoda diskretnih elemenata, metoda konačnih elemenata te mnoge druge.

## 5.1. Metoda konačnih razlika

Ovom metodom numeričko rješenje diferencijalnih jednačbi dobiva se u odabranim točkama razmatranog modela konstrukcije, pri čemu se diferencijalna jednačba zapisuje kao diskretizirana s derivacijama aproksimiranim konačnim razlikama. Točke modela čine mrežu konačnih razlika te se nazivaju čvorovima. Za svaki čvor dobiva se algebarska diferencijalna jednačba koja povezuje nepoznatu vrijednost u čvoru s vrijednostima te varijable u odgovarajućem broju susjednih čvorova. Red derivacije diferencijalne jednačbe određuje broj obuhvaćenih čvorova. Tim načinom dobiva se sustav linearnih algebarskih jednačbi čiji je broj jednak broju čvorova, tj. nepoznanica. Čvorovi koji se nalaze duž ruba s poznatim vrijednostima predstavljaju rubne uvjete i za njih nije potrebno postavljati jednačbe. Ako su u rubnim uvjetima uključene derivacije, potrebno je provesti njihovu diskretizaciju. Čvorovima na kojima se izvode diskretizirana jednačba su pridruženi indeksi koji se povećavaju, tj. smanjuju u susjednim čvorovima.[4]



Slika 18 Raspored čvorova: a) jednodimenzijski, b) dvodimenzijski

## 5.2. Metoda diskretnih elemenata

Metoda diskretnih elemenata, skraćeno MDE, je skup numeričkih postupaka koji su potrebni za simuliranje ponašanja sustava međusobno ovisnih diskretnih elemenata. Tom metodom se modeliraju geometrijski diskontinuumi čija svojstva ovise o rasporedu i vezama između čestica. Također, ovom metodom se ponekad modeliraju i modeli materijala koji su kontinuum, tj. oni materijali kojima su fizikalna svojstva nepromjenjiva. Naime, tada se procjenjuju lokalne pojave u materijalu (poput pukotina), a o kojima ovisi struktura materijala. Također mogu se provjeravati i međučestične veze, tj. kohezija. Tijela diskretnog sustava mogu biti različitih veličina, oblika i hrapavost površine, a unutrašnjost im može sadržavati pukotine i šupljine. Geometrijske karakteristike čestica uvjetuju njeno gibanje, oblik dodirne plohe i raspodjelu kontaktnih sila po njenoj površini prilikom dodira sa drugim tijelom ili podlogom.

Metoda diskretnih elemenata se primjenjuje u znanstvenim područjima poput medicine, meteorologije, biologije, rudarstva, itd.

U odnosu na metodu konačnih elemenata, postoje i neke razlike:

- položaj elemenata nije unaprijed poznat, kao niti njihov konačni broj koji će se upotrijebiti u proračunu
- pomaci i rotacije diskretnih elemenata mogu biti neograničeni
- element iza vrijeme proračuna mogu biti bez dodira sa susjedima
- za upotrebljive rezultate treba veliki broj diskretnih elemenata
- za proračun je potrebno poznavati geometrijski oblik i materijalne značajke pojedine čestice [4]

## 5.3. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Drugim riječima, područje kontinuuma dijeli se na konačan

broj podpodručja koja se nazivaju konačni elementi, pa se razmatrani kontinuum prikazuje kao mreža konačnih elemenata. Konačni elementi međusobno su povezani u točkama na konturi elementa koje se nazivaju čvorovi. Uz pravilnu formulaciju konačnih elemenata, približavanje točnom rješenju raste s povećanjem broja elemenata. Prilikom izvođenja algebarskih jednadžbi polazi se od definicije jednadžbi koje opisuju stanje u elementu ili se rabi varijacijska formulacija. Nakon izvođenja jednadžbi za konačni element, gdje su nepoznanice neovisne varijable u čvorovima, odgovarajućim postupcima izvode se globalne jednadžbe za diskretizirani model. Pomoću izračunatih čvornih veličina moguće je, primjenom poznatih teorijskih relacija, odrediti sve veličine potrebne za analizu opisanoga kontinuiranog sustava. Metoda konačnih elemenata ne bi se mogla primjenjivati bez današnjih računala koja omogućavaju rješavanje velikih sustava jednadžbi čije je rješavanje neophodno prilikom primjene metode konačnih elemenata.

Postoje jednodimenzijski, dvodimenzijski i trodimenzijski konačni elementi, te pločasti i ljuskasti konačni elementi. Najjednostavniji konačni element je jednodimenzijski element, tj. štap s dva čvora i s linearnom interpolacijom.[4]

Metoda konačnih elemenata sastoji se od pet koraka:

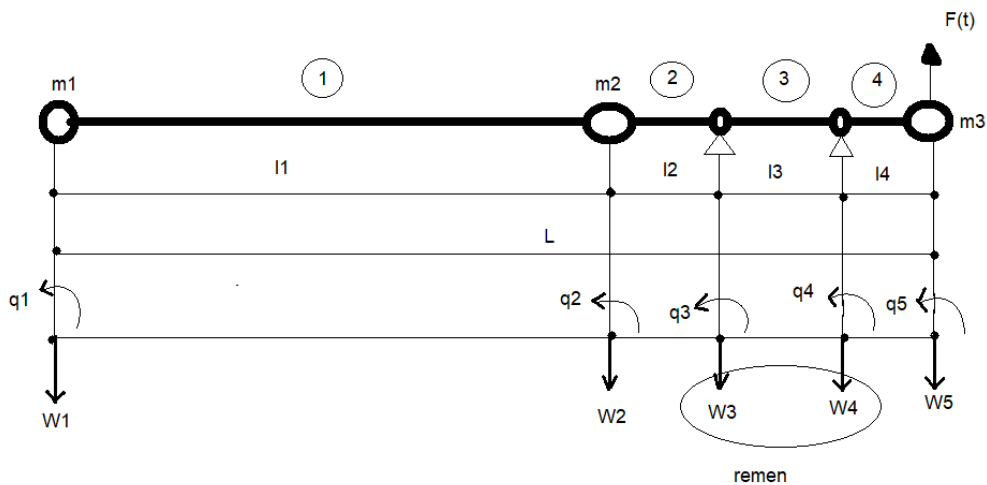
- 1) predprocesiranje – problem se dijeli na konačne elemente (diskretizacija proračunskih modela)
- 2) formuliranje elementa – razvoj jednadžbe za elemente (formuliranje lokalne matrice krutosti elemenata)
- 3) sastavljanje (assembly) – dobivanje jednadžbi za cijeli sustav iz jednadžbi za pojedine elemente (tvorba globalnog sustava jednadžbi)
- 4) rješavanje jednadžbi
- 5) postprocesiranje – određivanje rezultata, dobivanje vizualizacije [5]

U našem primeru koristit ćemo baš metodu konačnih elemenata.



### 5.3.1. Osnovni gredni element

Osnovni gredni element najjednostavniji jednodimenzijski element, te ima dva čvora i koristi se za rješavanje problema savijanja. Prvi korak kod rješavanja MKE je prepoznavanje pojedinačnih elemenata koji čine strukturu, te rubnih točaka koje međusobno povezuju elemente. Zatim se svaki element analizira pojedinačno kako bi se razvila matrica krutosti elemenata. Ovaj element ima četiri stupnja slobode i to su pomaci u čvorovima u smjeru osi  $z$  te kutevi zakreta u čvorovima oko osi  $y$ .



Slika 19 Skica 4 osnovna gredna konačna elementa

Slika 19 prikazuje skicu kako smo podijelili naš štap na konačne elemente.

Određivanje matrica krutosti i mase

Prvo se postavljaju jedinični pomaci s obzirom na djelovanje jediničnih sila.

Za svaki se element definira lokalni koordinatni sustav, čija se lokalna os  $x$  pruža od početnog čvora i prema krajnjem čvoru. Orijentacija lokalnog koordinatnog sustava mora

biti ista kao i orijentacija globalnog koordinatnog sustava. Za svaki štapni element ravninskog okvira nepoznato je 6 pomaka i to dvije translacije i jedna rotacija na početku i na kraju štapa. Ukupan broj nepoznanica cijelog sistema jednak je broju nepoznatih komponenti pomaka svakog čvora.

Za grede, polje pomaka unutar elementa šipke aproksimira se kubikom polinoma:

$$w(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (6)$$

Jednadžba (6) može biti zapisana kao:

$$w(x) = \{1 \ x \ x^2 \ x^3\} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Vektor nodalnih stupnjeva slobodetada se izražava kao:

$$\{\delta^e\} = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (8)$$

Gdje je

$$\theta = \partial w / \partial x \quad (9)$$

Zamijenom dobijamo vrijednosti stupnjeva slobode svakog čvora

$$\begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = [A]^{-1} \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (11)$$

Zamijenom (11) u (7) dobijamo

$$w(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3][A]^{-1} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Koja je napisana kao

$$w(x) = \{N(x)\}\{\delta^e\} \quad (13)$$

$\{N(x)\}$  je vektor interpolacijske funkcije funkcija oblika za elemente grede.

Energija naprezanja grednog elementa izražava se :

$$U = 1/2 \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (14)$$

Umetanjem funkcije oblika, kako je opisano u jednađzbi (13)

$$U = 1/2 EI \int_0^L \{N_{xx}\}^T \{N_{xx}\} dx \{\delta^e\} \quad (15)$$

Gdje je

$$\{N_{xx}\} = \left\{ \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \right\} \quad (16)$$

Energija naprezanja grednog elementa može biti zapisana kao:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} \quad (17)$$

Gdje je  $[K^e]_{4 \times 4}$  matrica krutosti dana izrazom:

$$[K^e] = EI \int_0^L \{N_{xx}\}^T \{N_{xx}\} dx \quad (18)$$

Izvođenje gornjih izračuna daje:

$$[K^e] = EI/L^2 \begin{bmatrix} 12/L & 6 & -12/L & 6 \\ & 4L & -6 & 2L \\ & & 12/L & -6 \\ & & & 4L \end{bmatrix} \quad (19)$$

Jednađzba (19) je jednađzba za izračun matrice krutosti za jednoliki element grede.

Kinetička energija grednog elementa izražava se:

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L w^2 dx \quad (20)$$

Umetanjem funkcije oblika koje je određeno jednadžbom (13) daje:

$$T = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \rho A \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (21)$$

Koja se isto može zapisati kao:

$$T = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [M^e] \{\delta^e\} \quad (22)$$

Gdje je  $[M^e]_{4 \times 4}$  matrica mase dana izrazom:

$$[M^e] = \rho A \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (23)$$

Izvođenje gornjih izračuna daje:

$$[M^e] = \rho A L \begin{bmatrix} 13/35 & 11L/210 & 9/70 & -13L/420 \\ & L^2/105 & 13L/420 & -L^2/140 \\ & & 13/35 & -11L/120 \\ & & & L^2/105 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Jednadžba (24) je jednadžba za izračun matrice mase za jednoliki element grede.

Raspodijeljena masa konstrukcije koncentrira se tj. lokalizira u predefinirane čvorove – mjesta u kojima su definirani stupnjevi slobode.

Matrica koncentriranih masa je najčešće dijagonalna (s obzirom da se najčešće uzimaju u obzir inercijski učinci samo usljed translacijskih stupnjeva slobode).[6]

Uvođenje rubnih uvjeta

Postoje prirodni i geometrijski rubni uvjeti. Ako model rješavamo metodom pomaka, prirodni se rubni uvjeti zadaju kao poznato opterećenje i nepoznate reakcije u obliku

koncentriranih sila u čvorovima na rubu modela. Geometrijski su rubni uvjeti zadani poznatim vrijednostima pomaka ili kutova zaokreta u čvorovima ruba, dok pomake treba odrediti.

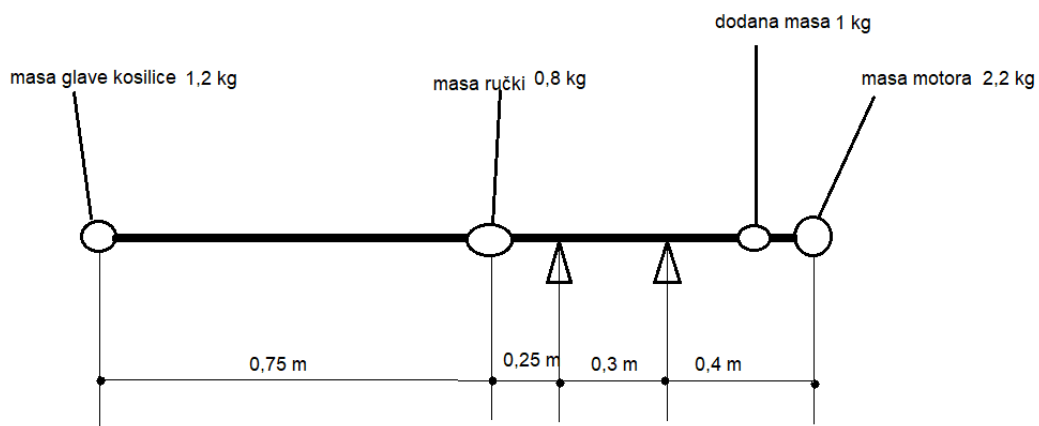
Ako iz matrice krutosti modela izostavimo prvi i zadnji redak i stupac dobivamo matrice koje odgovaraju matricama iznad. Pri tome moramo izostaviti i prvi i posljednji član vektora opterećenja. Tu se radi o stupnjevima slobode ležajnih čvorova. Poznate su komponente pomaka unaprijed zadane i najčeće su jednake nuli.

Prvi redak definira uvjet ravnoteže prvoga čvora u vertikalnom smjeru. Međutim, taj uvjet nije potrebno postavljati jer se bilo kakvo djelovanje na ležajni čvor mora direktno uravnotežiti s reakcijama u tome čvoru.[7]

## 6.PRORAČUN UTJECAJA DODANIH KONCENTRIRANIH MASA NA UBRZANJA I AMPLITUDU NA RUČKAMA

Pomoću metode konačnih elemenata pokušat ćemo prikazati kako dodavanje utega utječe na smanjenje vibracija na trimeru.

Za proračun ćemo uzeti podatke od trimera FX-4MS315 koji je četverotaktni benzinski motor snage 1,1kW



Slika 20 Skica štapa te duljine i mase na štapu

Podaci potrebni za izračun:

$$E= 200000000000 \text{ N/m}^2\text{- modul elastičnosti}$$

$$D1= 0,025\text{m – vanjski promjer cijevi}$$

$$s1=0,0015\text{m – debljina stjenke}$$

$$d1= D1-2*s1 – unutarnji promjer cijevi$$

$$\text{Moment tromosti - } I_y = \pi/64(D1^4 - d1^4)= 0,0000000076757 \text{ m}^4$$

$$A= \pi/4(D1^2 - d1^2) =0,00011074 \text{ m}^2$$

$$\rho= 2700 \text{ kg/m}^3\text{- gustoća}$$

Prema jednađbama (19) i (24) izrađunavamo matrice krutosti i mase te dobijemo:

$$K1 = \begin{bmatrix} 43666,46237 & 16374,92339 & -43666,46237 & 16374,92339 \\ 16374,92339 & 8187,461694 & -16374,92339 & 4093,730847 \\ -43666,46237 & -16374,92339 & 43666,46237 & -16374,92339 \\ 16374,92339 & 4093,730847 & -16374,92339 & 8187,461694 \end{bmatrix}$$

$$K2 = \begin{bmatrix} 1178994,484 & 147374,3105 & -1178994,484 & 147374,3105 \\ 147374,3105 & 24562,38508 & -147374,3105 & 12281,19254 \\ -1178994,484 & -147374,3105 & 1178994,484 & -147374,3105 \\ 147374,3105 & 12281,19254 & -147374,3105 & 24562,38508 \end{bmatrix}$$

$$K3 = \begin{bmatrix} 682288,4745 & 102343,2712 & -682288,4745 & 102343,2712 \\ 102343,2712 & 20468,65424 & -102343,2712 & 10234,32712 \\ -682288,4745 & -102343,2712 & 682288,4745 & -102343,2712 \\ 102343,2712 & 10234,32712 & -102343,2712 & 20468,65424 \end{bmatrix}$$

$$K4 = \begin{bmatrix} 287840,4502 & 57568,09004 & -287840,4502 & 57568,09004 \\ 57568,09004 & 15351,49068 & -57568,09004 & 7675,745338 \\ -287840,4502 & -57568,09004 & 287840,4502 & -57568,09004 \\ 57568,09004 & 7675,745338 & -57568,09004 & 15351,49068 \end{bmatrix}$$

$$M1 = \begin{bmatrix} 0,083293158 & 0,008809853 & 0,028832247 & -0,005205822 \\ 0,008809853 & 0,001201344 & 0,005205822 & 0,000901008 \\ 0,028832247 & 0,005205822 & 0,083293158 & -0,008809853 \\ -0,005205822 & 0,000901008 & -0,008809853 & 0,001201344 \end{bmatrix}$$

$$M2 = \begin{bmatrix} 0,027764386 & 0,000978873 & 0,009610749 & -0,000578425 \\ 0,000978873 & 4,44942E - 05 & 0,000578425 & 3,33707E - 05 \\ 0,009610749 & 0,000578425 & 0,027764386 & -0,000978873 \\ -0,000578425 & 3,33707E - 05 & -0,000978873 & 4,44942E - 05 \end{bmatrix}$$

$$M3 = \begin{bmatrix} 0,033317263 & 0,001409577 & 0,011532899 & -0,000832932 \\ 0,001409577 & 7,6886E - 05 & 0,000832932 & 5,76645E - 05 \\ 0,011532899 & 0,000832932 & 0,033317263 & -0,001409577 \\ -0,000832932 & 5,76645E - 05 & -0,001409577 & 7,6886E - 05 \end{bmatrix}$$

$$M4 = \begin{bmatrix} 0,044423018 & 0,002505914 & 0,015377198 & -0,001480767 \\ 0,002505914 & 0,000182248 & 0,001480767 & 0,000136686 \\ 0,015377198 & 0,001480767 & 0,044423018 & -0,002505914 \\ -0,001480767 & 0,000136686 & -0,002505914 & 0,000182248 \end{bmatrix}$$

Izračun globalne matrice krutosti i mase

Svaku matricu krutosti elementa povećamo tako da broj nepoznanica odgovara broju stupnjeva slobode našeg modela. Jednostavno, umetnemo dovoljan broj redaka i stupaca ispunjenih nulama na mjestima onih stupnjeva slobode koji ne pripadaju promatranom štapu.

Stupnjevi slobode( w i j u čvorovima) se za čvor 2 elementa 1 poklapaju sa stupnjevima slobode čvora 1 elementa 2.

Članovi matrica krutosti štapova koji pripadaju istome čvoru se, a svi ostali članovi koji nisu međusobno spojeni se ne pribrajaju.

Kao što je vidljivo u našem primjeru na koji način se zbrajaju matrice i kako se dobije globalna matrica krutosti.



w <sub>1</sub>	φ <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	φ <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>	φ <sub>3</sub>	w <sub>4</sub>	φ <sub>4</sub>	w <sub>5</sub>	φ <sub>5</sub>
43666,46	16374,92	-43666,462	16374,92339	0	0	0	0	0	0
16374,92	8187,462	-16374,923	4093,730847	0	0	0	0	0	0
-43666,46	-16374,9	1222660,95	130999,3871	-1178994,5	147374,3	0	0	0	0
16374,92	4093,731	130999,387	32749,84678	-147374,31	12281,19	0	0	0	0
0	0	-1178994,5	-147374,3105	1861283	-45031	-682288	102343,3	0	0
0	0	147374,31	12281,19254	-45031,039	45031,04	-102343	10234,33	0	0
0	0	0	0	-682288,47	-102343	970128,9	-44775,2	-287840	57568,09004
0	0	0	0	102343,27	10234,33	-44775,2	35820,14	-57568,1	7675,745338
0	0	0	0	0	0	-287840	-57568,1	287840,5	-57568,09004
0	0	0	0	0	0	57568,09	7675,745	-57568,1	15351,49068



w <sub>1</sub>	φ <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	φ <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>	φ <sub>3</sub>	w <sub>4</sub>	φ <sub>4</sub>	w <sub>5</sub>	φ <sub>5</sub>
<b>1,283293158</b>	0,00881	0,028832	-0,00521	0	0	0	0	0	0
0,008809853	0,001201	0,005206	0,000901	0	0	0	0	0	0
0,028832247	0,005206	<b>0,883293</b>	0,018955	0,0009789	0,009611	0	0	0	0
-0,005205822	0,000901	-0,00881	0,00218	4,449E-05	0,000578	0	0	0	0
0	0	0	0,009611	0,0338957	0,029174	0,011533	-0,00083	0	0
0	0	0	-0,00058	0,0014429	-0,0009	0,000833	5,77E-05	0	0
0	0	0	0	0,0115329	0,000833	0,033317	0,043013	0,002506	0,015377
0	0	0	0	-0,000833	5,77E-05	-0,00141	0,002583	0,000182	0,001481
0	0	0	0	0	0	0	0,015377	<b>2,201481</b>	0,044423
0	0	0	0	0	0	0	-0,00148	0,000137	-0,00251

## Uvođenje rubnih uvjeta

Kao što smo prethodno objasnili iz matrice modela krutosti izostavimo prvi i zadnji redak i stupac te dobijemo slijedeće

43666,46237	16374,92339	-43666,46237	16374,92339	0	0	0	0
16374,92339	8187,461694	-16374,92339	4093,730847	0	0	0	0
-43666,46237	-16374,92339	1222660,946	130999,3871	147374,3105	0	0	0
16374,92339	4093,730847	130999,3871	32749,84678	12281,19254	0	0	0
0	0	147374,3105	12281,19254	45031,03932	10234,32712	0	0
0	0	0	0	10234,32712	35820,14491	-57568,09004	7675,745338
0	0	0	0	0	-57568,09004	287840,4502	-57568,09004
0	0	0	0	0	7675,745338	-57568,09004	15351,49068

1,283293158	0,008809853	0,028832247	-0,005205822	0	0	0	0
0,008809853	0,001201344	0,005205822	0,000901008	0	0	0	0
0,028832247	0,005205822	<b>0,883293158</b>	0,018954533	0,009610749	0	0	0
-0,005205822	0,000901008	-0,008809853	0,002180216	0,000578425	0	0	0
0	0	0	-0,000578425	-0,000901987	5,76645E - 05	0	0
0	0	0	0	5,76645E - 05	0,0025828	0,000182248	0,001480767
0	0	0	0	0	0,015377198	2,201480767	0,044423018
0	0	0	0	0	-0,001480767	0,000136686	-0,002505914

## Računanje prisilnih vibracija

Brzina vrtnje motora:  $8000 \text{ min}^{-1}$

$\omega = 104,7197551 \text{ rad/s}$

Masa klipa i dio mase klipnjače:  $m_{kl} = 0,25 \text{ kg}$

Najveće ubrzanje klipa:  $a_{kl} = 219,3245422 \text{ m/s}^2$

Radius putanje koljenastog vratila:  $r_{kv} = 0,02 \text{ m}$

Amplituda inercijske sile  $F_{amp} = m_{kl} * a_{kl} = 54,83113556 \text{ N}$

Temeljna jednažba za izračun pomaka:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{F}$$

Prema toj formuli dobijamo rezultate u matrici tako da za K i M uzimamo brojeve iz matrice nakon zadavanja rubnih uvijeta pomaka.

Zatim dobijemo:

29593,57814	16278,313	-43982,6	16432,01162	0	0	0	0	<b>F</b>
16278,31254	8174,2875	-16432	4083,850192	0	0	0	0	0
-43982,64334	-16432,012	1196525	130791,5274	147268,9	0	0	0	0
16432,01162	4083,8502	131096	32725,93803	12274,85	0	0	0	0
0	0	147374,3	12287,53568	45040,93	10233,69	0	0	0
0	0	0	0	10233,69	35791,82	-57570,08861	7659,506908	0
0	0	0	0	0	-57736,7	263698,5121	-58055,24294	0
0	0	0	0	0	7691,984	-57569,58897	15378,9711	54,83114
								0

polje1

Nakon toga napravimo inverz matrice:

-9,01641E-05	0,000117403	-1,29665E-05	7,22285E-05	2,72058E-05	-1,97778E-05	-1,23242E-05	-3,66731E-05
0,000117446	2,88495E-05	3,03814E-05	-0,000158776	-6,71595E-05	4,8823E-05	3,04231E-05	9,05302E-05
-1,2934E-05	3,03111E-05	1,7684E-06	-2,00042E-06	-6,27307E-06	4,56034E-06	2,84169E-06	8,45602E-06
7,22726E-05	-0,000158886	-2,01149E-06	2,18552E-05	7,43619E-07	-5,40589E-07	-3,36858E-07	-1,00239E-06
2,70758E-05	-6,68793E-05	-6,27373E-06	6,9849E-07	5,09384E-05	-3,70307E-05	-2,3075E-05	-6,86644E-05
-1,96833E-05	4,86193E-05	4,56082E-06	-5,07782E-07	-3,70307E-05	9,79573E-05	6,10402E-05	0,000181638
-1,21813E-05	3,00888E-05	2,82253E-06	-3,14248E-07	-2,2917E-05	6,06223E-05	5,93391E-05	0,000193811
-3,57546E-05	8,83167E-05	8,2847E-06	-9,22383E-07	-6,72661E-05	0,000177939	0,0001916	0,000699686

Polje 2

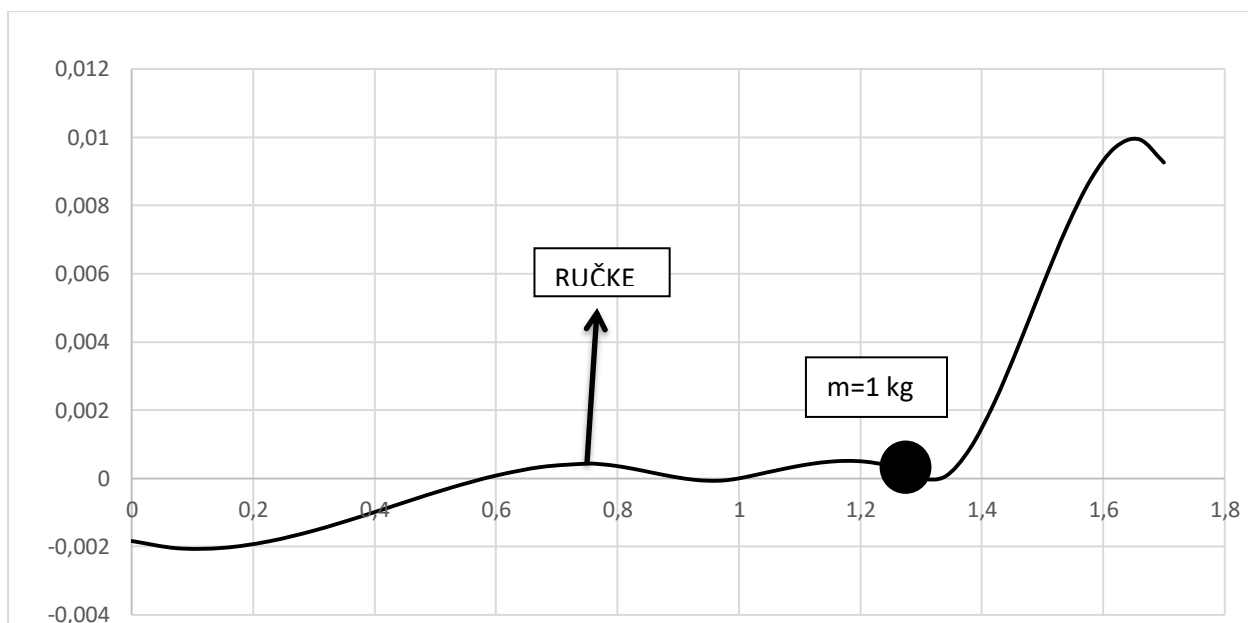
Zatim pomoću funkcije u Excelu MMULT koja nam vraća matični proizvod dvaju polja. Rezultat je polje sa istim brojem redaka kao polje1 i istim brojem stupaca kao polje2.

Rezultat:

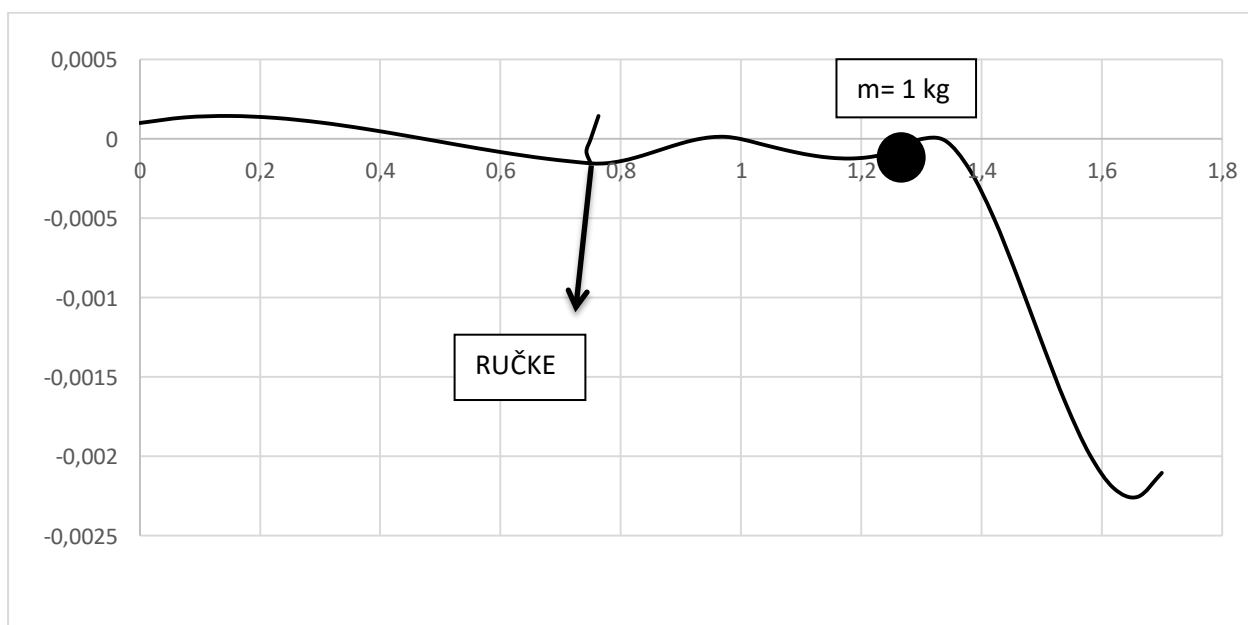
-0,00183=  $w_1$   
 0,004541=  $\varphi_1$   
 0,000432=  $w_2$   
 -3,8E-05=  $\varphi_2$   
 -0,00356=  $\varphi_3$   
 0,009512=  $\varphi_4$   
 0,009258=  $w_5$   
 0,029899=  $\varphi_5$

Računanje pomaka svakog pojedinog elementa:

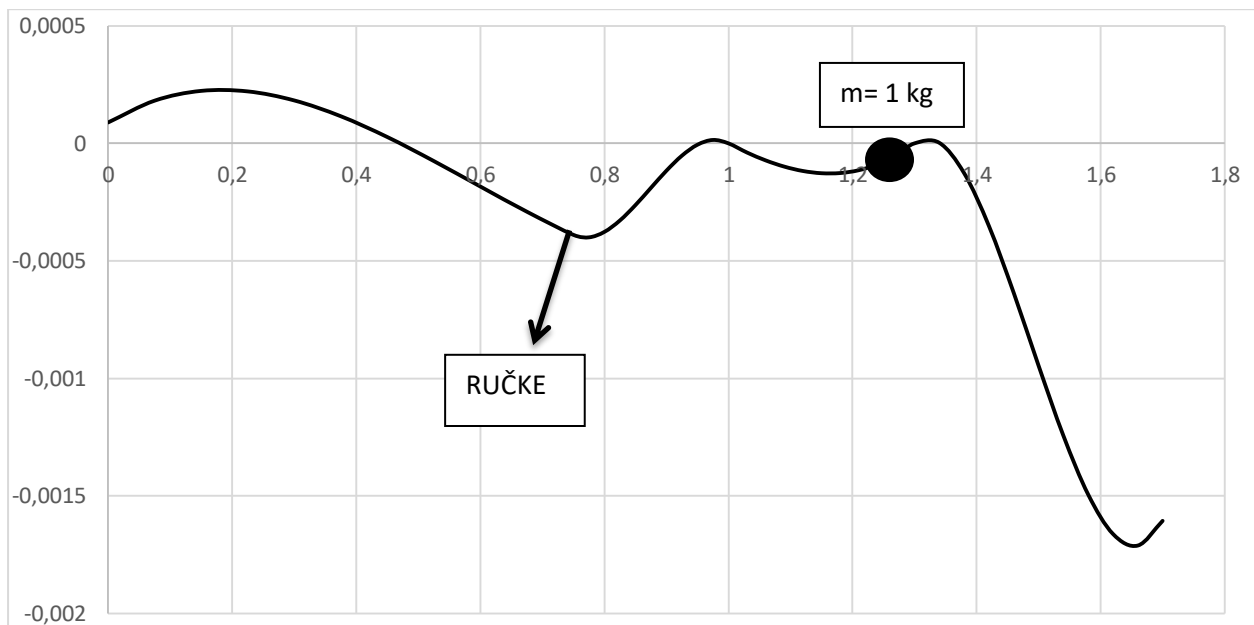
	v1				
KE 1	-			-	
x	N1	N2	N3	N4	w
0	1	0	0	0	0,000205352
0,075	0,972	-0,06075	0,028	0,00675	0,000497087
0,15	0,896	-0,096	0,104	0,024	0,000644283
0,225	0,784	-0,11025	0,216	0,04725	0,000665902
0,3	0,648	-0,108	0,352	0,072	0,000580904
0,375	0,5	-0,09375	0,5	0,09375	0,000408249
0,45	0,352	-0,072	0,648	0,108	0,000166899
0,525	0,216	-0,04725	0,784	0,11025	0,000124188
0,6	0,104	-0,024	0,896	0,096	0,000446049
0,675	0,028	-0,00675	0,972	0,06075	0,000779726
0,75	0	0	1	0	0,001106256



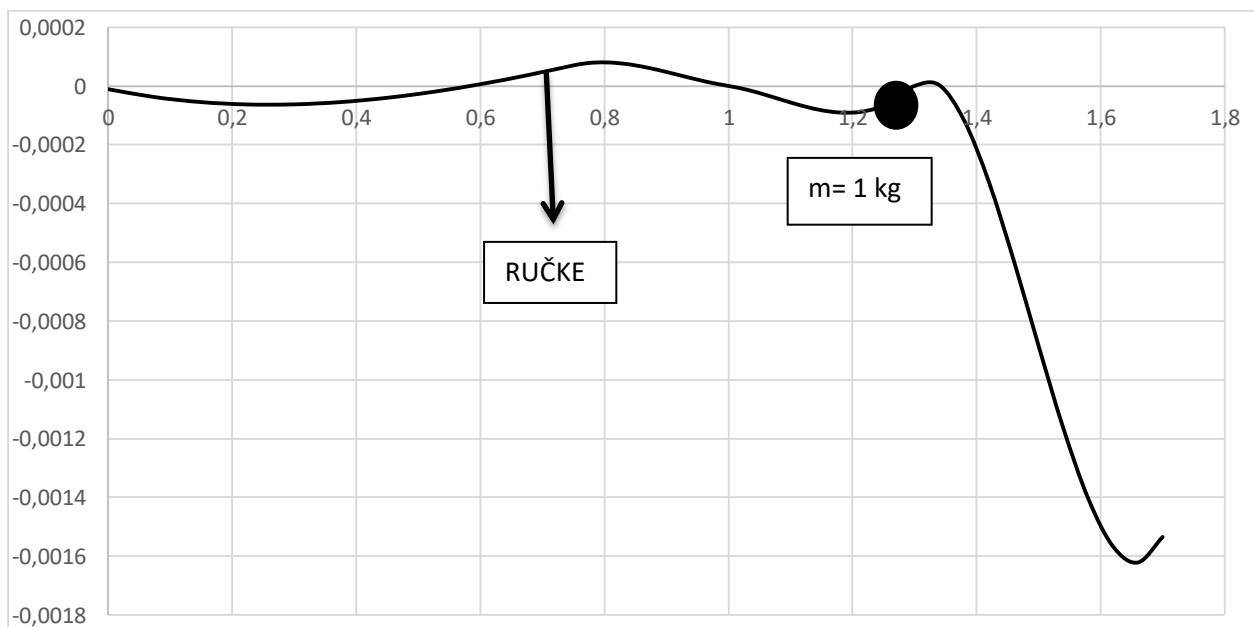
Slika 21 Prikaz djelovanja mase utega na mjestu motora pri 1000 okretaja u minuti



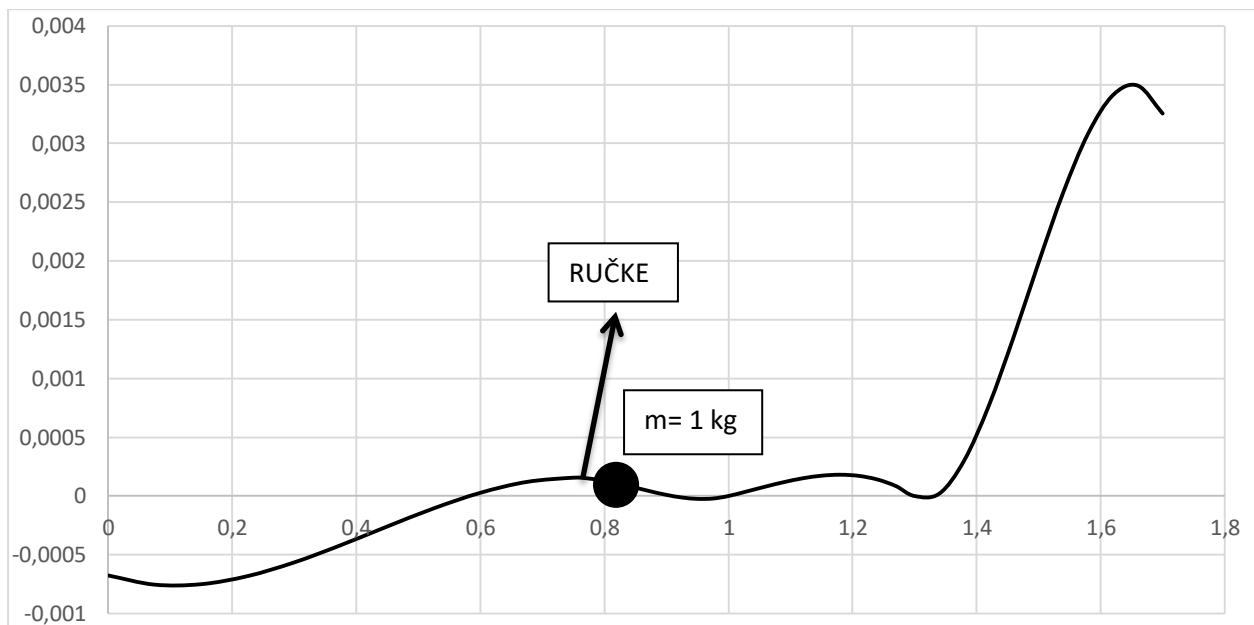
Slika 22 Prikaz djelovanja mase na mjestu motora utega pri 2000 okretaja u minuti



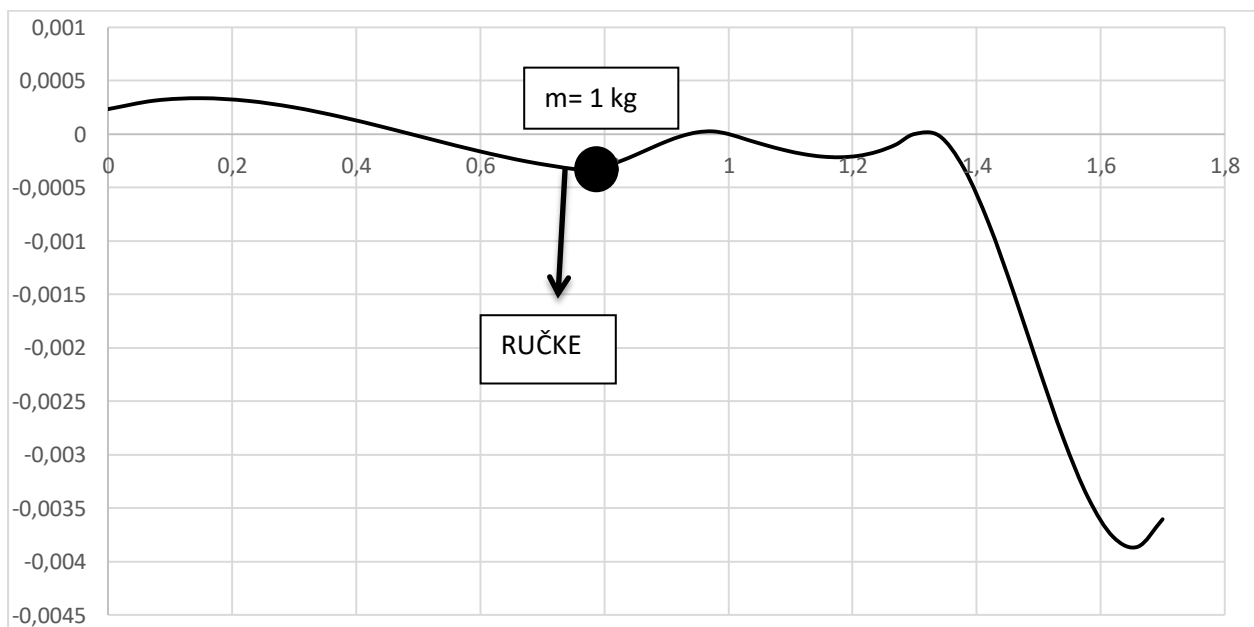
Slika 23 Prikaz djelovanja mase na mjestu motora utega pri 4000 okretaja u minuti



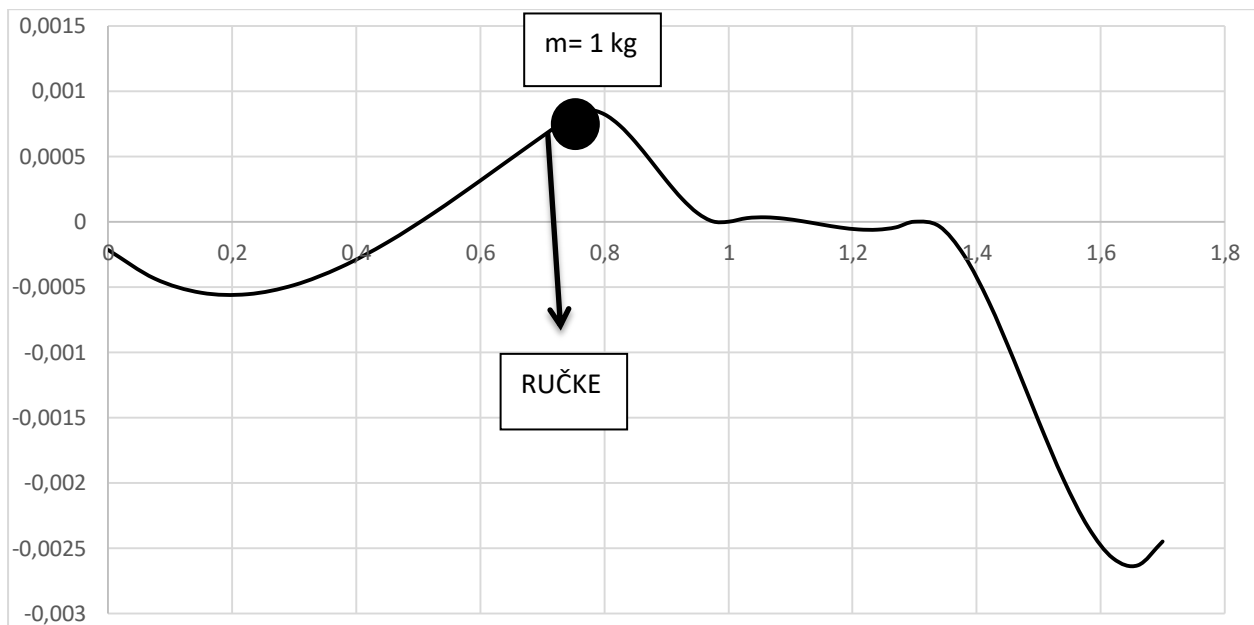
Slika 24 Prikaz djelovanja mase na mjestu motora utega pri 8000 okretaja u minuti



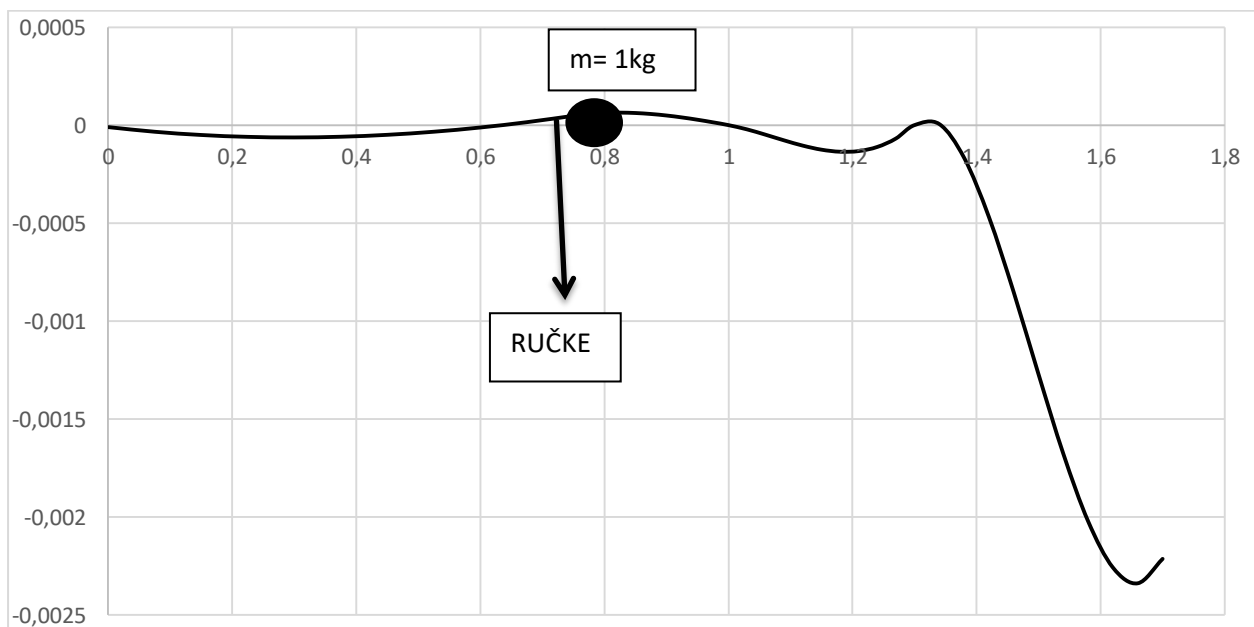
Slika 25 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 1000 okretaja u minuti



Slika 26 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 2000 okretaja u minuti



Slika 27 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 4000 okretaja u minuti



Slika 28 Prikaz djelovanja mase na mjestu ručki utega pri 8000 okretaja u minuti

## 7.ZAKLJUČAK

U ovom radu smo opisali konstrukciju motornih kosilica i ručnih motornih kosilica.

Također smo opisali i jednocilindrični motor koji pokreće kosilice te smo pojasnili uravnoteženje jednocilindričnih motora.

Metodom konačnih elemenata smo proračunali ponašanje (vibracijski odziv) konstrukcije kosilice sa dodanim utezima. Samu kosilicu smo modelirali kao štapnu konstrukciju sa koncentriranim masama na mjestima glave trimera, motora te spojnice cijevi na ručkama.

Kao što je vidljivo iz dijagrama, masa dodana kod motora mnogo bolje prigušuje vibracije na ručkama.



## 8. LITERATURA

- [1] <https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=13348>
- [2] [http://repositorij.fsb.hr/2329/1/04\\_07\\_2013\\_Diplomski\\_rad\\_Bozicevic.pdf](http://repositorij.fsb.hr/2329/1/04_07_2013_Diplomski_rad_Bozicevic.pdf)
- [3] <https://www.ivejournals.com/article/15809>
- [4] <https://zir.nsk.hr/islandora/object/rgn%3A1371/datastream/PDF/view>
- [5] [https://www.grad.unizg.hr/\\_download/repository/fem.pdf](https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/fem.pdf)
- [6] <http://www1.aucegypt.edu/faculty/mharafa/MENG%20475/Finite%20Element%20Vibration%20Analysis%20Fall%202010.pdf>
- [7] [https://www.grad.unizg.hr/\\_download/repository/Plosni\\_nosaci.pdf](https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/Plosni_nosaci.pdf)