

# Konstrukcija izmjenjivača topline

---

**Markić, Zvonimir**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:919870>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-10**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
STROJARSKE KONSTRUKCIJE

ZVONIMIR MARKIĆ

**KONSTRUKCIJA IZMJENJIVAČA TOPLINE**

ZAVRŠNI RAD

Karlovac, 2016.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
STROJARSKE KONSTRUKCIJE

ZVONIMIR MARKIĆ

**KONSTRUKCIJA IZMJENJIVAČA TOPLINE**  
**CONSTRUCTION OF HEAT EXCHANGERS**

ZAVRŠNI RAD

**Mentor:**  
**Dr.sc.Tihomir Mihalić**

Karlovac, 2016.



## VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

**Stručni / specijalistički studij: Strojarsva**  
(označiti)

Usmjerenje: **Strojarske konstrukcije**

Karlovac, 07.10.2015.

### ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

Student: **Zvonimir Markić**

Matični broj: 0110613084

Naslov: **KONSTRUKCIJA IZMJENJIVAČA TOPLINE**

Opis zadatka:

Nakon uvoda, u teorijskom dijelu rada opisati izmjenjivače topline, sa posebnim naglaskom na svojstva i vrste rekuperativne izmjenjivače topline. U općem dijelu ukratko su opisana svojstva rekuperatora, kao i njihova podjela, osnovni tipovi, matematička analiza, jednostavni (termodinamički) proračun.

Nakon postavke zadatka, provesti termodinamički proračun izmjenjivača topline ulje – dimni plinovi. Izmjenjivač je postavljen vertikalno u prostoru, dimni plinovi struje kroz cijevi, a termičko je ulje usmjeravano pregradama oko cijevi. Zadani parametri su: ulazna temp.dimnih plinova 1000°C, izlazna temp.dimnih plinova 350°C, tlak dimnih plinova 1bar, ulazna temp. ulja 260°C, volumni protok ulja 80 m<sup>3</sup>/h, radni pretlak ulja 10bar. Dimni plinovi su produkt izgaranja metana CH<sub>4</sub>, izgaranje je potpuno s faktorom pretička uzduha  $\lambda=1.05$ . Fizikalna svojstva termičkog ulja Downtherm Q mogu se očitati u Prilogu 1. Kapacitet izmjenjivača Q=200 kW.

Završni rad urediti prema pravilima Veleučilišta u Karlovcu.

Zadatak zadan:  
07.10.2015.

Rok predaje rada:  
15.02.2016.

Predviđeni datum obrane:  
23.02.2016.

Mentor:

Dr.sc. Tihomir Mihalić

Predsjednik Ispitnog  
povjerenstva:

Marijan Brozović, dipl.ing.

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam završni rad na temu KONSTRUKCIJA IZMJENJIVAČA TOPLINE izradio samostalno koristeći navedenu literaturu i znanje koje sam stekao tijekom studija, uz vodstvo mentora dr.sc. *Tihomir Mihalić*, kome se ovim putem zahvaljujem.

Zahvaljujem se roditeljima, sestrama i djevojci Aniti koji su mi bili velika podrška i potpora, te im se ovim putem zahvaljujem na razumijevanju, toleranciji i strpljenju.

U Karlovcu, 10.02.2016.

Zvonimir Markić

## **SAŽETAK**

Ovim završnim radom objašnjena su svojstva, podjela i termodinački proračun izmjenjivača topline, sa naglaskom na rekuperativne izmjenjivače topline.

U općem dijelu ukratko su opisana svojstva izmjenjivača topline, kao i njihova podjela, osnovni tipovi, matematička analiza i jedinstveni (termodinamički) proračun rekuperatora.

Također, proveden je proračun i prikazani su stvarni izgledi konstrukcije izmjenjivača topline prema njihovoj podjeli.

Nakon toga slijedi analiza i zaključak.

## **SUMMARY**

This final paper explains the properties, division and thermodynamic calculation of the heat exchanger, with an emphasis on recuperative heat exchangers.

In the general section briefly describes the properties of the heat exchanger, as well as their division, the basic types, mathematical analysis and unique (thermodynamic) calculation of recuperator.

Also, shown are the actual prospects of construction heat exchanger according to their divisions.

This is followed by analysis of the results and conclusion

## **KLJUČNE RIJEČI**

rekuperativni izmjenjivači topline, prolaz topline, temperatura struja, protusmjerni rekuperator, raspored temperatura, toplinski tok

## **KEY WORDS**

recuperative heat exchangers, heat transfer, flow temperature, counterflow recuperative, temperature distribution, heat flow

## SADRŽAJ

POPIS SLIKA:.....	I
POPIS TABLICA:.....	III
POPIS OZNAKA:.....	IV
1. UVOD.....	1
2. PODJELA IZMJENJIVAČA TOPLINE .....	2
2.1. Rekuperativni izmjenjivači topline (rekuperatori) .....	2
2.2. Regenerativni izmjenjivači topline (regeneratori) .....	3
2.3. Izravni (direktni) izmjenjivači topline .....	4
3. IDENTIFIKACIJA STRUJA. OZNAČAVANJE TEMPERATURA STRUJA.....	5
4. OSNOVNI TIPOVI REKUPERATORA.....	6
5. MATEMATIČKA ANALIZA REKUPERATORA .....	8
5.1. Prikaz rješenja u bezdimenzijskom obliku.....	9
5.1.1 Istosmjerni rekuperator .....	10
5.1.2 Protusmjerni rekuperator.....	20
5.1.3 Križni (unakrsni) rekuperator.....	28
5.2. Specijalni slučajevi .....	34
5.2.1 Slučaj kada jedna od struja ili kondenzira ili isparuje.....	34
5.2.2 Slučaj kada jedna struja kondenzira a druga isparuje .....	38
6. JEDNOSTAVNI PRORAČUN REKUPERATORA.....	39
7. MINIMALNA TEMPERATURNI RAZLIKA .....	40
7.1 Istosmjerni rekuperator .....	40
7.2. Protusmjerni i križni rekuperator .....	41
8. SREDNJA LOGARITAMSKA RAZLIKA TEMPERATURA .....	44
9. ISKORISTIVOST TOPLINE .....	47
10. STUPANJ DJELOVANJA IZMJENJIVAČA TOPLINE .....	50
11. REKUPERATORI S VIŠE PROLAZA POJEDINIH STRUJA.....	55
12. TERMODINAMIČKI PRORAČUN IZMJENJIVAČA.....	57
12.1. Termičko ulje .....	61
12.1.1. Fizikalna svojstva ulja pri ulaznoj temperaturi $t_{Uiz} = 260^{\circ}\text{C}$ .....	61
12.1.2. Fizikalna svojstva ulja pri pretpostavljenoj izlaznoj temperaturi.....	61

12.1.3. Srednja gustoća i specifični toplinski kapacitet ulja .....	61
12.1.4. Maseni protok ulja .....	61
12.1.5. Stvarna temperatura ulja na izlazu iz izmjenjivača .....	61
12.2. Dimni plinovi .....	62
12.2.1. Jednadžba izgaranja: .....	62
12.2.2. Minimalna količina kisika potrebna za izgaranje.....	63
12.2.3. Ložište.....	63
12.2.4. Sastav suhih dimnih plinova .....	63
12.2.5. Bilanca dušika.....	63
12.2.6. Bilanca ugljika .....	63
12.2.7. Bilanca vodika.....	65
12.2.8. Bilanca kisika.....	65
12.2.9. Količina suhih dimnih plinova.....	65
12.2.10. Količina vlažnih dimnih plinova.....	65
12.2.11. Volumenski udjeli pojedinih sudionika u vlažnim dimnim plinovima .....	65
12.2.12. Određivanje specifične topline dimnih plinova .....	66
12.2.13. Maseni i volumni protok dimnih plinova.....	67
12.3. Prijelaz topline na strani primara (na strani dimnih plinova).....	68
12.3.1. Fizikalna svojstva dimnih plinova .....	68
12.3.2. Koeficijent prijelaza topline – prijelaz topline u cijevi – izbor cijevi.....	69
12.4. Prijelaz topline na strani sekundara .....	71
12.4.1. Fizikalna svojstva ulja.....	71
12.4.2. Koeficijent prijelaza topline – izmjenjivač sa segmentnim pregradama.....	71
12.5. Provjera pretpostavljenih temperatura stijenki cijevi.....	72
12.6. Srednja logaritamska razlika temperatura.....	74
12.7. Koeficijent prolaza topline sveden na vanjsku stranu cijevi.....	74
13. PRIKAZ STVARNIH KONSTRUKCIJA IZMJENJIVAČA TOPLINE.....	75
14. ZAKLJUČAK.....	82
LITERATURA .....	83



## **POPIS SLIKA:**

Slika 1. Kombinirani rekuperativni toplinski aparat

Slika 2. Prikaz regenerativnog toplinskog aparata

Slika 3. Izravni izmjenjivač topline

Slika 4. Istosmjerni tip rekuperatora

Slika 5. Protusmjerni tip rekuperatora

Slika 6. Križni tip rekuperatora

Slika 7. Prolaz topline kroz razdjelnu stijenku rekuperatora

Slika 8. Temperatura struja uzduž istosmjernog rekuperatora

Slika 9. Uz energijsku bilancu struja

Slika 10.  $\Pi_1$  –dijagram za istosmjerni rekuperativni aparat

Slika 11. Uz pojašnjenje crtanja  $\vartheta$ , A –dijagrama istosmjernog rekuperatora

Slika 12. Temperature struja uzduž protusmjernog rekuperatora

Slika 13. Uz energijsku bilancu struja

Slika 14. Bezdimenzijski prikaz rješenja protusmjernog rekuperatora

Slika 15. Temperatura struja kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja ujedno i slabija struja

Slika 16. Temperatura struja kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja ujedno i jača struja

Slika 17. Temperature struja jednakih toplinskih kapaciteta kod protusmjernog rekuperatora

Slika 18. Križni rekuperator s temperaturama struja na ulaznim i izlaznim bridovima

Slika 19. Bezdimenzijski prikaz rješenja križnog rekuperatora

Slika 20. Temperature struja pri kondenzaciji

Slika 21. Temperature struja pri isparivanju

Slika 22. Raspored temperatura u rekuperatoru u kojem jedna struja kondenzira, a druga isparuje

Slika 23. Minimalna temperaturna razlika kod istosmjernog rekuperatora

Slika 24. Minimalna temperaturna razlika kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja slabija struja

- Slika 25. Minimalna temperaturna razlika kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja slabija struja
- Slika 26. Bezdimenzijska srednja logaritamska temperaturna razlika kod istosmjernog aparata
- Slika 27. Bezdimenzijska srednja logaritamska temperaturna razlika kod protusmjernog aparata
- Slika 28. Grafičko određivanje srednje logaritamske temperaturne raliike
- Slika 29. Usporedba rekuperatora po kriteriju iskoristivosti topline
- Slika 30. Uz izvođenje stupnja djelovanja protusmjernog i križnog rekuperatora
- Slika 31. Uz izvođenje stupnja djelovanja istosmjernog rekuperatora
- Slika 32. Linije  $\eta_i = \text{konst.}$  kod istosmjernog rekuperatora
- Slika 33. Rekuperator topline s tri prolaza slabije struje i jednim prolaskom jače struje
- Slika 34. Rekuperator topline s dva prolaza jače struje i jednim prolaskom slabije struje
- Slika 35. Prikaz mjesta izmjenjivača topline u procesu
- Slika 36. Prikaz uljnog izmjenjivača topline
- Slika 37. Tok temperatura na izmjenjivaču topline
- Slika 38. Izmjenjival topline s dvostrukom cijevi
- Slika 39. Izmjenjivač topline u postupku proizvodnje
- Slika 40. Izmjenjivač topline u postupku proizvodnje
- Slika 41. „Shell and tube“ izmjenjivač topline
- Slika 42. „Shell and tube“ izmjenjivač topline u postupku proizvodnje
- Slika 43. „Shell and tube“ izmjenjivač topline u postupku proizvodnje
- Slika 44. Pregrade u izmjenjivaču topline
- Slika 45. Izmjenjivač u proizvodnji
- Slika 46. Postupak bušenja razdjelne ploče
- Slika 47. Razdjelna ploča
- Slika 48. Gotova konstrukcija „Shell and tube“ izmjenjivača topline

**POPIS TABLICA:**

Tablica 1. Prosječna bezdimenzijska vrijednost izlazne temperature  $\Theta_{m1}$  u funkciji bezdimenzijskih parametara  $a$  i  $b$

Tablica 2. Srednje specifične topline dimnih plinova

Tablica 3. Dinamička žilavost dimnih plinova

Tablica 4. Koeficijent toplinske vodljivosti dimnih plinova

Tablica 5. Dinamička žilavost dimnih plinova kod temperature  $271^{\circ}\text{C}$

**POPIS OZNAKA:**

Oznaka	Jedinica	Opis
A	$m^2$	-ploština, površina
$A_o$	$m^2$	-površina rekuperatora
L,B	m	-duljina, širina
C	W/K	-toplinski kapacitet tekućine (struje)
$c_p$	J/(kgK)	-specifični toplinski kapacitet plina pri konst. tlaku
H	J	-entalpija
k	W/( $m^2K$ )	-koeficijent prolaza topline
m	kg	-masa
$p$	Pa ( $N/m^2$ )	-tlak
$q_m$	kg/s	-maseni protok
$\alpha$	W/( $m^2K$ )	-koeficijent prijelaza topline
$\varepsilon$	1	-omjer stvarnog i maksimalnog toplinskog toka (iskoristivost)
$\varepsilon_i, \varepsilon_k, \varepsilon_p$	1	-iskoristivost topline istosmjernog, križnog i protusmjernog rekuperatora
$\eta_i, \eta_k, \eta_p$	1	-stupanj topline istosmjernog, križnog i protusmjernog rekuperatora
$\vartheta$	°C	-(Celzijeva) temperatura
$\Phi$	W	-toplinski tok
$\theta_{m1}$	-	-prosječna bezdimenzijska temperatura slabije struje kod križnog rekuperatora
$\xi, \eta$	-	-bezdimenzijske koordinate kod križnog rekuperatora
$\pi_1$	-	-bezdimenzijska temperaturna značajka
$\pi_2$	-	-bezdimenzijska značajka broja prijenosnih jedinica
$\pi_3$	-	-bezdimenzijska značajka omjera toplinskih kapaciteta struja

## 1. UVOD

Izmjenjivači topline su toplinski aparati u kojima se prenosi toplina između dva ili više fluida (tekućina) radi zagrijavanja ili ohlađivanja jednog fluida drugim.

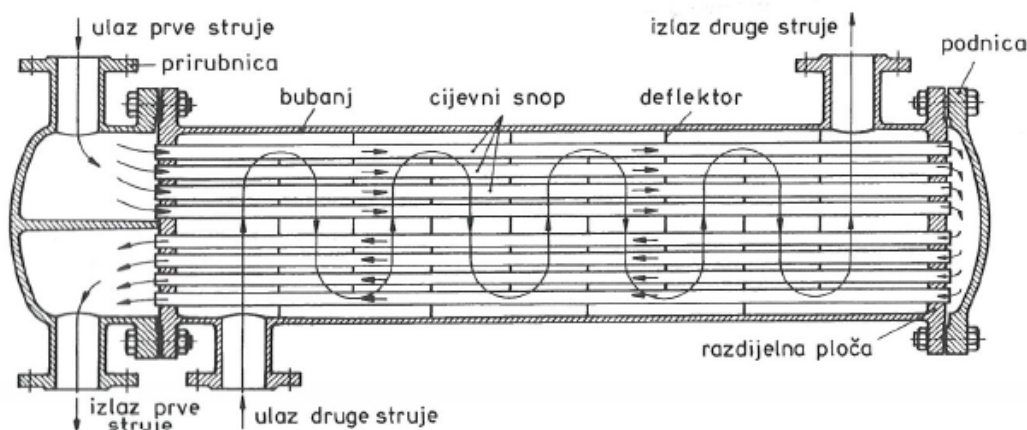
Takvi toplinski aparati imaju vrlo široku primjenu kao npr. u postrojenjima centralnog grijanja (poznati kao bojleri, radijatori, kaloriferi), postrojenjima za pripremu potrošnje tople vode i kod postrojenja koja se primjenjuju u rashladnoj tehnici (isparivači, kondezatori). Isto tako veliku primjenu toplinski aparati nalaze u kemijskoj i prehrambenoj industriji kao zagrijavači, kondezatori, kristalizatori, sušionice, ekstraktori, destilizatori i rektifikatori. Također veliku primjenu imaju u području termoenergetskih postrojenja (parni kotao (isparivač), pregrijač pare, zagrijači zraka, zagrijači napojne vode (ekonomajzeri), kondezator) odnosno nuklearnih reaktora (parni kotao, kondezator).

## 2. PODJELA IZMJENJIVAČA TOPLINE

Načelno se izmjenjivači topline mogu podijeliti na: rekuperatore, regeneratore i direktne (izravne) aparate.

### 2.1. Rekuperativni izmjenjivači topline (rekuperatori)

Izmjenjivači topline kod kojih su struje (tekućine, fluidi) međusobno razdvojeni čvrstom stijenkom nazivaju se rekuperativnim toplinskim aparatima ili, kraće, rekuperatorima. Kod takvih je aparata razdjelna stijenka rashladna odnosno ogrijevna površina, koja ne propušta međusobni izravni dodir struja. Razdjelna stijenka može biti cijevnog ili pločastog oblika, a s obzirom na konstruktivnu izvedbu rekuperatori mogu biti različito izvedeni. Jednu od izvedbi prikazuje slika 1.

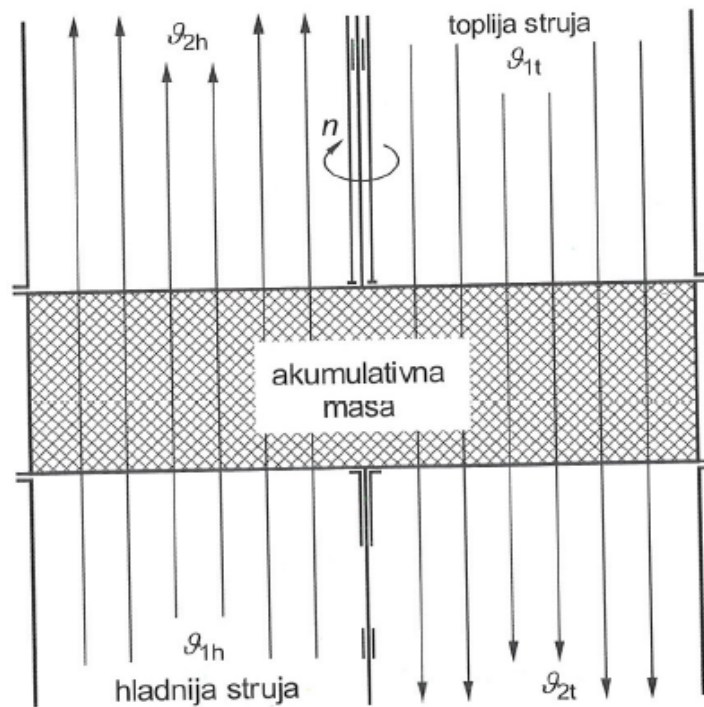


Slika 1. Kombinirani rekuperativni toplinski aparat

Prikazani aparat se sastoji iz snopa cijevi koji je umetnut u bubanj (plašt). Kroz cijevi struji jedna struja, recimo hladnija, koja se prolaskom kroz aparat zagrijava, a u prostoru oko cijevi struji toplija struja koja se hladi prolaskom kroz rekuperator. Razdjelne stijenke ili površine na kojima se prenosi toplina, u prikazanom rekuperatoru, su cijevne stijenke. [1]

## 2.2. Regenerativni izmjenjivači topline (regeneratori)

Shematski prikaz jedne od mogućih izvedbi regenerativnog toplinskog aparata (regeneratora), prikazuje slika 2.

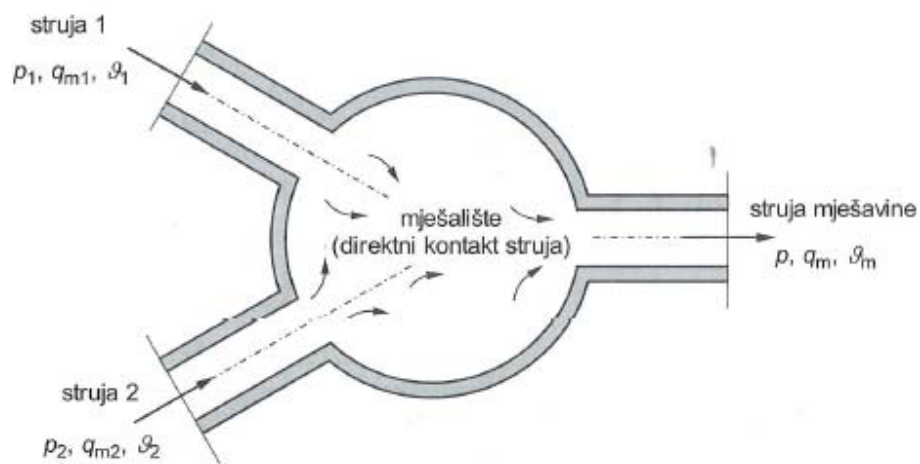


Slika 2. Prikaz regenerativnog toplinskog aparata

Preko akumulacijske mase izrađene od žice u obliku saća, koja polagano rotira na vertikalnoj osovinu, s jedne strane struji topliji fluid i predaje toplinu rotirajućoj masi koja ju akumulira, pri čemu se topliji fluid hladi. S druge strane preko tako zagrijane mase struji hladniji fluid koji preuzima na sebe ovu akumuliranu toplinu u pri tome se zagrijava. Osim izvedbe s rotirajućom masom, regeneratori mogu biti izvedeni s mirujućom akumulacijskom masom s naizmjeničnim prolazom struja. Ovi se aparati koriste uglavnom za struje plin – plin. Veliku njihovu primjenu nalazimo u čeličanama kod tzv. Cowperovih zagrijača zraka. [1]

### 2.3. Izravni (direktni) izmjenjivači topline

Kod izravnih (direktnih) izmjenjivača topline, slika 3, do prijenosa topline između struja dolazi njihovim međusobnim izravnim dodirrom u mješalištu. Npr. izravnim miješanjem vode i vodene pare može se sniziti pregrijanje ili postići kondenzaciju pare. Sabirnici kondenzata nekog termoenergetskog postrojenja primjeri su izravnih izmjenjivača topline.



Slika 3. Izravni izmjenjivač topline

U daljnjem izlaganju opisat će se osnovni tipovi *rekuperativnih* izmjenjivača topline. [1]



### 3. IDENTIFIKACIJA STRUJA. OZNAČAVANJE TEMPERATURA STRUJA

Zbog prikladnijeg načina proračuna rekuperatora pojedine struje se identificiraju prema kriteriju vrijednosti toplinskog kapaciteta (vodene vrijednosti),  $C$ , W/K, odnosno struje. Taj se toplinski kapacitet računa prema izrazu

$$C = q_m c_p \quad (1)$$

U gornjoj jednadžbi veličina  $q_m$ , kg/s, predstavlja maseni protok pojedine struje, a  $c_p$ , J/(kgK), njezin specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku. Zbog toga što je ovako definirani toplinski kapacitet vezan na strujanje fluida, često se u literaturi za njega rabi i strujni toplinski kapacitet.

Upravo prema vrijednosti toplinskog kapaciteta  $C$ , prema dogovoru (konvenciji), struje dijelimo na slabiju odnosno jaču. Slabija struja je ona koja ima manju vrijednost toplinskog kapaciteta i njoj se pridružuje indeks 1, tj.,

$$C_1 = q_{m1} c_{p1} \quad (2)$$

dok jača struja ima veću vrijednost toplinskog kapaciteta i pridružuje joj se indeks 2, pa je

$$C_2 = q_{m2} c_{p2} \quad (3)$$

Prema tome vrijedi omjer

$$0 \leq \frac{C_1}{C_2} \leq 1$$

Kao oznaka ulazne temperature struje u rekuperator upotrebljava se apostrof ', dok se za oznaku izlazne temperature koristi apostrof ", pa na osnovi sveukupno izloženog, oznake ulaznih i izlaznih temperatura pojedinih struja jesu: [1]

$\vartheta'_1$  → ulazna temperatura slabije struje

$\vartheta''_1$  → izlazna temperatura slabije struje

$\vartheta'_2$  → ulazna temperatura jače struje

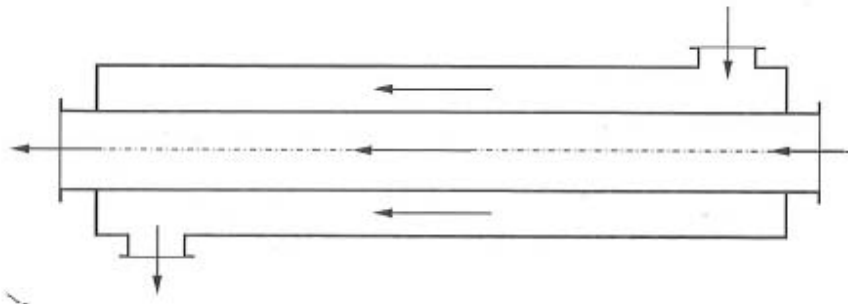
$\vartheta''_2$  → izlazna temperatura jače struje

#### 4. OSNOVNI TIPOVI REKUPERATORA

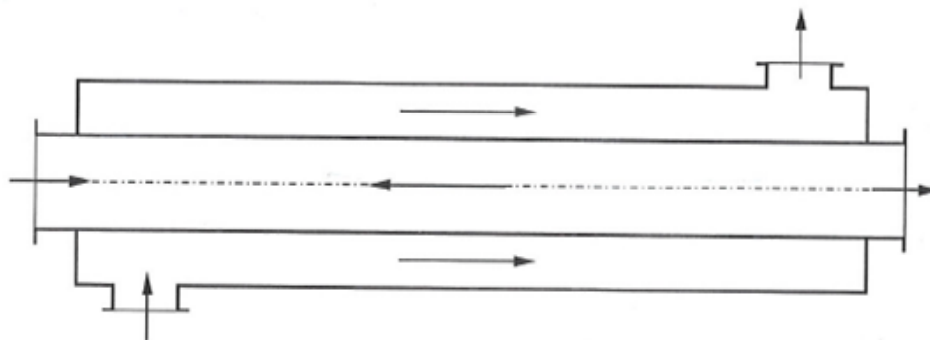
Osnovni su tipovi rekuperatora oni kod kojih svaka od struja prolazi samo jedanput kroz promatrani rekuperator. Njihova je podjela vezana prema međusobnom strujanju fluida kroz rekuperator, te se shodno tome dijele na:

- a) istosmjerne rekuperatore
- b) protusmjerne rekuperatore
- c) križne (unakrsne) rekuperatore

Istosmjerni rekuperatori, slika 4, su takvi aparati kod kojeg su struje međusobno paralelne i teku u istom smjeru, dok kod protusmjernog, slika 5, struje teku također međusobno paralelno, ali u suprotnim smjerovima.

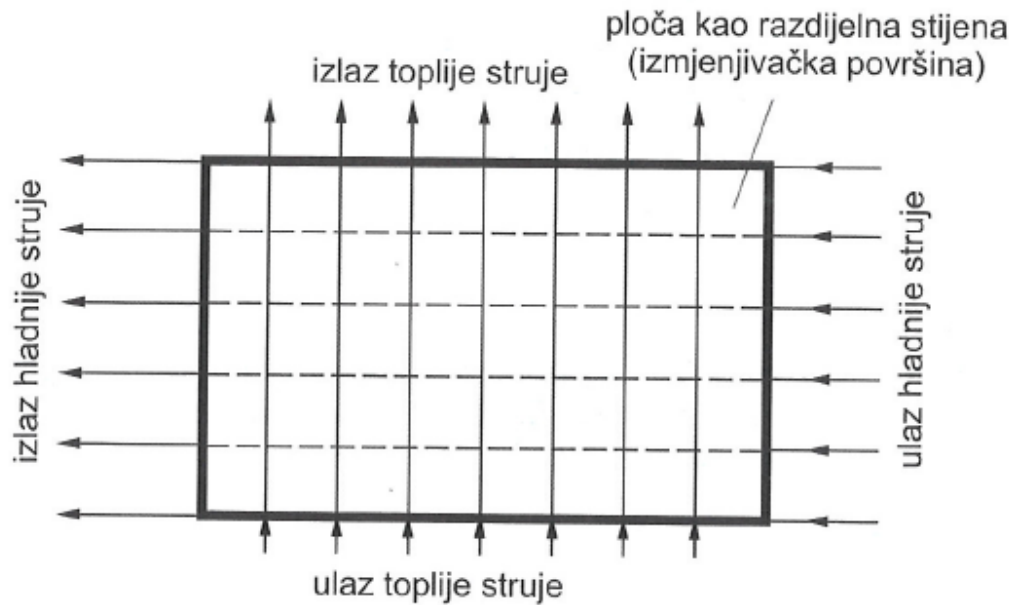


Slika 4. Istosmjerni tip rekuperatora



Slika 5. Protusmjerni tip rekuperatora

Kod križnog rekuperatora, slika 6, struje se međusobno križaju (ukrščaju).



Slika 6. Križni tip rekuperatora

Osim osnovnih tipova, postoje najčešće u praksi kombinirani rekuperatori. Naime, oni su formirani najčešće od svih triju osnovnih tipova. Primjer kombiniranog rekuperatora prikan je na slici 1, i on sadži u sebi elemente svih triju osnovnih tipova. [1] [2]

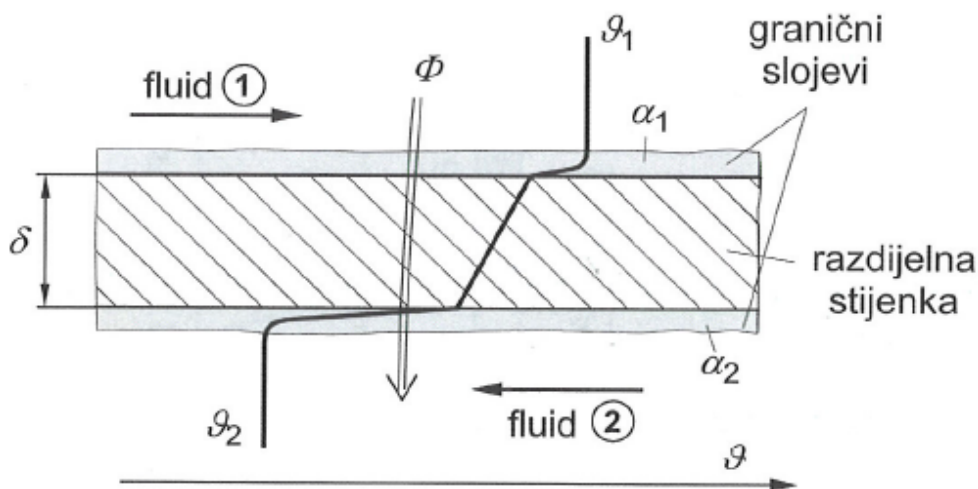
## 5. MATEMATIČKA ANALIZA REKUPERATORA

Dakako da nas s inženjerskog motrišta mora zanimati između ostalog i to o čemu ovisi toplinski tok u izvedenom izmjenjivaču topline, odnosno, kolika mora biti u njega ugrađena površina za ostvarenje zahtjevanog toplinskog toka. Te su veličine u izravnoj svezi s međusobnim načinom strujanja fluida kroz toplinski aparat.

Za toplinski tok u rekuperatoru, može se napisati formalnu matematičku vezu

$$\Phi = \Phi(k, A_0, \vartheta_1', \vartheta_1'', \vartheta_2', \vartheta_2'', C_1, C_2). \quad (4)$$

U gornjoj jednadžbi, pored pojašnjenih veličina, veličina  $k$ ,  $W/(m^2K)$ , predstavlja koeficijent prijelaza topline, dok veličina  $A_0$ ,  $m^2$ , označuje ukupnu površinu prijenosa topline. Koeficijent prolaza topline esencija je veličina pri proračunu rekuperatora. Ta veličina sadrži u svojoj strukturi sve relevantne nametnute toplinske otpore na relaciji izmjene topline *fluid – stijenka – fluid*, a koji upravo i postoji kod rekuperatora, slika 7. Tako su u izrazu za koeficijent prolaza topline uključeni koeficijenti prijelaza topline s jedne i s druge strane razdjelne stijenke, njezina geometrija i njezina toplinska provodnost.



Slika 7. Prolaz topline kroz razdjelnu stijenku rekuperatora

U izvedenim jednadžbama za koeficijent prolaza topline kao i toplinske kapacitete pojedinih struja javljaju se i fizikalna svojstva struja, a koja su naravno temperaturno ovisna. Da se tijekom računanja uzme u obzir tu ovisnost, obično se fizikalna svojstva fluida (tekućina, struja) uzimaju iz toplinskih tablica za temperaturu  $\vartheta_m$  koja odgovara aritmetičkoj sredini ulazne i izlazne vrijednosti temperature promatrane struje, tj.

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta' + \vartheta''}{2} \quad (5)$$

### 5.1. Prikaz rješenja u bezdimenzijskom obliku

Ako se jednadžbu  $\Phi = \Phi(k, A_0, \vartheta_1', \vartheta_1'', \vartheta_2', \vartheta_2'', C_1, C_2)$ , podvrgne dimenzijskoj analizi, a koju se ovdje ne provodi, dobiva se rješenje rekuperatora u bezdimenzijskom implicitnom obliku

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (6)$$

gdje su pojedine bezdimenzijske (kriterijske) značajke:

$$\pi_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} \quad (7)$$

Vidi se da značajka  $\pi_1$  označuje omjer promjene temperature slabije struje i zadane ulazne temperature razlike struja.

$$\pi_2 = \frac{kA_0}{C_1} \quad (8)$$

Značajka  $\pi_2$  predstavlja broj prijenosnih jedinica.

$$\pi_3 = \frac{C_1}{C_2} \quad (9)$$

Vidi se da veličina  $\pi_3$  predstavlja omjer toplinskih kapaciteta slabije i jače struje, a što je već naglašeno i jed. (4).

Dimenzijska analiza daje i bezdimenzijsku značajku

$$\pi_4 = \frac{kA_0}{C_2} \quad (10)$$

No, ona više nije nezavisna jer se može izraziti u funkciji prethodno definiranih značajki  $\pi_2$  i  $\pi_3$ .

$$\pi_4 = \pi_2 \pi_3 = \frac{kA_0 C_1}{C_1 C_2} = \frac{kA_0}{C_2}$$

Može se napisati i eksplicitni oblik jednadžbe (6)

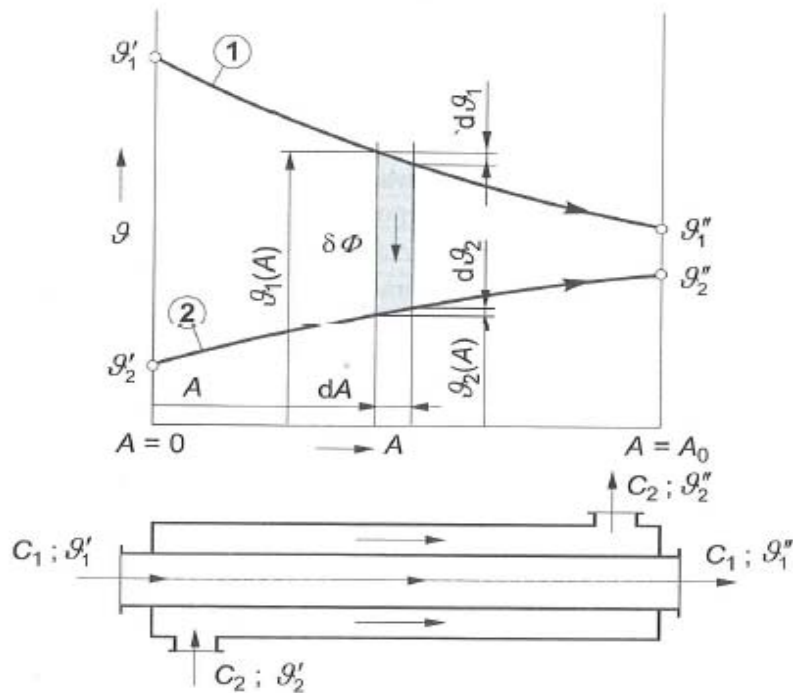
$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad (11)$$

Oblik funkcije  $F$  u jednadžbi (6) odnosno  $f$  u jednadžbi (11), kako će se vidjeti iz sljedećih poglavlja, a u izravnoj su svezi s osnovnim tipovima rekuperatora.

Prednost prikaza rješenja u bezdimenzijskom obliku je višestruka. Kao prvo grupiranjem dimenzijskih varijabli u bezdimenzijske grupe, bitno se smanjuje broj nezavisnih varijabli pomoću kojih se prikazuje rješenje. Jednadžba (11) pokazuje da se rješenje za svaki tip rekuperatora prikazuje samo pomoću dvije nezavisne bezdimenzijske varijable. S druge pak strane tako dobivena bezdimenzijska rješenja su ista za svaki osnovni tip aparata. [1] [2] [3]

### 5.1.1 Istosmjerni rekuperator

Pronađimo oblik funkcije  $f(\pi_2, \pi_3)$  za istosmjerni aparat. Za tu analizu promotrimo slučaj istosmjernog aparata koji je prikazan slikom 8.



Slika 8. Temperaturna struja uzduž istosmjernog rekuperatora

Rekuperator je oblika "cijev u cijevi", i neka toplija struja kao slabija struja, ulazne temperature  $\vartheta'_1$ , struji kroz manju cijev a kroz prstenasti presjek neka paralelno i u istom smjeru struji hladnija struja ulazne temperature  $\vartheta'_2$ , kao jača struja. Zbog postojeće temperaturne razlike između struja, toplina će kroz razdjelnu stijenku prolaziti od toplijeg na hladniji fluid, pa će se pri tomu toplija stuja (fluid) hladiti, dok će se hladnija struja zagrijavati. To znači da će se i temperaturna razlika između dviju struja mijenjati uzduž površine  $A$ . Iz tog je jasno da će najveća temperaturna razlika između struja biti na njihovom ulazu, dok će najmanja temperaturna razlika biti na izlazu iz rekuperatora.

Zbog toga što se mijenja razlika temperatura struja uzduž površine, postavlja se izraz za toplinski tok na diferencijalnu površinu  $dA$ .

$$\delta\Phi = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA \quad (12)$$

Ukupni toplinski tok dobije se integracijom gornje jednadžbe po cijeloj površini tj. od  $A = 0$  do  $A = A_0$ :

$$\Phi = \int_{A=0}^{A=A_0} k(\vartheta_1 - \vartheta_2) dA \quad (13)$$

Poteškoću rješavanja gornjeg integrala stvara nepoznavanje temperaturne promjene jedne i druge struje duž površine, tj. nepoznavanje funkcijskih veza  $\vartheta_1 = \vartheta_1(A)$  i  $\vartheta_2 = \vartheta_2(A)$ , odnosno razlike temperatura  $\Delta\vartheta(A) = \vartheta_1(A) - \vartheta_2(A)$ . Iznalaženje te veze moguće je uobičajnim matematičkim operacijama tako da bi u tom slučaju rješenje gornjeg integrala u svojoj strukturi imalo i tzv. srednju logaritamsku temperaturnu razliku  $\Delta\vartheta_m$ . No kako je u ovom slučaju odabran drugačiji prikaz rješenja, da bi se došlo do tih funkcijskih veza, postavlja se I. stavak termodinamike, oblika  $\delta\Phi = dH$ , za svaku od struja na diferencijalnoj površini  $dA$ , shodno slici 9.

Postavljanjem navedene jednadžbe za struju 1, dobiva se

$$- \delta\Phi = H_{1(A+dA)} - H_{1(A)} \quad (a)$$

$$- \delta\Phi = C_1(\vartheta_1 + d\vartheta_1 - \vartheta_1) \quad (b)$$

$$- \delta\Phi = C_1 d\vartheta_1 \quad (c)$$

Uvrstivši u (c) jednadžbu (12) dobiva se, glede daljnje analize, prikladni oblik diferencijalne jednadžbe

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA = -C_1 d\vartheta_1 \quad (14)$$

Analognim se postupkom dobiva diferencijalna jednadžba, a koja proizlazi iz postavke I. zakona termodinamike za struju 2

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA = C_2 d\vartheta_2 \quad (15)$$

(Važno je napomenuti da su tijekom izvođenja jednadžbi (14) i (15) implicitno usvojene pretpostvke konstantnih vrijednosti veličina  $k$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , zanemarivanja provođenja topline u smjeru strujanja te zanemarivanja toplinskog toka rekuperatora prema okolišu. Te pretpostavke postoje i pri analizi ostalih tipova rekuperatora.)



Diferencijalne jednačbe (14) i (15) predstavljaju sustav od dvije obične homogene diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima. Rješenjem tog sustava dobiva se opće rješenje temperaturnog toka struja 1 i struje 2. Postoji nekoliko načina (procedura) rješavanja takvog sustava jednačbi. Jedan od tih načina je kako slijedi:

Djeljenjem jednačbe (14) s  $C_1 dA$  a jednačbe (15) s  $C_2 dA$ , iste se transformiraju u oblike

$$\frac{k}{C_1} \vartheta_1 - \frac{k}{C_1} \vartheta_2 + \frac{d\vartheta_1}{dA} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{k}{C_2} \vartheta_1 - \frac{k}{C_2} \vartheta_2 + \frac{d\vartheta_2}{dA} = 0 \quad (b)$$

Deriviranjem jednačbe (a) po površini A dobiva se

$$\frac{k}{C_1} \frac{d\vartheta_1}{dA} - \frac{k}{C_1} \frac{d\vartheta_2}{dA} + \frac{d^2\vartheta_1}{dA^2} = 0 \quad (c)$$

a iz jednačbe (a) slijedi temperatura  $\vartheta_2$

$$\vartheta_2 = \frac{C_1}{k} \frac{d\vartheta_1}{dA} + \vartheta_1 \quad (d)$$

Iz jednačbe (b) slijedi

$$\frac{d\vartheta_2}{dA} = \frac{k}{C_2} \vartheta_1 - \frac{k}{C_2} \vartheta_2 \quad (e)$$

Nakon uvrštavanja jednačbi (e) i (d) u jednačbu (a) dobiva se diferencijalnu jednačbu izraženu samo po varijabli  $\vartheta_1$

$$\frac{d^2\vartheta_1}{dA^2} + k \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \frac{d\vartheta_1}{dA} = 0 \quad (16)$$

koja predstavlja običnu homogenu diferencijalnu jednačbu drugog reda s konstantnim koeficijentima. Njena karakteristična jednačba ima oblik

$$m^2 + k \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} m = 0, \quad (f)$$

i njeni korjeni su

$$m_1 = 0; \quad m_2 = -k \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \quad (g)$$

pa je opće rješenje jednačbe (16)

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(A) = B_1 + B_2 \exp\left(-k \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} A\right) \quad (17)$$

Integracijske konstante  $B_1$  i  $B_2$  određuju se iz rubnih (graničnih) uvjeta. Za istosmjerni tip rekuperatora ovi uvjeti, vidi sliku 8, jesu za

$$\begin{aligned} A = 0; \quad \vartheta_1 = \vartheta'_1; \quad \vartheta_2 = \vartheta'_2; \\ A = A_0; \quad \vartheta_1 = \vartheta''_1; \quad \vartheta_2 = \vartheta''_2 \end{aligned} \quad (18)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (18) u jednačbu (17) dobiva se sustav od dvije nepoznanice  $B_1$  i  $B_2$

$$\vartheta'_1 = B_1 + B_2 \quad (h)$$

$$\vartheta'_1 = B_1 + B_2 \exp\left(-k \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} A_0\right) \quad (i)$$

Rješenjem gornjeg sustava jednačbi dobiju se konstante  $B_1$  i  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{\vartheta''_1 - \vartheta'_1 \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (j)$$

$$B_2 = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (k)$$

Nakon provedene supstitucije jednadžbi (k) i (j) u jednadžbu (17), dobiva se paritikalarno (posebno) rješenje temperaturne promjene struje 1 s površinom A

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(A) = \frac{\vartheta''_1 - \vartheta'_1 \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)} + \frac{(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (19)$$

Dakako da gornje rješenje vrijedi za varijablu A unutar intervala  $0 \leq A \leq A_0$ .

Koristeći jednadžbu (19) i jednadžbu (d), dobiva se partikularno rješenje promjene temperature struje 2 po površini A

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(A) = \frac{\vartheta''_1 - \vartheta'_1 \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)} - \frac{C_1}{C_2} \left( \frac{(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)} \right) \quad (20)$$

Iz jednadžbi (20) i (19) lako se dobiva traženi oblik bezdimenzijskog rješenja, odnosno oblik funkcije  $f(\pi_2, \pi_3)$  u jednadžbi (11), sljedećim postupkom:

Iz jednadžbe (19) slijedi

$$\vartheta'_1 - \vartheta''_1 = \vartheta_1(A = 0) - \vartheta_1(A = A_0) = \frac{(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) \left(1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (l)$$

Razlika temperatura  $\vartheta'_1 - \vartheta'_2$  dobiva se iz jednadžbi (19) i (20)

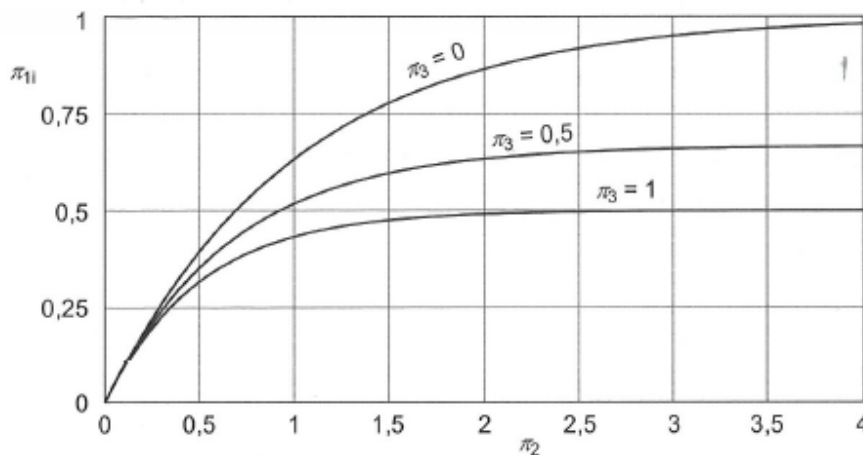
$$\vartheta'_1 - \vartheta'_2 = \vartheta_1(A = 0) - \vartheta_2(A = A_0) = \frac{\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) (\vartheta'_1 - \vartheta''_1)}{1 - \exp\left(-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (m)$$

Međusobnim dijeljenjem jednadžbi (m) i (l) konačno se dobiva traženi oblik bezdimenzijske funkcije  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$  istosmjernog rekuperativnog aparata.

$$\frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2''} = \frac{1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2)}{1 + \pi_3} = \pi_{1i} \quad (21)$$

Bezdimenzijske značajke  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  definirane su pomoću jednadžbi (7) – (9), i jednadžba (21) pokazuje da je bezdimenzijsko rješenje istosmjernog aparata dano s dvije nezavisne bezdimenzijske varijable. Ta činjenica omogućuje zgodni prikaz rješenja i u dijagramskom obliku, u kojega se na ordinatu nanosi bezdimenzijsku veličinu  $\pi_{1i}$ , na apscisu bezdimenzijsku veličinu  $\pi_2$ , a kao parametarske krivulje nanose se krivulje  $\pi_3 = \text{konst.}$  Kako vrijednost bezdimenzijske veličine  $\pi_3$  leži u intervalu  $0 \leq \pi_3 \leq 1$ , u dijagramskim prikazima nacrtanim u mjerilu, dotične su parametarske krivulje stupnjevane po 0,1 nad intervalom od 0 do 1.

Dijagram na slici 10 prikazuje, također u mjerilu, naznačenu funkcijsku ovisnost za tri parametarske krivulje  $\pi_3 = 0; 0,5$  i 1. Dijagram se koristi na način da se iz zadanih podataka dvije bezdimenzijske veličine moraju odrediti, te pomoću njih odrediti radnu točku aparata u dijagramu, te iz njega očitati treću (nepoznatu) bezdimenzijsku veličinu.



Slika 10.  $\pi_1$  – dijagram za istosmjerni rekuperativni aparat

Svaka parametarska krivulja  $\pi_3$  u naznačenom dijagramu ima svoju horizontalnu asimptotu, i koju se dobija sljedećim razmatranjem

$$\lim_{\pi_2 \rightarrow \infty} \pi_{1i} = \lim_{\pi_2 \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2)}{1 + \pi_3} = \frac{1}{1 + \pi_3} \quad (22)$$

(Ako  $\pi_2 \rightarrow \infty$ , to znači da  $A_0 \rightarrow \infty$ , tj. radi se u tom slučaju o istosmjernom aparatu neizmjereno velike površine, a što je hipotetički slučaj!)

Uzevši da su vrijednosti parametarskih krivulja  $\pi_3$ , recimo 0 ; 0,5 i 1, tada su odnosne vrijednosti horizontalnih asimptota, prema jednadžbi (22), 1,0 ; 2/3 odnosno 0,5. To znači da se postigne vrijednost  $\pi_{1i} = 1,0$  samo za slučaj da je  $\pi_3 = 0$  i da  $\pi_2 \rightarrow \infty$ , odnosno cjelokupnu raspoloživu temperaturnu razliku  $\vartheta'_1 - \vartheta'_2$ , kod istosmjernog aparata možemo iskoristiti (svladati) jedino pod tim uvjetima. Za ostale vrijednosti parametarskih krivulja, bez obzira što  $\pi_2 \rightarrow \infty$ , a time i  $A_0 \rightarrow \infty$ , uvijek svladana temperaturna razlika manja od raspoložive.

Ako bi se u jednadžbu (21) u bezdimenzijsku značajku  $\pi_2$  umjesto ukupne površine  $A_0$  uvrstilo varijabilnu površinu  $A$ , a koja poprima vrijednosti  $0 \leq A \leq A_0$ , tada bi ona predstavljala ujedno i bezdimenzijsku promjenu slabije struje duž površine. Taj bezdimenzijski zapis ima oblik

$$\pi_{1i}^* = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta_1(A)}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \frac{1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2^*)}{1 + \pi_3} \quad (23)$$

u kojoj je

$$\pi_2^* = \frac{kA}{C_1} \quad (24)$$

Toplinski tok na ukupnoj površini možemo odrediti polazeći od jednadžbe (13), budući da sada znamo funkcijske veze  $\vartheta_1(A)$  i  $\vartheta_2(A)$ , odnosno poznajemo i veze između tih temperatura. Tako uvrštavajući jednadžbu (d) i jednadžbu (17) u jednadžbu (13), lako se dolazi do izraza za toplinski tok

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) \quad (25)$$

Gornji se izraz lako može napisati, koristeći jednadžbe (7) i (21), i u bezdimenzijskom obliku

$$\frac{\Phi(A_0)}{C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'_2)} = \pi_{1i} = \frac{1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2)}{1 + \pi_3} \quad (26)$$

I jednadžbu (23) možemo također koristiti za bezdimenzijski prikaz toplinskog toka u funkciji varijabilne površine  $0 \leq A \leq A_0$

$$\frac{\Phi(A)}{C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'_2)} = \pi_{1i}^* = \frac{1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2^*)}{1 + \pi_3} \quad (27)$$

Kako se promatra model rekuperatora kod kojih nema toplinskog toka prema ili od okoliša, tada moraju vrijediti sljedeći oblici jednadžbi:

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = C_2(\vartheta''_2 - \vartheta'_2) \quad (28)$$

odnosno

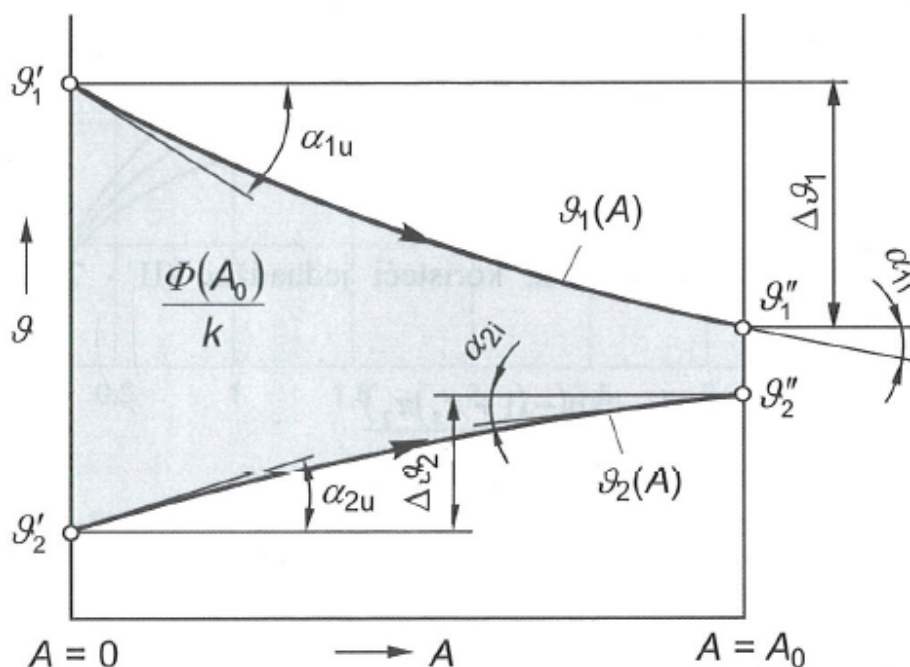
$$\Phi(A) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta_1(A)) = C_2(\vartheta_2(A) - \vartheta'_2) \quad (29)$$

### 5.1.1.1 Neke opaske prilikom crtanja $\vartheta, A$ –dijagrama

Kako je prema dogovoru  $C_1 \leq C_2$ , tada iz jednadžbe (28) proizlazi nejednakost (jednakost)

$$\Delta\vartheta_1 = \vartheta'_1 - \vartheta''_1 \geq \Delta\vartheta_2 = \vartheta''_2 - \vartheta'_2 \quad (30)$$

što znači da slabija struja, struja 1, prolaskom kroz rekuperator više promijeni svoju temperaturu nego struja 2, jača struja. (Izuzetak je slučaj za koji je  $\pi_3 = 1$ , kod kojega obje struje promijene svoju temperaturu za isti iznos). To svakako treba uzeti u obzir pri dijagramskom prikazu promjene temperatura struja po površini, slika 11.



Slika 11. Uz pojašnjenje crtanja  $\vartheta, A$ -dijagrama istosmjernog rekuperatora

Pored navedenog, tijekom crtanja dodatno treba paziti i na zakrivljenost, odnosno tijek temperaturnih gradijenata jedne i druge struje.

Naime iz jednadžbi (14) i (15) slijede jednadžbe temperaturnih gradijenata

$$\frac{d\vartheta_1}{dA} = -\frac{k}{C_1}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (31)$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dA} = \frac{k}{C_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (32)$$

koje pokazuju da su temperaturni gradijanti izravno proporcionalni s lokalnom temperaturnom razlikom jedne i druge struje, a neizravno proporcionalni njihovim toplinskim kapacitetima. Kako se u smjeru strujanja jedne i druge struje njihova temperaturna razlika smanjuje, to će se shodno gornjim jednadžbama, u smjeru strujanja smanjivati i apsolutni iznosi njihovih temperaturnih gradijenata. Shodno tomu, najveći temperaturni gradijanti, tj. koeficijenti nagiba tangente na temperaturnu raspodjelu struja, su kod istosmjernog aparata najveći na onoj strani aparata na kojoj struje ulaze, a najmanji na strani aparata na kojoj struje izlaze. Ili u matematičkom zapisu slijedi

$$|\operatorname{tg}\alpha_{1u}| > |\operatorname{tg}\alpha_{1i}| \quad \text{i} \quad |\operatorname{tg}\alpha_{2u}| > |\operatorname{tg}\alpha_{2i}|$$

odnosno

$$\alpha_{1u} > \alpha_{1i} \quad \text{i} \quad \alpha_{2u} > \alpha_{2i}$$

S druge pak strane, kako je  $C_1 \leq C_2$ , to znači da je apsolutni iznos temperaturnog gradijenta slabije struje, za istu vrijednost varijable  $A$ , općenito veći od temperaturnog gradijenta jače struje. (Iznimno su te vrijednosti međusobno jednake za slučaj jednakih vrijednosti njihovih toplinskih kapaciteta). To znači da je općenito

$$\alpha_1(A) > \alpha_2(A)$$

pa stoga slijede i sljedeće nejednakosti

$$\alpha_{1u} > \alpha_{2U} \quad \text{i} \quad \alpha_{1i} > \alpha_{2i}$$

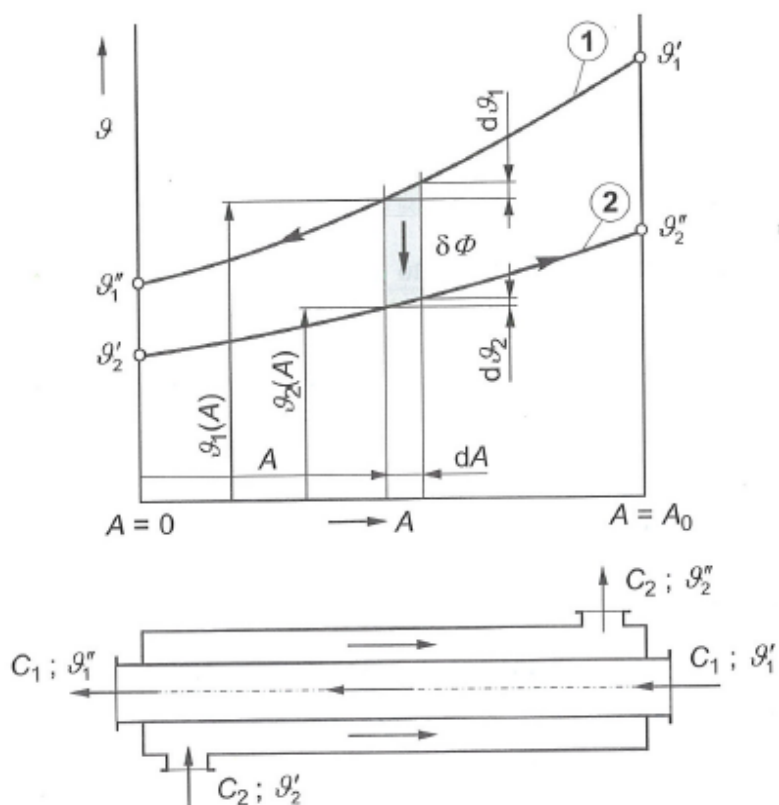
Može se nadalje ukazati i na još jedno svojstvo  $\vartheta, A$  –dijagrama. Ako se jednadžbu (13) napiše u obliku

$$\frac{\Phi(A_0)}{k} = \int_{A=0}^{A=A_0} (\vartheta_1(A) - \vartheta_2(A))dA \quad (33)$$

tada se vidi da štrafirana površina na slici 11 predstavlja, u određenom smislu, i vrijednost prenesenog toplinskog toka na ukupnoj površini  $A_0$ . Dakako isto se može tvrditi i za vrijednost toplinskog toka  $\Phi(A)$ . [1] [2] [3]

### 5.1.2 Protusmjerni rekuperator

Skicu protusmjernog rekuperatora, tipa „cijev u cijevi“, i tok temperatura jedne i druge struje prikazuje slika 12.

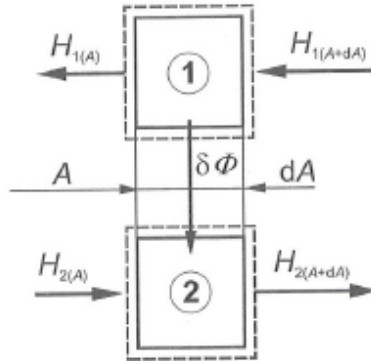


Slika 12. Temperaturne struje uzduž protusmjernog rekuperatora

Kako se i kod protusmjernog rekuperatora topline mijenjaju s površinom  $A$  temperature jedne i druge struje  $\vartheta_1(A)$  i  $\vartheta_2(A)$ , a time i njihova temperaturna razlika  $\Delta\vartheta(A) = \vartheta_1(A) - \vartheta_2(A)$ , tada i rješenje protusmjernog aparata polazi od postavljanja odgovarajućih diferencijalnih jednažbi, a



koje proizlaze iz energijske bilance postavljene za struju 1 i struju 2 na elementalnoj površini  $dA$ , kako to shematski prikazuje slika 13.



Slika 13. Uz energijsku bilancu struja

Shodno oznakama na slici 13, energijska bilanca, ishodišnog oblika  $\delta\Phi = dH$ , postavljena za struju 1 glasi

$$-\delta\Phi = H_{1(A)} - H_{1(A+dA)} \quad (a)$$

i nakon množenja s -1 prelazi u oblik

$$\delta\Phi = H_{1(A+dA)} - H_{1(A)} \quad (b)$$

Ako se u gornju jednadžbu uvrste veličine za  $H_{1(A+dA)}$  i  $H_{1(A)}$

$$H_{1(A+dA)} = C_1(\vartheta_1 - d\vartheta_1) \quad (c)$$

$$H_{1(A)} = C_1\vartheta_1 \quad (d)$$

ista se transformira u oblik

$$\delta\Phi = C_1 d\vartheta_1 \quad (e)$$

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu izraza za  $\delta\Phi$

$$\delta\Phi = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA \quad (f)$$

ista se transformira u konačni oblik diferencijalne energijske jednadžbe postavljene za struju 1

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA = C_1 d\vartheta_1 \quad (34)$$

Postavivši analognu energijsku bilancu za struju 2, adekvatno oznakama na slici 13, dobiva se oblik

$$\delta\Phi = H_{2(A+dA)} - H_{2(A)} \quad (g)$$

koji se, po provedenom postupku, analognom gornjemu, transformira na konačni oblik diferencijalne energijske jednadžbe postavljene za struju 2

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA = C_2 d\vartheta_2 \quad (35)$$

Rješavanjem sustava običnih homogenih jednadžbi (34) i (35) analognim postupkom kao kod istosmjernog aparata, prevodimo ga na homogenu diferencijalnu jednadžbu, s konstantnim koeficijentima, drugoga reda po temperaturi  $\vartheta_1$

$$\frac{d^2\vartheta_1}{dA^2} + k \frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2} \frac{d\vartheta_1}{dA} = 0 \quad (36)$$

Njena je karakteristična jednadžba

$$m^2 + k \frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2} m = 0 \quad (h)$$

čiji su korjени

$$m_1 = 0; \quad m_2 = -k \frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2} \quad (i)$$

te je opće rješenje diferencijalne jednadžbe (36)

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(A) = B_1 + B_2 \exp\left(-k \frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2} A\right) \quad (37)$$

Konstante  $B_1$  i  $B_2$  određuju se iz graničnih (rubnih) uvjeta. Prema slici 12 granični su uvjeti:

$$\begin{aligned} A = 0; \quad \vartheta_1 &= \vartheta_1''; \quad \vartheta_2 = \vartheta_2' \\ A = A_0; \quad \vartheta_1 &= \vartheta_1'; \quad \vartheta_2 = \vartheta_2'' \end{aligned} \quad (38)$$

Uvrštavanjem rubnih vrijednosti za temperaturu  $\vartheta_1$  iz gornje jednadžbe u jednadžbu (37), jednostavnim se rješenjem dolazi do traženih konstanti  $B_1$  i  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1' \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (j)$$

$$B_2 = \frac{(\vartheta_1' - \vartheta_1'') \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (k)$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi (j) i (k) u jednadžbu (37), dobiva se partikularno (posebno) rješenje funkcijske ovisnosti  $\vartheta_1(A)$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(A) = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1' \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} + \frac{(\vartheta_1' - \vartheta_1'') \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \exp\left(-\left(\frac{C_1}{C_2} - 1\right) \frac{kA}{C_1}\right) \quad (39)$$

Koristeći jednađbe (34) i (39) lako se dolazi do partikularnog rješenja funkcijskog toka  $\vartheta_2(A)$

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = \vartheta_2(A) &= \vartheta_1(A) - \frac{C_1}{k} \frac{d\vartheta_1(A)}{dA} \\ &= \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1' \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \\ &\quad + \frac{C_1}{C_2} \frac{(\vartheta_1' - \vartheta_1'') \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \exp\left(-\left(\frac{C_1}{C_2} - 1\right) \frac{kA}{C_1}\right) \end{aligned} \quad (40)$$

Iz ovih partikularnih rješenja lako se dobiva oblik funkcije  $f(\pi_2, \pi_3)$ , jednađba (11), za protusmjerni rekuperator.

Iz jednađbe (39) slijedi razlika temperatura koja se javlja u brojniku bezdimenzijske značajke  $\pi_1$

$$\vartheta_1' - \vartheta_1'' = \vartheta_1(A = A_0) - \vartheta_1(A = 0) = \frac{(\vartheta_1' - \vartheta_1'') \left(1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (l)$$

a iz jednađbi (39) i (40) slijedi temperaturna razlika koja se javlja u nazivniku dezdimenzijske značajke  $\pi_1$

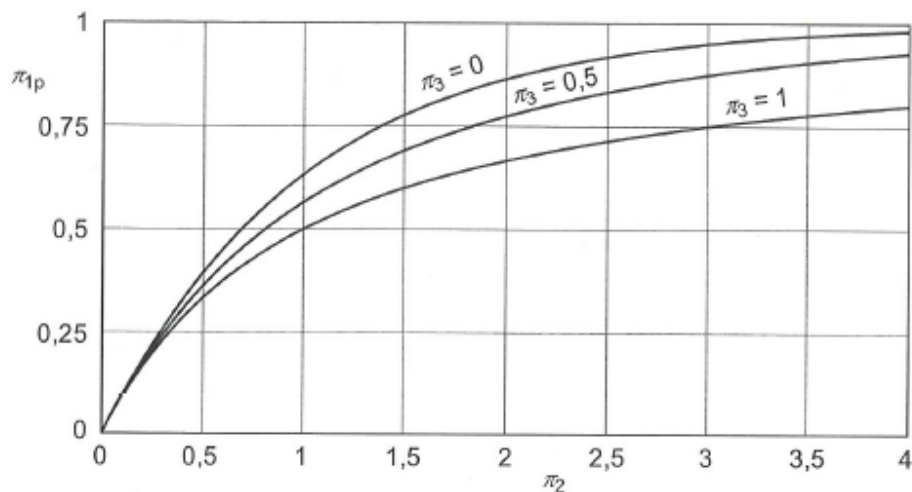
$$\vartheta_1' - \vartheta_2' = \vartheta_1(A = A_0) - \vartheta_2(A = 0) = \frac{(\vartheta_1' - \vartheta_1'') \left(1 - \frac{C_1}{C_2} \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)\right)}{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{kA_0}{C_1}\right)} \quad (m)$$

Međusobnim djelovanjem gornjih jednadžbi slijedi traženi funkcijski oblik  $\pi_{1p} = f(\pi_2, \pi_3)$ , protusmjernog aparata

$$\frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} = \frac{1 - \exp(-(1 - \pi_3)\pi_2)}{1 - \pi_3 \exp(-(1 - \pi_3)\pi_2)} = \pi_{1p} \quad (41)$$

Komparirajući gornje rješenje s rješenjem za istosmjerni aparat, jednadžba (21), vidi se da rješenja nisu ista, a što potvrđuje i već naglašenu činjenicu da međusobni smjer strujanja fluida bitno utječe na rezultate izračuna relevantnih veličina rekuperatora ( $\Phi, A_0, \vartheta_1'', \vartheta_2'', \dots$ ).

Dijagramski prikaz gornje funkcijske veze, u mjerilu, prikazuje slika 14, na kojoj su za parametarske vrijednosti  $\pi_3$  uzete 0,0 ; 0,5 i 1,0. (Inače kod korisničkih dijagrama te su parametarske vrijednosti stupnjevane po 0,1).



Slika 14. Bezdimenzijski prikaz rješenja protusmjernog rekuperatora

Radna točka, dakako, mora ležati unutar područja omeđenim krivuljama  $\pi_3 = 0$  i  $\pi_3 = 1,0$ . Dijagram se koristi na način da se iz zadanih podataka dvije bezdimenzijske značajke izračunaju, te pomoću njih se nađe u dijagramu poziciju radne točke rekuperatora, a potom se očita treću (traženu) bezdimenzijsku značajku.

Ako je  $\pi_3 = 1$ , tada to znači prema jednadžbi (9), da obje struje imaju jednake toplinske kapacitete.

Treba, nadalje naglasiti, da jednadžba (41) daje vrijednost temperatura struja samo na krajevima rekuperatora topline, a nikako vrijednosti temperatura koje padaju između krajnjih vrijednosti. Temperaturni tokovi slabije i jače struje uzduž površine dani su jednadžbama (39) i (40). Toplinski tok na ukupnoj površini računa se prema izrazu:

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) \quad (42)$$

i koji se može prevesti na bezdimenzijski oblik

$$\frac{\Phi(A_0)}{C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1)} = \pi_{1p} \quad (43)$$

Kako je u modelu proračuna protusmjernog rekuperatora topline uzeta također u obzir činjenica da nema toplinskog toka s njegovim okolišem, tada vrijede i sljedeći zapisi:

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = C_2(\vartheta''_2 - \vartheta'_2) \quad (44)$$

odnosno

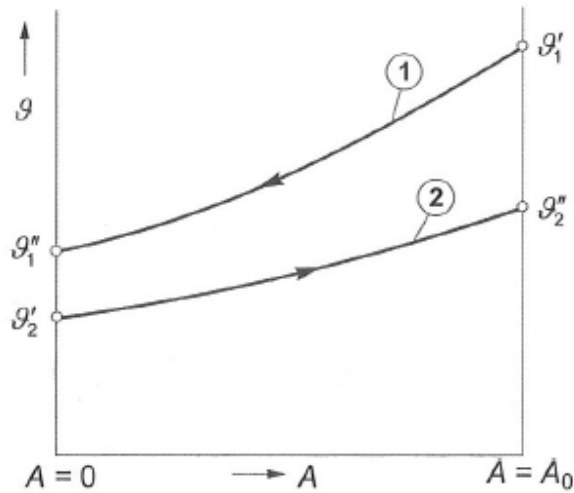
$$\Phi(A) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta_1(A)) = C_2(\vartheta_2(A) - \vartheta'_2) \quad (45)$$

### 5.1.2.1 Neke opaske za crtanje $\vartheta, A$ –dijagrama

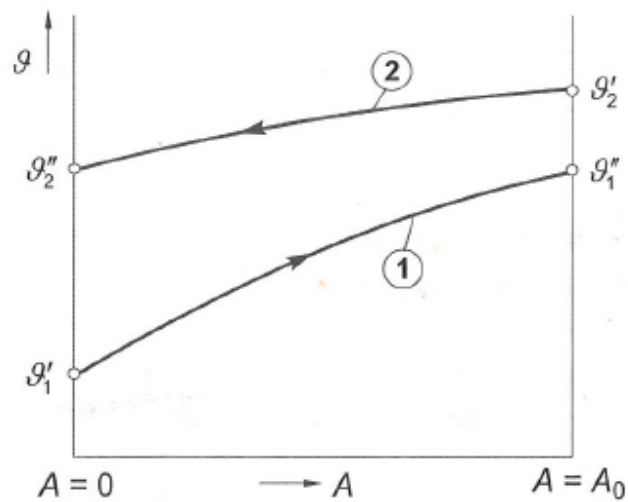
Tijekom crtanja  $\vartheta, A$  –dijagrama kod protusmjernog rekuperatora, potrebno je voditi računa o činjenicama koje su navedene u točki 5.1.1.1:

- slabija struja, prolaskom kroz aparat, više mijenja svoju temperaturu nego li jača struja
- temperaturni gradijenti struja  $d\vartheta_1/dA$  i  $d\vartheta_2/dA$  su izravno proporcionalni lokalnim temperaturnim razlikama struja, a neizravno njihovim toplinskim kapacitetima.

Akceptirajući navedene činjenice  $\vartheta, A$  –dijagram protusmjernog aparata može izgledati shodno prikazu na slikama 15 i 16.



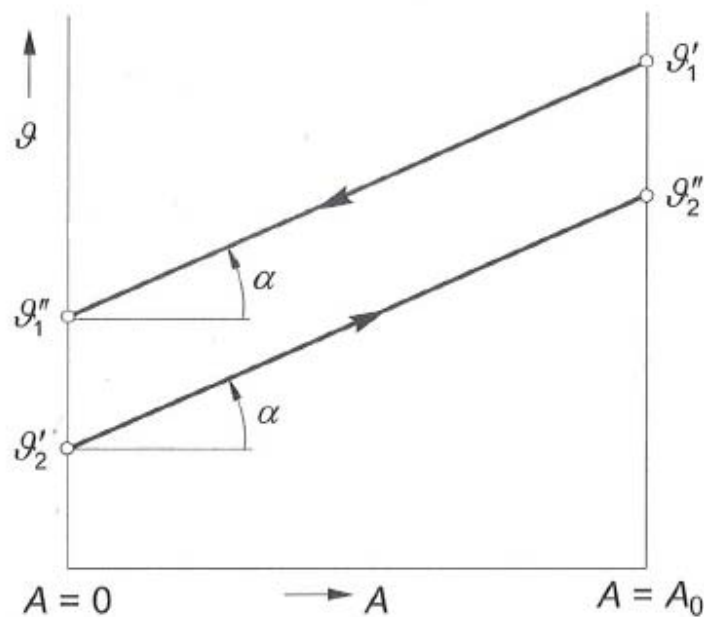
Slika 15. Temperaturne struje kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja ujedno i slabija struja



Slika 16. Temperaturne struje kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja ujedno i jača struja

U slučaju da se radi o protusmjernom rekuperatoru kod kojeg je bezdimenzijska značajka  $\pi_3 = 1$  tj.,  $C_1 = C_2$ , tada iz diferencijalnih jednažbi (34) i (35) proizlazi da obje struje imaju jednake temperaturne gradijente i jednake temperaturne promjene, pa su tada tokovi temperatura struja u  $\vartheta, A$  –dijagramu međusobno paralelni pravci, slika 17, s koeficijentom nagiba

$$\frac{d\vartheta_1}{dA} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{A_0} = \frac{d\vartheta_2}{dA} = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{A_0} = tg\alpha \quad (46)$$



Slika 17. Temperature struja jednakih toplinskih kapaciteta kod protusmjernog rekuperatora

Toplinski tok za ovaj slučaj, može se dakako računati po jednažbi (44), ili, također vrlo jednostavno po jednažbi (13)

$$\Phi(A_0) = \int_{A=0}^{A=A_0} k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA$$

Kako je u ovom slučaju temperaturna razlika po površini  $A$  konstantna, tada se veličinu  $k(\vartheta_1 - \vartheta_2) = k\Delta\vartheta A_0$  smije izvući ispred znaka integrala, pa je vrlo jednostavno rješenje gornjeg integrala

$$\Phi(A_0) = k\Delta\vartheta A_0 \quad (47)$$

pri čemu se  $\Delta\vartheta$  može izraziti kao

$$\Delta\vartheta = \vartheta'_1 - \vartheta''_2 = \vartheta''_1 - \vartheta'_2 \quad (48)$$

### 5.1.3 Križni (unakrsni) rekuperator

Kod križnog rekuperatora, za razliku od istosmjernog i protusmjernog kod kojih struje teku međusobno paralelno, struje se međusobno križaju (ukrštaju). Iz te činjenice proizlazi da je temperatura jedne i druge struje, kod istosmjernog i protusmjernog aparata, funkcija samo jedne prostorne koordinate, jer je kod njih diferencijal površine  $dA$  jednak

$$dA = Bdx \quad (49)$$

gdje je  $x$  načelno koordinata koja se podudara s pravcem strujanja struja, a veličina  $B$  (širina ili neka druga konstantna veličina) je okomita na koordinatu  $x$ .

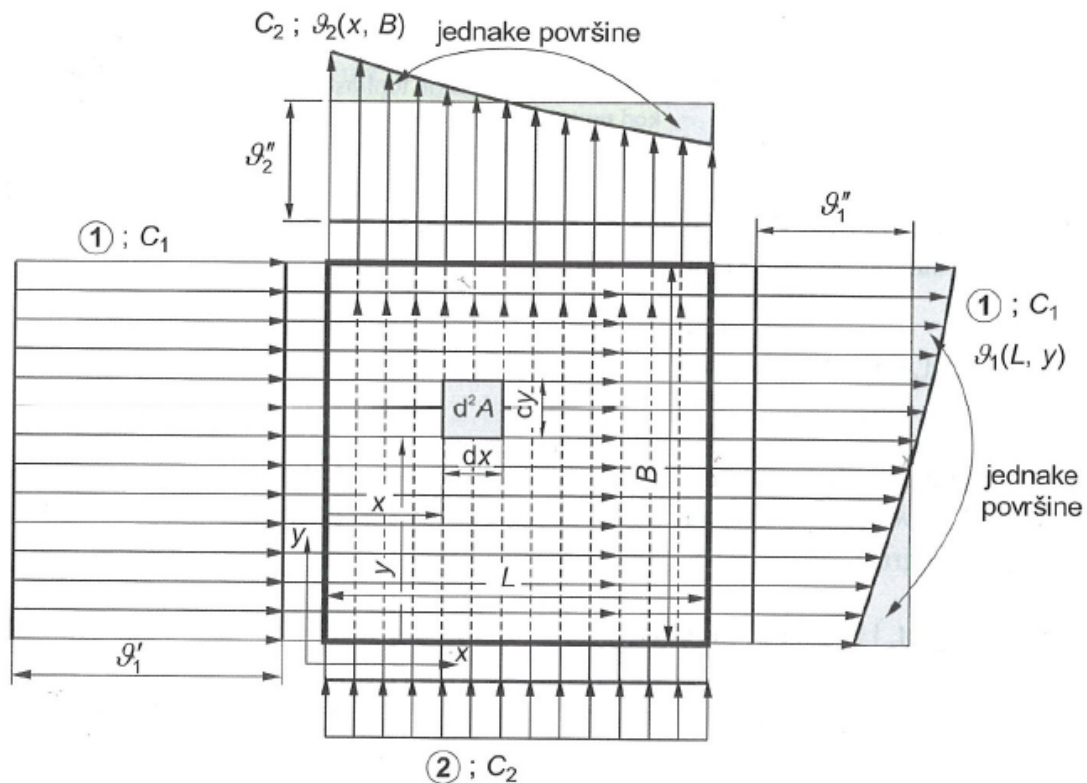
No kod križnog aparata temperature struja su funkcije dviju prostornih koordinata, recimo  $x$  i  $y$ , pa je  $\vartheta_1 = \vartheta_1(x, y)$  i  $\vartheta_2 = \vartheta_2(x, y)$ , jer je kod njega diferencijal površine

$$d^2A = dx dy \quad (50)$$

Stoga temperature strujnica obiju struja na izlaznim bridovima nisu konstantne, kao što je to bilo kod prethodna dva slučaja.

U cilju matematičke razrade kao primjer promotramo pločasti križni rekuperator prema slici 18.





Slika 18. Križni rekuperator s temperaturama struja na ulaznim i izlaznim bridovima

Na gornjoj strani rekuperatora u smjeru osi  $x$  struji fluid 1 konstantne ulazne temperature  $\vartheta_1'$  na  $x = 0$ , a s donje strane ploče u smjeru osi  $y$  struji fluid 2 konstantne ulazne temperature  $\vartheta_2'$ , na  $y = 0$ . Dužina ploča je  $L$ , a širina  $B$ , pa je ukupna površina jednaka

$$A_0 = LB \quad (51)$$

Nadalje, neka je struja 1 toplija struja, pa će se od nje struji 2, preko elementarne površine predati diferencijalni toplinski tok

$$\begin{aligned} \delta^2 \Phi &= k(\vartheta_1(x, y) - \vartheta_2(x, y))d^2A \\ &= k(\vartheta_1(x, y) - \vartheta_2(x, y))dx dy \end{aligned} \quad (52)$$

Ukupni toplinski tok dobije se integriranjem gornje jednadžbe po cjelokupnoj površini

$$\Phi = k \int_{y=0}^B \int_{x=0}^L (\vartheta_1(x, y) - \vartheta_2(x, y)) dx dy \quad (53)$$

Dakako da je za rješenje gornjeg integrala potrebno poznavanje funkcijskih veza  $\vartheta_1(x, y)$  i  $\vartheta_2(x, y)$ , do kojih se dolazi analognim, mada ne i jednako lakim, postupkom kao i kod prethodna dva aparata.

Postavljanjem energijske bilance na elementu površine za struju 1 dobiva se

$$\delta^2 \Phi = -dC_1 d\vartheta_1 \quad (a)$$

odnosno zajedno s (54)

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2) dx dy = -dC_1 d\vartheta_1 \quad (b)$$

(Predznak – je zbog toga što se s povećavanjem osi  $x$ , temperatura struje 1 smanjuje).

Diferencijal toplinskog kapaciteta strujnice struje 1,  $dC_1$ , je upravo onaj koji se nalazi na širini  $dy$  površine  $dx dy$ , i on je jednak

$$dC_1 = \frac{C_1}{B} dy \quad (c)$$

Kako se, a što je već naglašeno zbog dvodimenzijskog širenja topline, temperaturna struja mijenja i u smjeru osi  $x$  i u smjeru osi  $y$ , diferencijalna veličina  $d\vartheta_1$  je jednaka

$$d\vartheta_1 = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} dx \quad (d)$$

uvrštavanjem (c) i (d) u (b) dobiva se parcijalnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2) dx dy = -\frac{C_1}{B} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} dx dy \quad (54)$$

Analognom bi se procedurom dobilo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu energijske bilance postavljene na diferencijalnoj površini za struju 2, uzevši pri tome da je

$$dC_2 = \frac{C_2}{L} dx \quad (e)$$

$$d\vartheta_2 = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dy \quad (f)$$

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2) dx dy = \frac{C_2}{L} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dx dy \quad (55)$$

Jednadžbe (54) i (55) nakon skraćivanja s  $dx dy$  poprimaju oblike

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -\frac{C_1}{B} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \quad (56)$$

$$k(\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{C_2}{L} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \quad (57)$$

Jednadžbe (56) i (57), kao i njihovi prethodni oblici, predstavljaju sustav od dvije parcijalne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, i tome su sustavu pripadajući rubni (granični) uvjeti:

$$\begin{array}{llll} \text{za} & x = 0; & \vartheta_1 = \vartheta'_1; & \text{za} & x = L; & \vartheta_1 = \vartheta''_1 \\ \text{za} & y = 0; & \vartheta_2 = \vartheta'_2; & \text{za} & y = B; & \vartheta_2 = \vartheta''_2 \end{array} \quad (58)$$

Ako se u sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi umjesto koordinata  $x, y$  uvedu bezdimenzijske prostorne koordinate

$$\xi = \frac{kB}{C_1} x \quad \text{i} \quad \eta = \frac{kL}{C_2} y, \quad (59)$$

tada taj sustav prelazi u oblik

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi} = \vartheta_2 - \vartheta_1 \quad (60)$$

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \eta} = \vartheta_1 - \vartheta_2 \quad (61)$$

Gornji sustav jednadžbi prvi je riješio Nusselt. Njegovo rješenje može se nešto pojednostavljenim načinom pisanja predstaviti razvojem u red, pa je bezdimenzijsko rješenje promjene temperature  $\vartheta_1 = \vartheta_1(\xi, \eta)$

$$\frac{\vartheta_1 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = 1 - \exp(-(\xi + \eta)) \left[ \xi + \frac{\xi^2}{2!} (1 + \eta) + \frac{\xi^3}{3!} \left( 1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} \right) + \dots + \frac{\xi^n}{n!} \left( 1 + \frac{\eta^2}{2!} + \dots + \frac{\eta^n}{n!} \right) \right] \quad (62)$$

dok je bezdimenzijsko rješenje temperature  $\vartheta_1 = \vartheta_2(\xi, \eta)$

$$\frac{\vartheta_2 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = 1 - \exp(-(\xi + \eta)) \left[ 1 + \xi(1 + \eta) + \frac{\xi^2}{2!} \left( 1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} \right) + \dots + \frac{\xi^n}{n!} \left( 1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} + \dots + \frac{\eta^n}{n!} \right) \right] \quad (63)$$

Nusselt je iz dobivenih rješenja (62) i (64) odredio bezdimenzijsku prosječnu izlaznu temperaturu  $\theta_{m1}$

$$\theta_{m1} = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}, \quad (64)$$

koju je prikazao tablično, tablica 1, ili dijagramski, u ovisnosti o bezdimenzijskim parametrima  $a$  i  $b$

$$a = \frac{kLB}{C_2}; \quad b = \frac{kLB}{C_2}. \quad (65)$$

Tablica 1. Prosječna bezdimenzijska vrijednost izlazne temperature  $\theta_{m1}$  u funkciji bezdimenzijskih parametara  $a$  i  $b$

$a \backslash b$	0,0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0
0,0	1,0	0,60653	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832
1,0	1,0	0,72632	0,52378	0,26759	0,13398	0,06957
2,0	1,0	0,80117	0,63376	0,38571	0,22709	0,12383
3,0	1,0	0,84547	0,71132	0,48461	0,31772	0,20272
4,0	1,0	0,87992	0,76645	0,56449	0,40180	0,27092

Iz očitane vrijednosti  $\theta_{m1}$  iz gornje tablice, pomoću jednadžbe (64) izračuna se prosječnu izlaznu temperaturu  $\vartheta_1''$ , koju se može iskoristiti za izračunavanje toplinskog toka na ukupnoj površini  $A_0$  križnog rekuperatora.

No prije detaljnijeg pojašnjenja tog načina računanja, pojasnimo detaljnije smisao izlaznih temperatura slabije i jače  $\vartheta_1''$ ,  $\vartheta_2''$ .

Kako je već ranije rečeno, kod istosmjernih i protusmjernih rekuperatora,  $\vartheta_1'$ ,  $\vartheta_1''$ ,  $\vartheta_2'$ ,  $\vartheta_2''$  predstavljaju temperature svih strujnica slabije i jače struje na ulazu u aparatu odnosno izlazu iz aparata. Kod križnog aparata samo su ulazne temperature  $\vartheta_1'$ ,  $\vartheta_2'$  temperature svih strujnica, dok na izlaznim bridovima  $x = L$  i  $y = B$  križnog aparata, zbog dvodimenzijskog širenja topline, sve strujnice ne mogu imati iste temperature. Neke će se strujnice zagrijavati jače, a neke slabije.

Stoga ovdje izlazne temperature  $\vartheta_1''$  i  $\vartheta_2''$ , predstavljaju prosječne izlazne temperature slabije i jače struje, temperature koje bi te struje poprimile kada bi izlazne strujnice jedne odnosno druge struje dobro izmiješali u izoliranim mješalištima. Ili, matematički zapisano smisao ovih temperatura jest

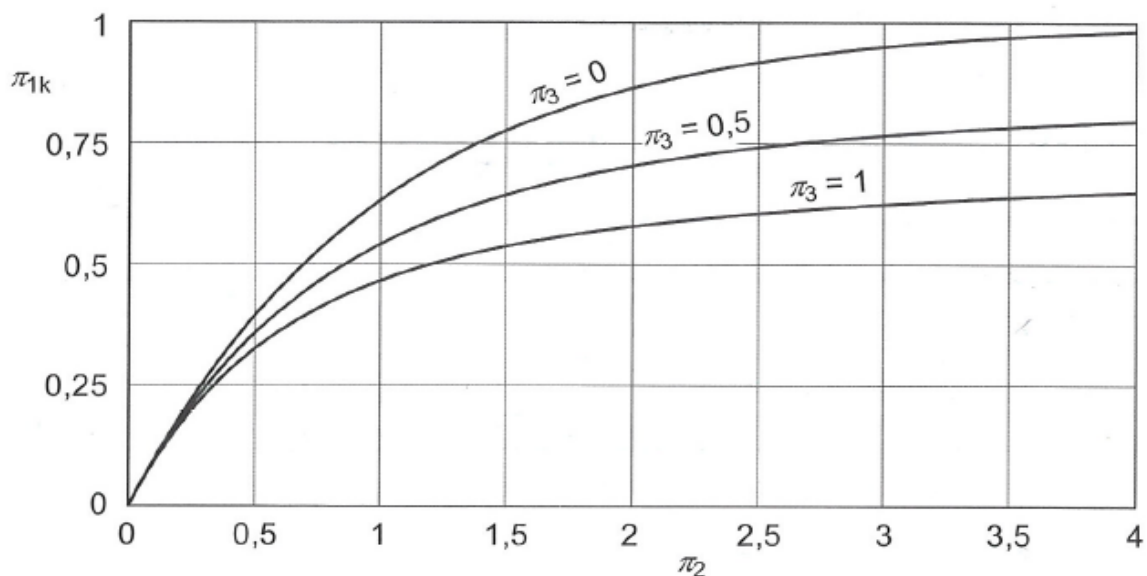
$$\vartheta_1'' = \frac{1}{B} \int_{y=0}^{y=B} \vartheta_1(x=L, y) dy \quad (68)$$

$$\vartheta_2'' = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} \vartheta_2(x, y=B) dx \quad (69)$$

a koji je zorno je prikazan na slici 18.

Na osnovi tabličnih ili dijagramskih Nusseltovih rezultata može se zaobilazno prikazati ovisnost bezdimenzijske funkcije  $\pi_{1k}$  (vrijednost funkcije  $f$  u jednadžbi (11)) o bezdimenzijskim značajkama  $\pi_2$  i  $\pi_3$  i rezultate takva proračuna moguće je prikazati formalno u istom obliku kao i za dva prethodna tipa, tj.,

$$\pi_{1k} = f(\pi_2, \pi_3) \quad (70)$$



Slika 19. Bezdimenzijski prikaz rješenja križnog rekuperatora

Način korištenja dijagramom formalno je isti kao i kod prethodna dva tipa rekuperatora.

Znajući temperaturni tijek jedne i druge struje, jednačbe (62) i (63) moguće je pomoću (53) izračunati toplinski tok. No sigurno je da bi takav način proračuna bio izvanredno kompliciran, pa se proračun izvodi preko prosječne izlazne temperature

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = \frac{kA_0}{b}(\vartheta'_1 - \vartheta''_1), \quad (69)$$

pri čemu je  $C_1$  uzet iz jednačbe (65).

Prema jednačbi (64) slijedi

$$\vartheta'_1 - \vartheta''_1 = (\vartheta'_1 - \vartheta'_2)(1 - \Theta_{m1}) \quad (70)$$

Supstituirajući (70) u (69) dobiva se također jedan od izraza za toplinski tok

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'_2)(1 - \Theta_{m1}), \quad (71)$$

i kojeg se može prikazati u bezdimenzijskom obliku

$$\frac{\Phi(A_0)}{C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'_2)} = 1 - \Theta_{m1} = \pi_{1k} \quad (72)$$

Prosječnu izlaznu temperaturu jače struje lako se dobije iz energijske bilance križnog aparata

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = C_2(\vartheta''_2 - \vartheta'_2), \quad (73)$$

a odatle slijedi

$$\vartheta''_2 = \vartheta'_2 + \frac{C_1}{C_2}(\vartheta'_1 - \vartheta''_1). \quad (74)$$

## 5.2 Specijalni slučajevi

Promatrimo neke specijalne (posebne) slučajeve glede temperaturnog ponašanja struja u izmjenjivačima topline.

### 5.2.1 Slučaj kada jedna od struja ili kondenzira ili isparuje

Ako se u jednačbe (21), (41) te u formalno naznačeni oblik jednačbe (68) uvrsti  $\pi_3 = 0$ , dobiva se istu vrijednost funkcije  $\pi_{1i}$ ,  $\pi_{1p}$ ,  $\pi_{1k}$ :

$$\pi_{1i} = \pi_{1p} = \pi_{1k} = 1 - \exp(-\pi_2), \quad (75)$$

što znači da tada tip rekuperatora nije bitan.

Stoga promatramo slučajeve kod kojih je ispunjen uvjet  $\pi_3 = 0$ .

Prema jednadžbama (2), (3) i (9) je

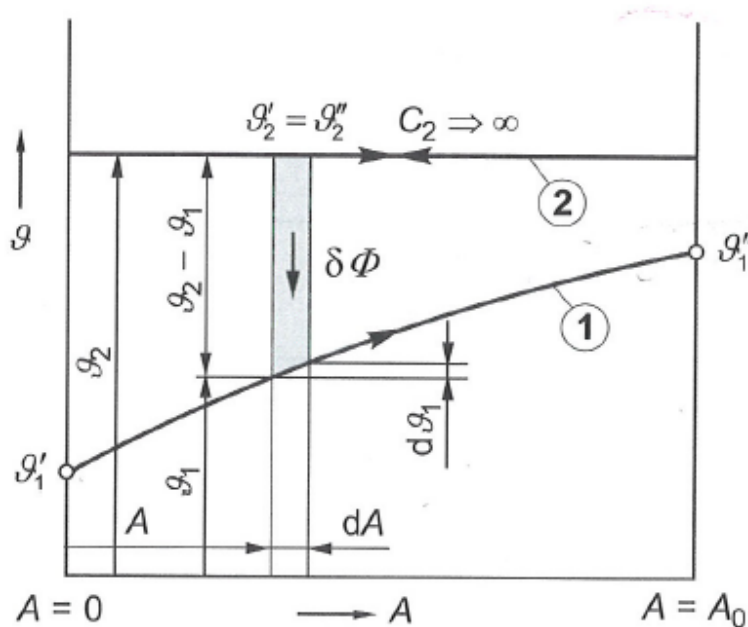
$$\pi_3 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{q_{m1} c_{p1}}{q_{m2} c_{p2}},$$

A da bi taj izraz težio nuli, jedno je rješenje, kao fizikalno prihvatljivo, ako specifični toplinski kapacitet  $c_{p2}$  teži u beskonačnost.

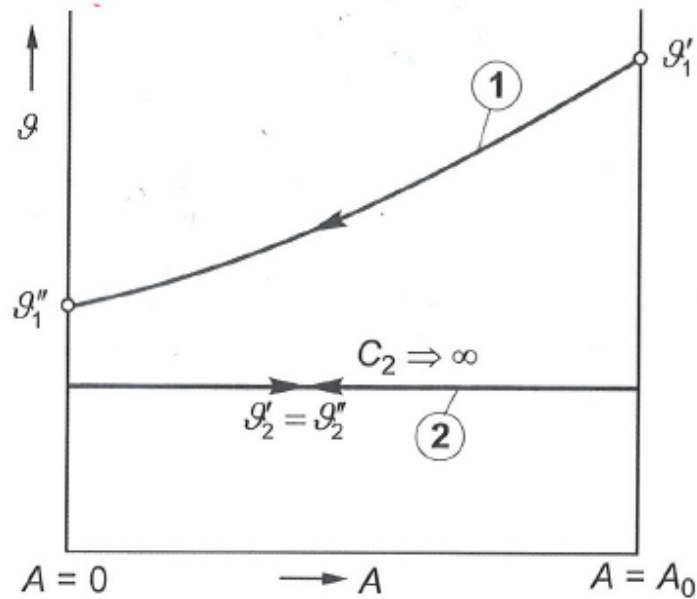
Iz Termodinamike I poznata je definicija specifičnog toplinskog kapaciteta pri konstantnom tlaku

$$c_p = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \right)_p = \left( \frac{\partial h}{\partial \vartheta} \right)_p, \quad (76)$$

koja pokazuje da on postaje beskonačno velik kod takvih pojava kod kojih se toplina prenosi pri konstantnom tlaku uz temperaturni zastoje ( $\vartheta = \text{konst.}$ ). Prema tome, ako u nekom rekuperatoru jedna struja ili kondenzira ili isparuje, slika 20 i 21, njezin toplinski poprima beskonačnu vrijednost ( $C_2 \Rightarrow \infty$ ), pa je tada ispunjen uvijet  $\pi_3 = C_1/C_2 = 0$ .



Slika 20. Temperature struja pri kondenzaciji



Slika 21. Temperature struja pri isparivanju

Isti uvjet vrijedi i za kondenzaciju pregrijane pare, jer je tada njezin toplinski kapacitet  $C_2$  beskonačno velik, iako se pri tome temperatura pare promjenila od temperature pregrijanja do temperature zasićenja. To je zbog toga što one čestice pregrijane pare koje dođu u dodir s stijenkom kojoj je temperatura manja od temperature zasićenja za pripadajući tlak,  $\theta_s < \theta' = f(p)$ , (nužni uvjet za kondenzaciju), trenutno izgube svoju toplinu pregrijanja i ohlade se na temperaturu zasićenja  $\theta'$ . Kod te konstantne temperature zasićenje ove čestice kondenziraju, stvarajući na stjenki film (ili kapljice) kondenzata te temperature zasićenja. Ta temperatura zasićenja je konstantna u cijelom aparatu, pa je ona mjerodavna za predanu toplinu, iako jezgra pare, koja se još uvijek nije ohladila te ima moguće i mnogo višu temperaturu. Zato je ispravno da se kondenzatori, u kojima kondenzira pregrijana pregrijana para, proračunavaju uz uvjet  $\pi_3 = 0$ .

Ako nije ispunjen uvjet kondenzacije zbog premalo odvedenog toplinskog toka  $\Phi$  pari, tj. ako je  $\theta_s > \theta' = f(p)$ , do pojave kondenzacije neće doći, i tada se takav aparat računa isto kao i bilo koji drugi u kojem se hladi neki drugi plin.



Promjenu temperature slabije struje uzduž površine  $A$ ,  $\vartheta_1(A)$ , za slučaj kondenzacije i isparivanja dobiva se ako se u jednadžbi (77) u značajku  $\pi_3$  umjesto  $A_0$ , uvrsti varijabilnu površinu  $A$ , koja se mijenja u intervalu  $0 \leq A \leq A_0$ ,

$$\frac{\vartheta'_1 - \vartheta_1(A)}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = 1 - \exp\left(-\frac{kA}{C_1}\right),$$

a odatle proizlazi

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(A) = \vartheta'_1 - (\vartheta'_1 - \vartheta'_2) \left(1 - \exp\left(-\frac{kA}{C_1}\right)\right) \quad (77)$$

Jednadžbu (75) dobilo se kao specijalni slučaj općeg rješenja, za koje je rješavan sustav od dvije diferencijalne jednadžbe. No kako u promatranom posebnom slučaju, temperatura jače struje je konstantna uzduž površine, to znači da rješenje tog problema počiva na rješenju samo jedne diferencijalne jednadžbe zajedno s jednim njoj pridruženim rubnim uvjetom. Ta diferencijalna jednadžba proizlazi iz energijske bilance postavljene na diferencijalnoj površini za slabiju struju. Shodno, recimo slici 20, ta je jednadžba

$$k(\vartheta_2 - \vartheta_1)dA = C_1 d\vartheta_1 \quad (a)$$

koju se, metodom separacije varijabli, lako transformira na oblik

$$\frac{d\vartheta_1}{\vartheta_1 - \vartheta_2} = -\frac{k}{C_1} dA \quad (b)$$

čije opće rješenje glasi

$$\ln(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -\frac{kA}{C_1} + \ln K \quad (c)$$

Integracijsku konstantu  $K$  dobija se uvrštavanjem rubnog uvjeta

$$A = 0; \quad \vartheta_1 = \vartheta'_1 \quad (d)$$

u jednadžbu (c)

$$\ln K = \ln(\vartheta'_1 - \vartheta_2) = \ln(\vartheta'_1 - \vartheta'_2) \quad (e)$$

Vraćanjem (e) u (c), jednostavnim sređivanjem, dobiva se bezdimenzijsko rješenje

$$\frac{\vartheta_1 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \exp\left(-\frac{kA}{C_1}\right), \quad (78)$$

iz kojeg se lako dobiva bezdimenzijsko rješenje oblika  $\pi_1 = f(\pi_2)$

$$\pi_1 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} - \frac{\vartheta'_1 - \vartheta_1}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = 1 - \exp\left(-\frac{kA}{C_1}\right) = 1 - \exp(-\pi_2) \quad (f)$$

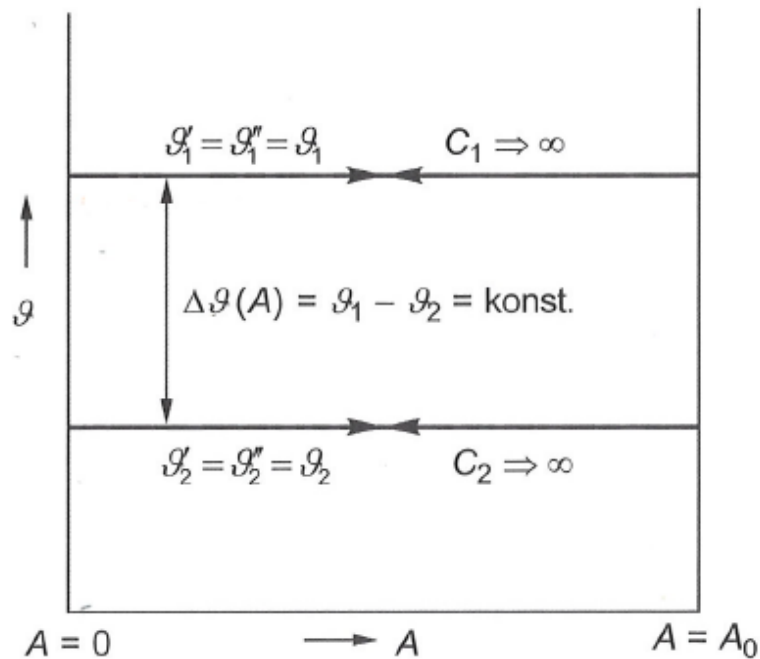
i koje je identično obliku rješenja (75). [1] [2] [3]

### 5.2.2 Slučaj kada jedna struja kondenzira a druga isparuje

Ako u izmjenjivaču topline jedna struja kondenzira, a druga struja isparuje, tada obje struje imaju beskonačnu vrijednost toplinskog kapaciteta. Tada im tijekom prijenosa toplinskog toka ostaju temperature, uzduž površine aparata, konstantne. Dakako vrijednosti im odgovaraju temperaturama zasićenja za pripadajuće tlakove. Za taj slučaj u  $\vartheta, A$  –dijagramu su to dva horizontalna pravca, kako to prikazuje slika 22.

Kako se u ovom slučaju radi o konstantnim temperaturama jedne i druge struje uzduž površine, tada se izmjenjeni toplinski tok na cjelokupnoj površini,  $\Phi(A_0)$ , računa prema izrazu

$$\Phi(A_0) = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)A_0 \quad (79)$$



Slika 22. Raspored temperatura u rekuperatoru u kojem jedna struja kondenzira (gornji pravac), a druga isparava (donji pravac)

u kojem  $\vartheta_1$  označuje, shodno slici 22, temperaturu zasićenja pare koja kondenzira, a  $\vartheta_2$  temperaturu zasićenja kapljevine koja isparuje (vrela kapljevine). [1]

## 6. JEDNOSTAVNI PRORAČUN REKUPERATORA

Promatrajući dobivene integralne izraze određenih veličina primjećuje se da se radi o istom tipu formula u određenim oblicima tih izraza. To znači da postoje jedinstveni izrazi za proračun određenih veličina kod izmjenjivača topline bez obzira na tip aparata.

Tako se toplinski tok  $\Phi$  na ukupnoj površini  $A_0$  u bilo kojem aparatu računa prema izrazu

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = C_2(\vartheta''_2 - \vartheta'_2), \quad (80)$$

Jednadžbom (7) definirana je bezdimenzijska značajka  $\pi_1$

$$\pi_1 = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2},$$

pa ako se uvrsti  $(\vartheta'_1 - \vartheta''_1)$  iz gornje jednadžbe u jednadžbu (80), dobiva se

$$\pi_1 = \frac{\Phi}{C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'_2)}, \quad (81)$$

Iz jednadžbi (80) i (81) mogu se izvesti sljedeći izrazi za ukupni toplinski tok:

$$\Phi = C_1(\vartheta''_1 - \vartheta''_2) \frac{\pi_1}{1 - (1 + \pi_3)\pi_1} \quad (82)$$

$$\Phi = C_1(\vartheta''_1 - \vartheta'_2) \frac{\pi_1}{1 - \pi_1} \quad (83)$$

$$\Phi = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_2) \frac{\pi_1}{1 - \pi_3\pi_1} \quad (84)$$

Iz jednadžbi (80) i (81) dobivaju se omjeri temperaturnih razlika [1]

$$\frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \pi_1, \quad (85)$$

$$\frac{\vartheta''_2 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \pi_3\pi_1, \quad (86)$$

$$\frac{\vartheta''_1 - \vartheta''_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = 1 - (1 + \pi_3)\pi_1, \quad (87)$$

$$\frac{\vartheta''_1 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = 1 - \pi_1, \quad (88)$$

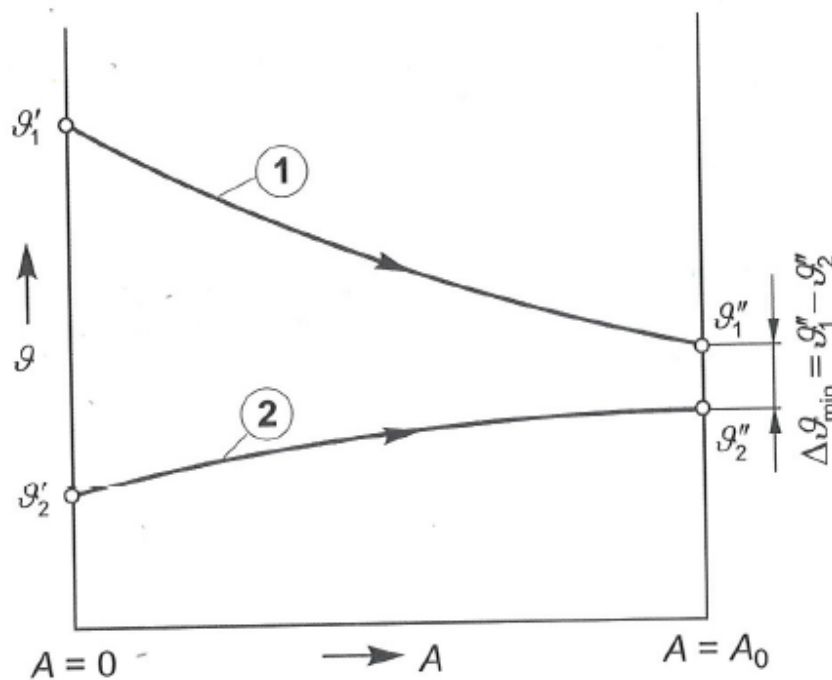
$$\frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = 1 - \pi_3\pi_1, \quad (89)$$

## 7. MINIMALNA TEMPERATURNNA RAZLIKA

Često puta u praksi neće biti zadane izlazne temperaturne struje, nego će biti zadane neprekoračiva minimalna temperaturna razlika struja,  $\Delta\vartheta_{min}$ , na jednom od krajeva rekuperatora. Postavlja se pitanje na kojem se kraju pojedinih tipova rekuperatora uspostavlja minimalna temperaturna razlika  $\Delta\vartheta_{min}$ ? [1]

### 7.1 Istosmjerni rekuperator

Jasno je, a što se vidi i iz slike 23, da se minimalna temperaturna razlika  $\Delta\vartheta_{min}$  kod ovog tipa aparata uspostavlja na onom kraju na kojem struje izlaze.



Slika 23. Minimalna temperaturna razlika kod istosmjernog rekuperatora

Ta je minimalna temperaturna razlika jednaka

$$\Delta\vartheta_{min} = \vartheta''_1 - \vartheta''_2, \quad (90)$$

i vidi se da je ona sadržana u brojniku lijeve strane jednadžbe (87), pa se i bezdimenzijsku temperaturnu funkciju  $\pi_1$ , istosmjernog aparata može izraziti u funkciji minimalne temperaturne razlike

$$\pi_{1i} = \frac{1 - \frac{\Delta\vartheta_{min}}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}}{1 + \pi_3} \quad (91)$$

## 7.2. Protusmjerni i križni rekuperator

Da bi se dobio odgovor na pitanje na kojem se kraju kod ovih dvaju aparata uspostavlja minimalna temperaturna razlika, polazi se od jednadžbe (82),

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta_1' - \vartheta_1'') = C_2(\vartheta_2'' - \vartheta_2'),$$

Kako se prema dogovoru s  $C_1$  označuje toplinski kapacitet slabije struje tj.  $C_1 \leq C_2$ , slijedi iz jednadžbe (82) da će slabija struja prolaskom kroz rekuperator više mijenjati svoju temperaturu, pa stoga mora vrijediti nejednakost (jednakost)

$$\vartheta_1' - \vartheta_1'' \geq \vartheta_2'' - \vartheta_2', \quad (92)$$

i odatle slijedi da je

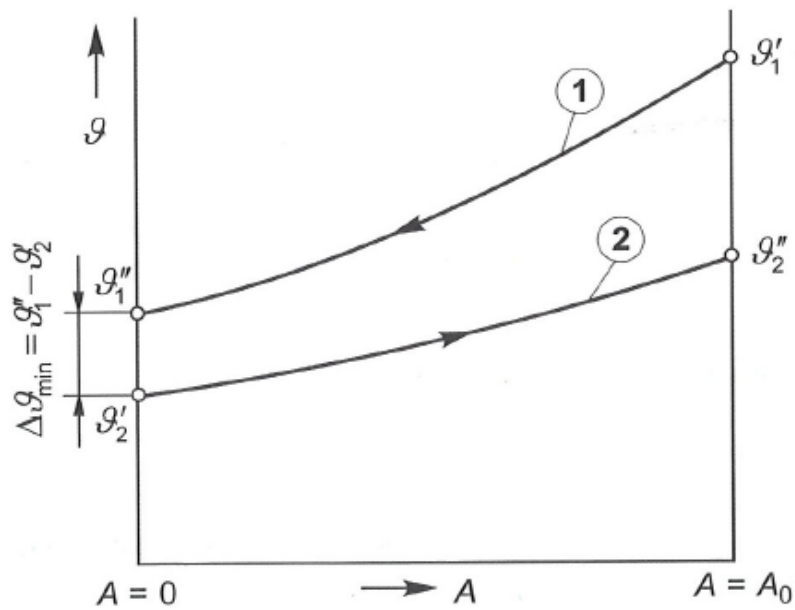
$$\vartheta_1'' - \vartheta_2' \leq \vartheta_1' - \vartheta_2'', \quad (93)$$

Kako pojedine strane gornje nejednadžbe (jednadžbe) predstavljaju razlike temperatura struja na krajevima rekuperatora, to znači da je minimalna temperaturna razlika, kod protusmjernog i križnog rekuperatora, jednaka

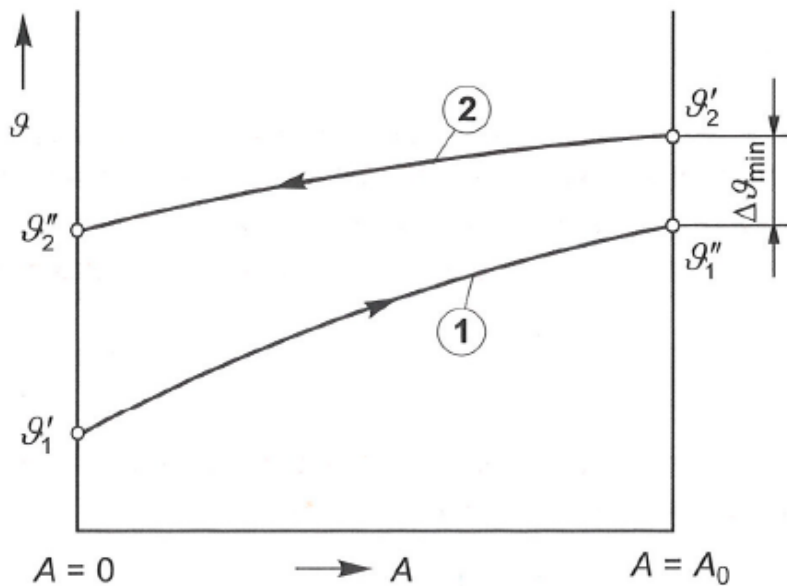
$$\Delta\vartheta_{min} = \vartheta_1'' - \vartheta_2', \quad (94)$$

tj. uspostavlja se na onom kraju na kojemu izlazi slabija struja.

Dijagrami na slikama 24 i 25 prikazuju gornju tvrdnju za slučaj da je toplija struja slabija odnosno da je toplija struja jača struja.



Slika 24. Minimalna temperaturna razlika kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja slabija struja



Slika 25. Minimalna temperaturna razlika kod protusmjernog rekuperatora za slučaj da je toplija struja jača struja

Za slučaj da je  $C_1 = C_2$ , promjena temperature jedne i druge struje slijedi zakon pravca, pa je na oba kraja aparata ista temperaturna razlika. [1]

Iz jednadžbe (94) i (88) lako se bezdimenzijsku temperaturnu funkciju  $\pi_1$ , kod protusmjernog odnosa križnog aparata, može izraziti pomoću minimalne temperaturne razlike

$$\pi_{1p} = 1 - \frac{\Delta\vartheta_{min}}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} \quad (95)$$

## 8. SREDNJA LOGARITAMSKA RAZLIKA TEMPERATURA

Često puta se u literaturi prikazuje proračun rekuperatora pomoću srednje logaritamske razlike temperatura struja  $\Delta\vartheta_m$ , tako da izraz ta toplinski tok na ukupnoj površini  $A_0$  glasi

$$\Phi(A_0) = kA_0\Delta\vartheta_m, \quad (96)$$

Isti  $\Phi(A_0)$  može se odrediti i prema jednadžbi (81)

$$\Phi(A_0) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'_2)\pi_1,$$

pa spajanjem gornjih jednadžbi dobiva se jednadžba kojom se određuje srednja logaritamska temperaturna razlika

$$\frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}, \quad (97)$$

što pokazuje da je srednja logaritamska razlika temperatura, svedena na razliku ulaznih temperatura jedne i druge struje, određena bezdimenzijskim veličinama  $\pi_1$  i  $\pi_2$ . Kako je bezdimenzijska  $\pi_1$  značajka funkcija bezdimenzijskih značajki  $\pi_2$  i  $\pi_3$ , to znači da se i bezdimenzijsku logaritamsku temperaturnu razliku može prikazati u funkciji

$$\frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = f_m(\pi_2, \pi_3) \quad (98)$$

Oblik funkcije  $f_m$  ovisi dakako o tomu aparatu, pa se njezin oblik za istosmjerni aparat nakon uvrštavanja jednadžbe (21) u jednadžbu (97)

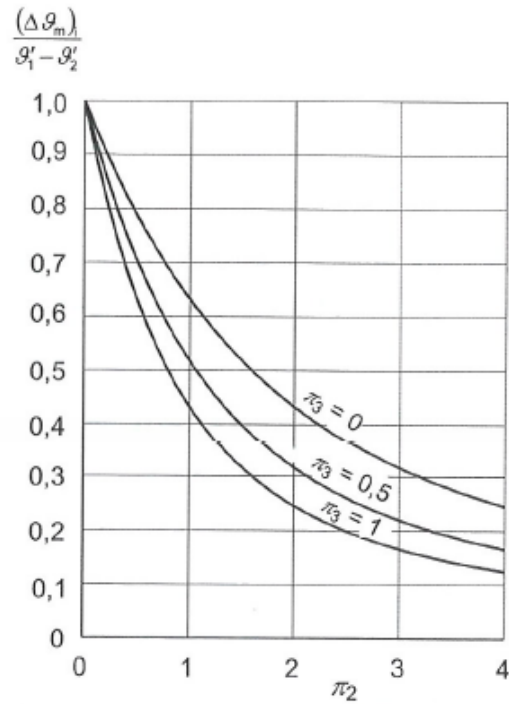
$$\frac{(\Delta\vartheta_m)_i}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \frac{1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2)}{\pi_2 + \pi_3\pi_2} \quad (99)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (41) u jednadžbu (95) dobiva se oblik funkcije  $f_m$  za protusjerni aparat topline

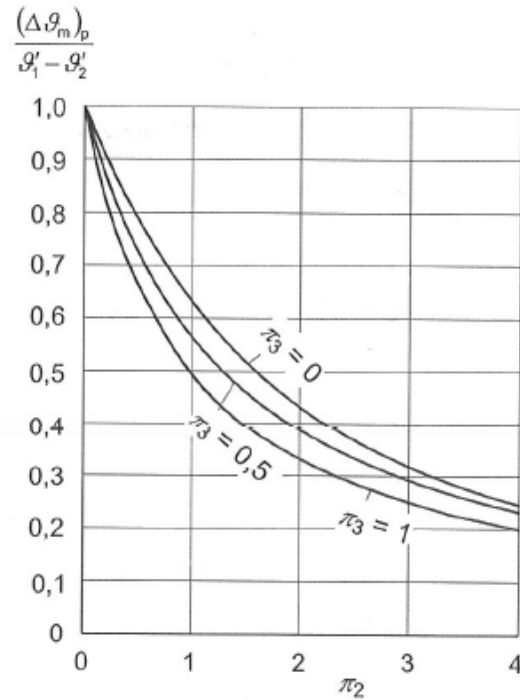
$$\frac{(\Delta\vartheta_m)_p}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \frac{1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2)}{\pi_2 - \pi_3\pi_2 \exp(-(1 - \pi_3)\pi_2)} \quad (100)$$

Tok funkcija (99) i (100) dijagramski prikazuje slike 26 i 27.





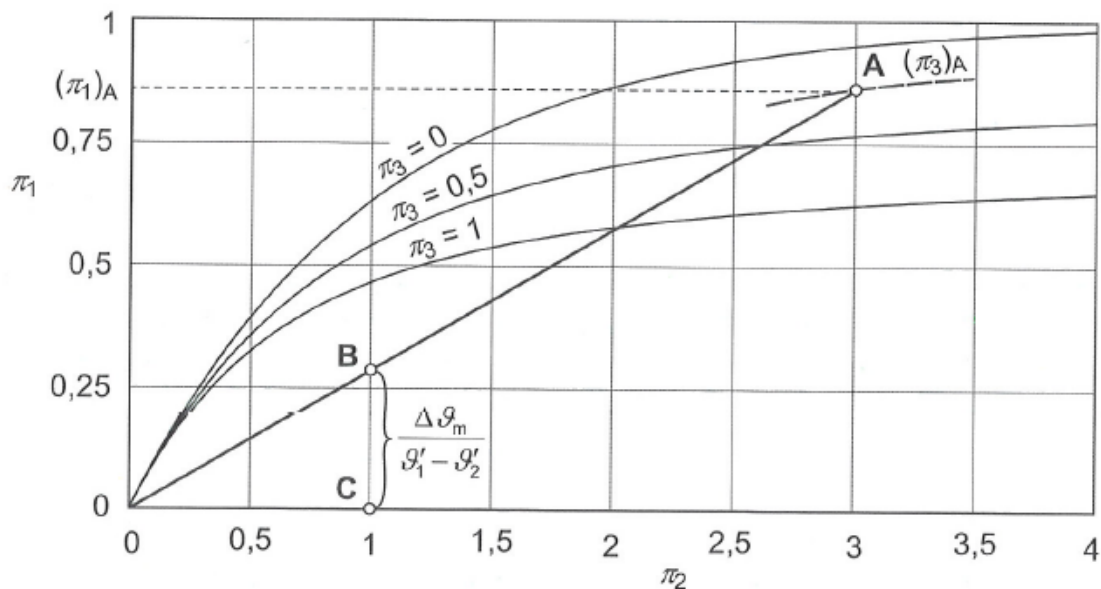
Slika 26. Bezdimenzijska srednja logaritamska temperaturna razlika kod istosmjernog aparata



Slika 27. Bezdimenzijska srednja logaritamska temperaturna razlika kod protusmjernog aparata

Kako za križni rekuperator ne postoji eksplicitna funkcijska veza  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$ , nije za njega moguće izraziti eksplicitnu funkcijsku vezu za bezdimenzijsku srednju logaritamsku temperaturnu razliku kao kod prethodna dva slučaja, ali ju se neizravno može prikazati tablično ili dijagramski.

No jednačba (97) govori da se srednju logaritamsku temperaturnu razliku  $\Delta\vartheta_m$  može vrlo jednostavno odrediti iz uvedenih dijagrama  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$  za pojedine rekuperatore, na taj način da se u dijagramu nađe njegova radna točka, točka A na slici 28.



Slika 28. Grafičko određivanje srednje logaritamske temperaturne razlike

Točka A spoji se pravcem s ishodištem 0 dotičnog dijagrama, i gdje taj pravac 0A presijeca vertikalnu liniju  $\pi_2 = 1$  dobiva se točka B. Tada duljina CB, prema jednačbi (99), predstavlja bezdimenzijsku logaritamsku temperaturnu razliku  $\Delta\vartheta_m / (\vartheta'_1 - \vartheta'_2)$ , što se čita na ordinatnoj osi. Očitane vrijednosti pomnoži se s temperaturnom razlikom  $\vartheta'_1 - \vartheta'_2$  i dobiva se vrijednost srednje logaritamske temperaturne razlike. [1]

## 9. ISKORISTIVOST TOPLINE

Prema jednadžbi (81)

$$\Phi = \pi_1 C_1 (\vartheta'_1 - \vartheta'_2)$$

predstavlja stvarni toplinski tok u bilo kojem rekuperatoru. U takvu stvarnom rekuperatoru nije prenesen sveukupno raspoloživi toplinski tok  $\Phi_{maks}$ , a koji je zadan toplinskim kapacitetom slabije struje  $C_1$  i ulaznim temperaturama objiju struja  $\vartheta'_1$  i  $\vartheta'_2$ .

Naime ako je slabija struja, recimo kao toplija ušla u rekuperator, tada će se ona hladiti predajući toplinski tok hladnijoj struji, ali se shodno II. stavku termodinamike, nikako ne može ohladiti ispod ulazne temperature hladnije struje, nego joj u krajnjem slučaju može postati jednaka. Time je II. stavkom termodinamike određen konačni maksimalni toplinski tok sljedećom jednadžbom

$$\Phi_{maks} = C_1 (\vartheta'_1 - \vartheta'_2) \quad (101)$$

Omjer stvarnog i maksimalnog toplinskog toka zove se iskoristivost topline i označuje se s  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Phi}{\Phi_{maks}} \quad (102)$$

ako se u jednadžbu (102) uvrsti jednadžbe (81) i (101) dobiva se

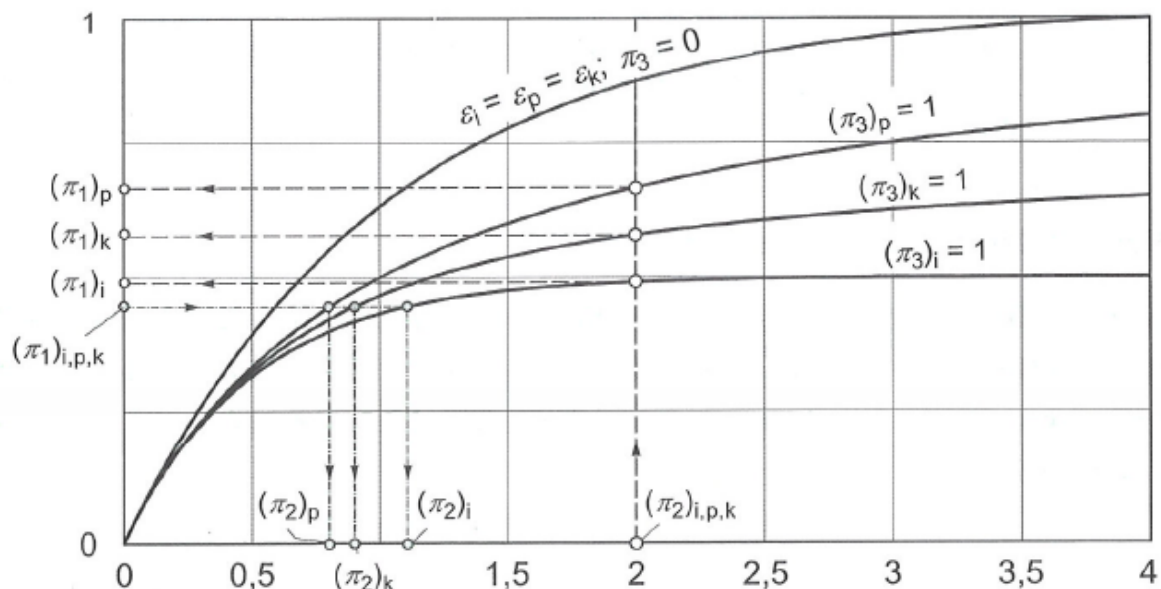
$$\varepsilon = \pi_1, \quad (103)$$

što pokazuje da je iskoristivost topline nekog izvedenog rekuperatora upravo jednaka njegovoj  $\pi_1$  značajki, bez obzira na tip, ili iskoristivost topline predstavlja omjer stvarno postignute temperaturne razlike slabije struje ( $\vartheta'_1 - \vartheta'_2$ ), i ulazne temperaturne razlike ( $\vartheta'_1 - \vartheta'_2$ ). (Pri tome se mora uzeti konstantnu vrijednost toplinskog kapaciteta slabije struje).

Kako je pokazano u jednadžbama (21), (41) i (68)  $\pi_1$  značajka ovisi o bezdimenzijskim značajkama  $\pi_2$  i  $\pi_3$ , te prema (103) o tim veličinama ovisi i iskoristivost topline  $\varepsilon$ . To znači da vrijednost iskoristivosti topline ovisi o tipu rekuperatora. Za iste bezdimenzijske značajke  $\pi_2$  i  $\pi_3$  najveću iskoristivost topline imaju protusmjerni, a najmanju istosmjerni rekuperatori. Ili, po kriteriju iskoristivosti topline rekuperatori se rangiraju kao:

- protusmjerni
- križni
- istosmjerni

Najveće su među njima razlike za vrijednost bezdimenzijske značajke  $\pi_3 = 1$ . Da se tu tvrdnju ilustrira, na slici 29 dijagramski su prikazane krivulje  $\pi_3 = 1$  za sva tri tipa izmjenjivača topline.



Slika 29. Usporedba rekuperatora po kriteriju istosmjernosti topline

Uzimamo prvo da je lista označena  $\pi_2$  za sva tri slučaja. (Na gornjoj je slici kao primjer uzeto  $\pi_2 = 1$ ). Sjecište iste vertikale  $\pi_2 = \text{konst.}$  S linijama  $\pi_3 = 1$ , pokazuju najveću vrijednost  $\varepsilon$  kod protusmjernog, manju kod križnog a najmanju kod istosmjernog istosmjernog tipa tj.

$$\varepsilon_p = \pi_{1p} > \varepsilon_k = \pi_{1k} > \varepsilon_i = \pi_{1i}, \quad (104)$$

što znači da se iste ulazne temperaturne struja, najveću temperaturnu promjenu jedne i druge struje imamo kod protusmjernog, manju kod križnog a najmanju kod istosmjernog.

Ili ako se želi ostvariti uvjet da je  $\varepsilon_p = \varepsilon_k = \varepsilon_i$ , tada se iz gornje slike vidi da je

$$\pi_{2p} < \pi_{2k} < \pi_{2i}, \quad (105)$$

što znači da će se, uz isti  $k$  i  $C_1$ , dotični uvjet ostvariti s najmanjom površinom kod protusmjernog, većom kod križnog a najvećom kod istosmjernog aparata.

Ako se vrijednost bezdimenzijske značajke  $\pi_3$  smanjuje, tada se među njima smanjuju i razlike u istosmjernosti topline. Kada vrijednost značajke  $\pi_3$  postaje jednaka nuli, tada ne postoje razlike u vrijednosti  $\varepsilon$ , tj. tada je

$$\varepsilon_p = \pi_{1p} = \varepsilon_k = \pi_{1k} = \varepsilon_i = \pi_{1i}; \quad (\pi_3 = 0) \quad (106)$$

a što je također prikazano na slici 29.

Tvrdnja (106) dokazana je u poglavlju 5.2.1, jednadžba (75).

Iako protusmjerni aparat ima najveću iskoristivost, to ne znači i njegovu apriornu ugradnju u neka postojanja. U određenim slučajevima i neki drugi uvjeti, kao što su zadani gabariti, sama pozicija dovodnih i odvodnih ciljevi, diktirat će ugradnju kako križnog tako i istosmjernog aparata. [1] [3]

## 10. STUPANJ DJELOVANJA IZMJENJIVAČA TOPLINE

Stupanj djelovanja  $\eta$  predstavlja omjer između stvarnog toplinskog toka kod konačne ugrađene površine  $A_0, \Phi(A_0)$ , i toplinskog toka koji bi se izmjenio u takvom tipu aparata kad bi njegova ugrađena površina hipotetski težila u beskonačnost  $A_0 \rightarrow \infty, \Phi(A_0 \rightarrow \infty)$  tj.

$$\eta = \frac{\Phi(A_0)}{\Phi(A_0 \rightarrow \infty)} \quad (107)$$

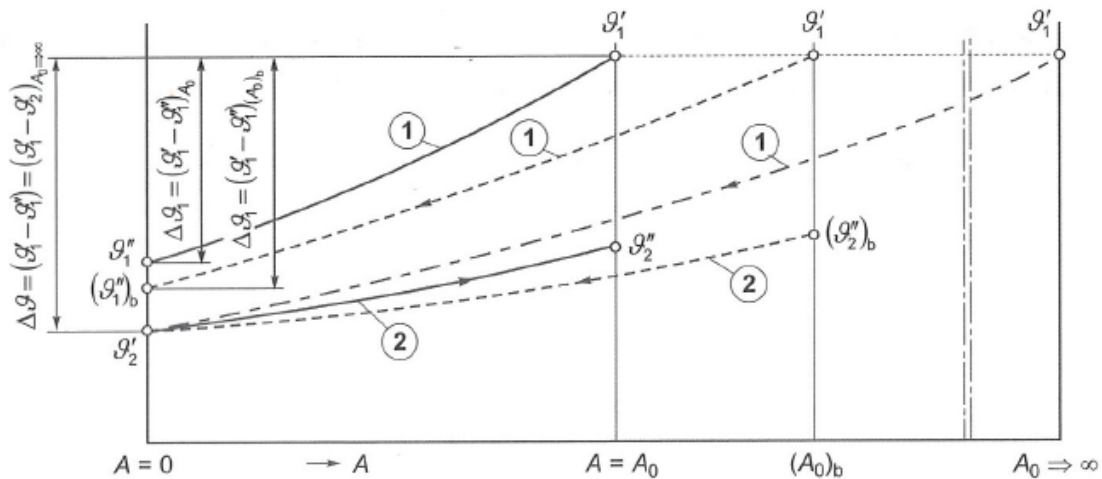
Dakle u svojoj definiciji je stupanj  $\eta$  vezan na tip aparata, pa se može pisati

$$\eta_p = \frac{\Phi(A_{0p})}{\Phi(A_{0p} \rightarrow \infty)} \quad (108)$$

$$\eta_k = \frac{\Phi(A_{0k})}{\Phi(A_{0k} \rightarrow \infty)} \quad (109)$$

$$\eta_i = \frac{\Phi(A_{0i})}{\Phi(A_{0i} \rightarrow \infty)} \quad (110)$$

Povećava li se sve više i više površinu protusmjernog (odnosno križnog) aparata, slika 30, izlazna temperatura slabije struje  $\vartheta_1''$  sve će se više približavati vrijednosti ulazne temperature jače struje  $\vartheta_2'$ .



Slika 30. Uz izvođenje stupnja djelovanja protusmjernog i križnog rekuperatora

U krajnjem (hipotetskom) slučaju, kada bi ta površina postala beskonačno velika, ove bi se temperature međusobno izjednačile, tj.  $\vartheta_1'' = \vartheta_2'$ , pa bi u tom slučaju toplinski tok  $\Phi(A_{0p} \rightarrow \infty)$  postao jednak, prema jednadžbi (103),  $\Phi_{maks}$

$$\Phi(A_{0p} \rightarrow \infty) = C_1(\vartheta_1' - \vartheta_2') = \Phi_{maks} \quad (111)$$

Uvršti u jednadžbu (108) jednadžbu (111), a za  $\Phi(A_0)$  jednadžbu (80) dobiva se da je stupanj djelovanja protusmjernog aparata jednak

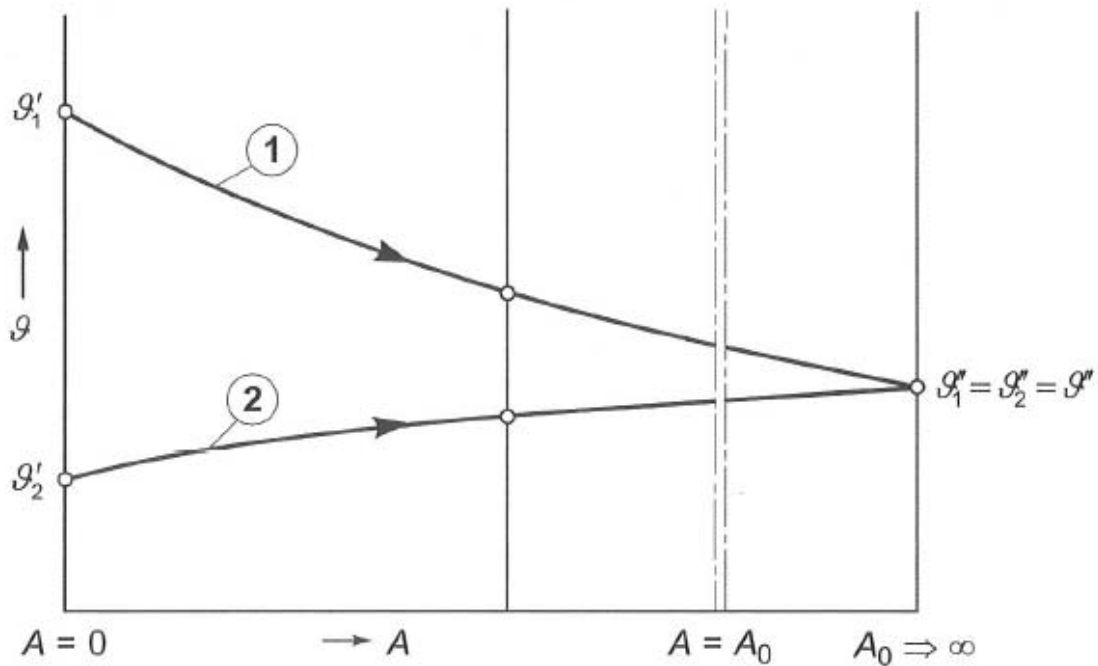
$$\eta_p = \pi_{1p} = \varepsilon_p \quad (112)$$

Vrijedi analogna tvrdnja i za križni aparat

$$\eta_k = \pi_{1k} = \varepsilon_k \quad (113)$$

To znači da vrijednost  $\eta$  i  $\varepsilon$  korespondiraju  $\pi_1$  kod protusmjernog i križnog aparata, pa se i očitavaju na ordinatnoj osi dijagramskog prikaza  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$ .

No, kod istosmjerne izvedbe, kako se vidi iz slike 31, iako površina  $A_{0i} \rightarrow \infty$ , uspostavljena zajednička temperatura obiju struja  $\vartheta''$  leži između vrijednosti ulaznih temperatura  $\vartheta_1'$  i  $\vartheta_2'$ .



Slika 31. Uz izvođenje stupnja djelovanja istosmjernog rekuperatora

Za hipotetski beskonačno veliku površinu tj. kada  $A_{0i} \rightarrow \infty$  toplinski tok je jednak

$$\Phi(A_{0i} \rightarrow \infty) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'') \quad (114)$$

dok je prema (46)

$$\Phi(A_{0i}) = C_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1),$$

pa njihovim uvrštavanjem u jednadžbu (112) slijedi

$$\eta_i = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}{\vartheta'_1 - \vartheta''} \quad (a)$$

U gornjoj jednadžbi nepoznata je temperatura  $\vartheta''$ , i koju se lako odredi primijenivši energijsku bilancu na aparat beskonačno velike površine



$$C_1(\vartheta'_1 - \vartheta'') = C_2(\vartheta'' - \vartheta'_2), \quad (b)$$

pa je

$$\vartheta'' = \frac{C_1\vartheta'_1 + C_2\vartheta'_2}{C_1 + C_2} \quad (c)$$

Iz jednadžbe (c) je jasna tvrdnja da vrijednost zajedničke temperature  $\vartheta''$  leži između vrijednosti ulaznih temperatura i načelno je ta vrijednost bliža vrijednosti ulazne temperature jače struje. Ako bi bile struje jednako jake,  $C_1 = C_2$ , tada bi  $\vartheta''$  bila jednaka aritmetičkoj sredini ulaznih temperatura.

Uvrštavajući (b) i (c) u (a) dobiva se

$$\eta_i = \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \frac{\vartheta'_1 - \vartheta''}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} \quad (d)$$

odnosno

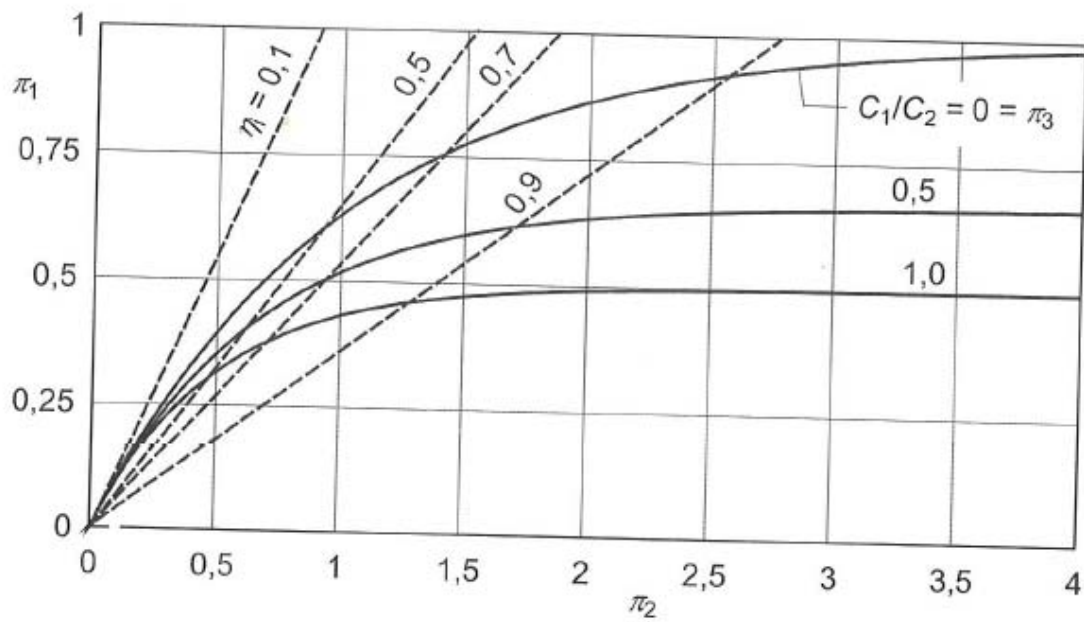
$$\eta_i = (1 + \pi_3)\pi_{1i} \quad (115)$$

Ako se u gornju jednadžbu uvrsti jednadžbu (21),  $\eta_i$  se može izraziti kao

$$\eta_i = 1 - \exp(-(1 + \pi_3)\pi_2), \quad (116)$$

odakle se vidi da je gornja granica stupnja djelovanja istosmjernog rekuperatora  $\eta_{maks} = 1$ , a što bi se (hipotetski) postiglo beskonačno velikom površinom. Ista tvrdnja vrijedi i za protusmjerni i križni rekuperator.

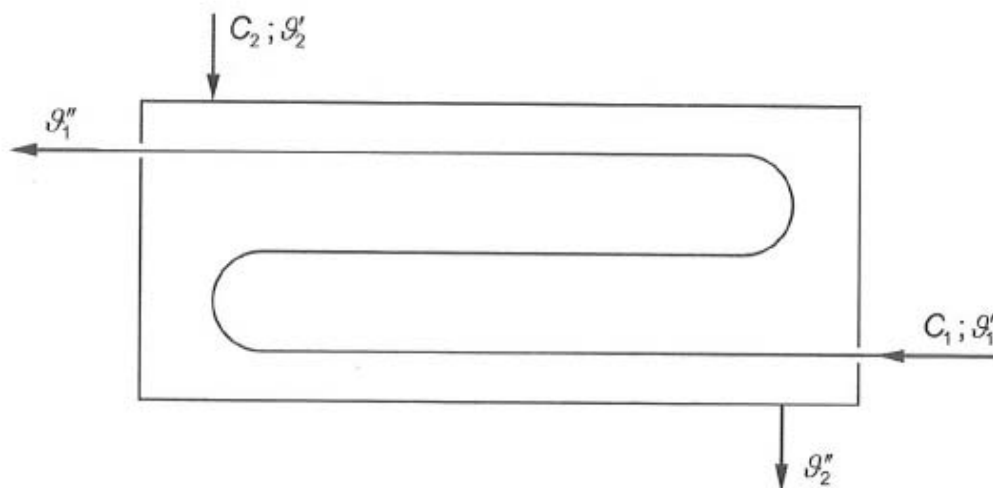
Nadalje, dok kod protusmjernog i križnog aparata linije  $\eta_i = \text{konst.}$  Odgovaraju linijama  $\pi_1 = \text{konst.}$ , dotle kod istosmjernog aparata te linije u dijagramu  $\pi_{1i} = f(\pi_2, \pi_3)$  čine pramen pravaca koji prolaze kroz njegovo ishodište, kako to pokazuje dijagram na slici 32.

Slika 32. Linije  $\eta_i = \text{konst.}$  kod istosmjernog rekuperatora

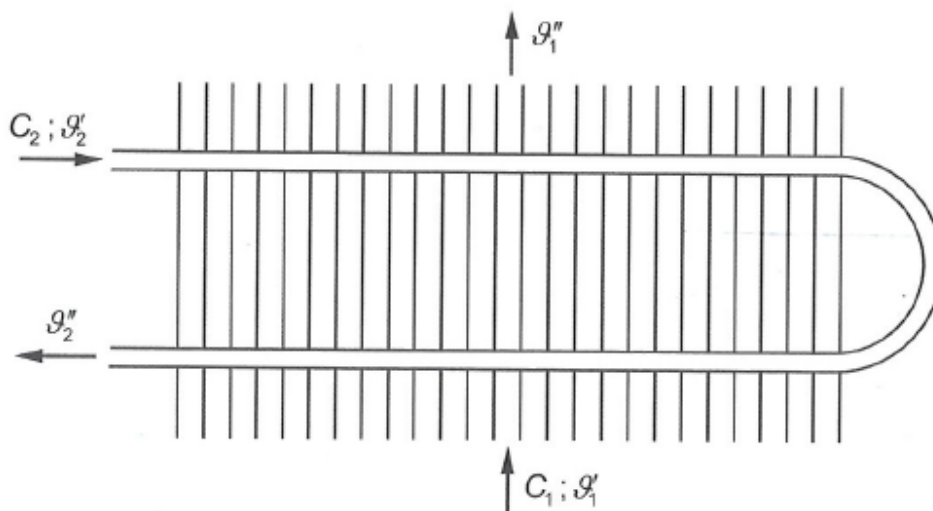
Linija  $\eta_{\text{imaks}} = 1$  podudara se s apscisom osi  $\pi_2$ , dok se linija  $\eta_i = 0$  podudara s ordinatom osi  $\pi_{1i}$ . (U korisničkom dijagramu linije  $\eta_i = \text{konst.}$  su stupnjevane po 0,1 unutar intervala 0 – 1.) [1]

## 11. REKUPERATORI S VIŠE PROLAZA POJEDINIH STRUJA

U dosadašnjim razmatranjima razmatrani su i razrađeni osnovni tipovi rekuperativnih aparata kod koji je svaka od struja samo jedanput kroz njega prolazila. No, u praksi se češće rabe rekuperatori kod kojih svaka od struja može imati i više prolaza. Neke od varijanti takvih prikazuju slike 33 i 34.



Slika 33. Rekuperator topline s tri prolaza slabije struje i jednim prolaskom jače struje



Slika 34. Rekuperator topline s dva prolaza jače i jednim prolaskom slabije struje

Također i za takve aparate je moguće pronaći analitičko bezdimenzijsko rješenje, i ona kao takva se u odgovarajućoj literaturi mogu naći u analitičkom odnosno dijagramski u bezdimenzijskom obliku. [1]

$$\pi_1 = F_1(\pi_2, \pi_3).$$

## 12. TERMODINAMIČKI PRORAČUN IZMJENJIVAČA

Potrebno je izraditi termodinamički proračun izmjenjivača topline ulje – dimni plinovi. Izmjenjivač je postavljen vertikalno u prostoru, dimni plinovi struje kroz cijevi, a termičko je ulje usmjeravano pregradama oko cijevi.

Zadani parametri su:

### PRIMAR – dimni plinovi u cijevima:

-ulazna temperatura dimnih plinova:	$t_{DPul} = 1000^{\circ}\text{C}$
-izlazna temperatura dimnih plinova:	$t_{DPiz} = 350^{\circ}\text{C}$
-tlak dimnih plinova:	$p_{DP} = 1 \text{ bar}$

Dimni plinovi su produkt izgaranja metana  $\text{CH}_4$ . Izgaranje je potpuno s faktorom pretička uzduha  $\lambda=1.05$ .

### SEKUNDAR – ulje oko cijevi:

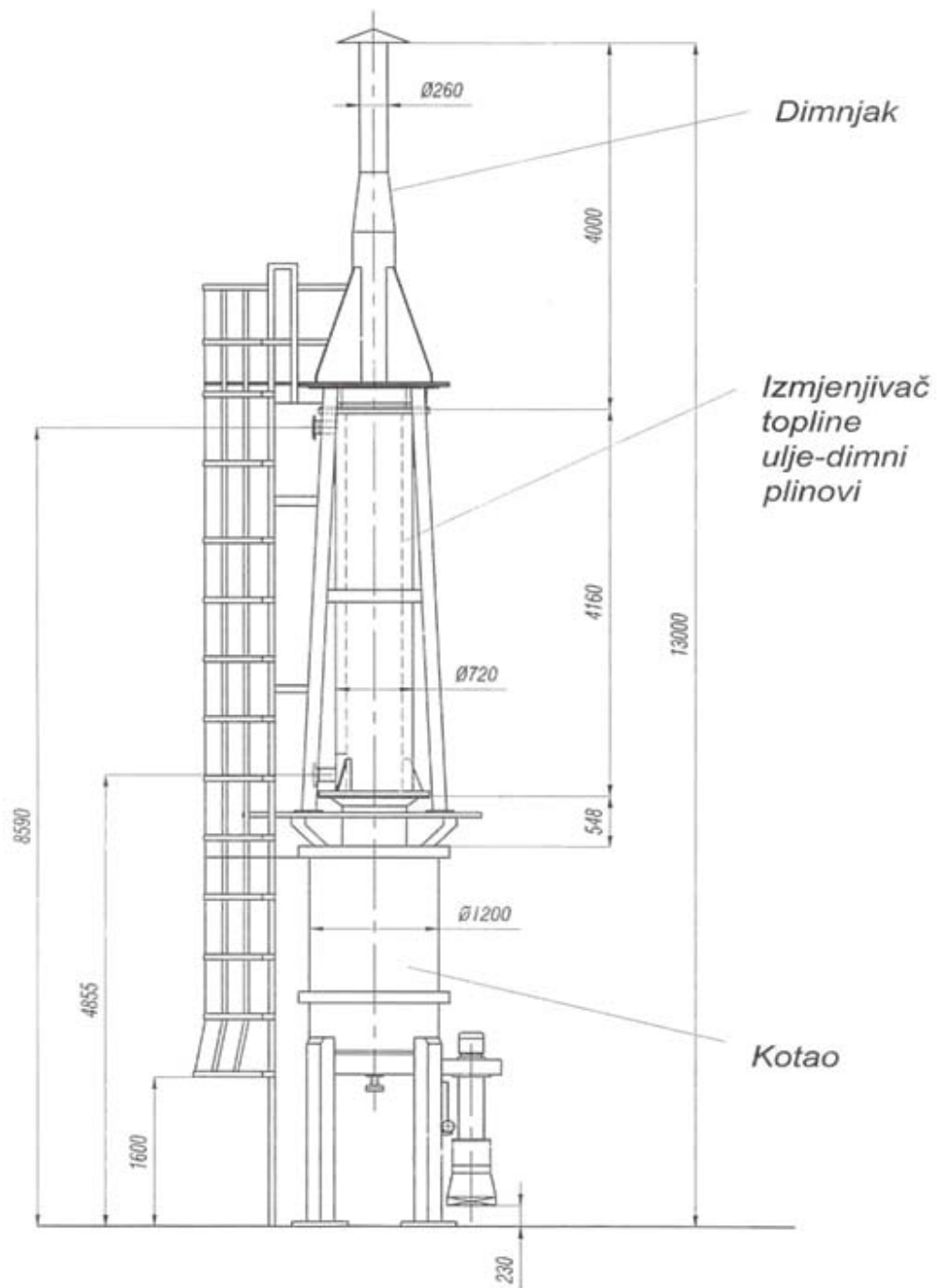
-ulazna temperatura ulja:	$t_{Uul} = 260^{\circ}\text{C}$
-volumni protok ulja:	$\dot{v}_U = 80 \text{ m}^3/\text{h}$
-radni pretlak ulja:	$p_U = 10 \text{ bar}$

Fizikalna svojstva termičkog ulja Downtherm Q mogu se očitati u Prilogu 1.

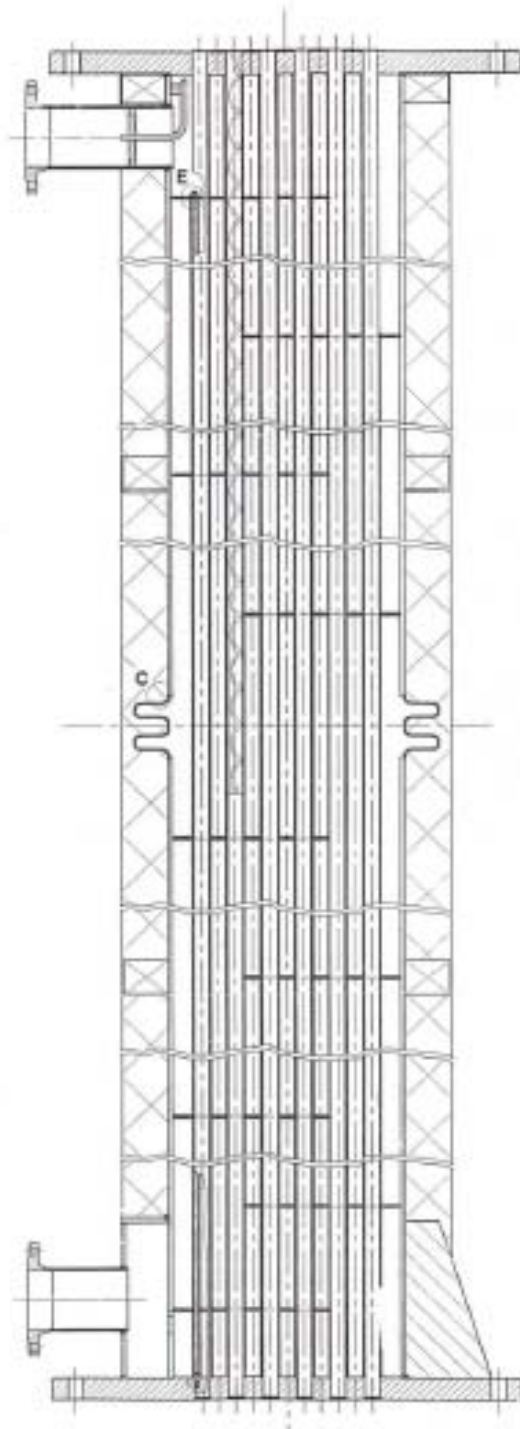
**Kapacitet izmjenjivača:**  $Q=200 \text{ kW}$

## PRILOG 1 – Fizikalna svojstva termičkog ulja DOWNTHERM Q

Temperatura	Gustoća	Specifična toplina	Koeficijent toplinske vodljivosti	Dinamička žilavost
°C	g/cm <sup>3</sup>	kJ/kgK	W/mK	mPAs
-40	1,0134	1,477	0,128	50,21
-30	1,0095	1,493	0,128	35,24
-20	1,0019	1,526	0,127	19,47
-10	0,9943	1,558	0,125	12,06
0	0,9866	1,590	0,124	8,09
10	0,9790	1,622	0,123	5,76
20	0,9713	1,654	0,122	4,30
30	0,9637	1,686	0,121	3,32
40	0,9561	1,718	0,120	2,64
50	0,9484	1,749	0,118	2,15
60	0,9408	1,781	0,117	1,78
70	0,9332	1,812	0,116	1,50
80	0,9255	1,843	0,114	1,29
90	0,9179	1,874	0,113	1,11
100	0,9102	1,905	0,112	0,97
110	0,9026	1,936	0,110	0,86
120	0,8950	1,967	0,109	0,77
130	0,8873	1,998	0,107	0,69
140	0,8797	2,028	0,106	0,62
150	0,8721	2,059	0,104	0,56
160	0,8644	2,089	0,103	0,52
170	0,8566	2,120	0,101	0,47
180	0,8491	2,150	0,100	0,44
190	0,8415	2,180	0,098	0,40
200	0,8339	2,210	0,097	0,38
210	0,8262	2,240	0,095	0,35
220	0,8186	2,269	0,094	0,33
230	0,8110	2,299	0,092	0,31
240	0,8033	2,328	0,091	0,29
250	0,7957	2,358	0,089	0,27
260	0,7880	2,387	0,087	0,26
270	0,7804	2,416	0,085	0,25
280	0,7728	2,445	0,084	0,23
290	0,7651	2,474	0,083	0,22
300	0,7575	2,503	0,081	0,21
310	0,7499	2,532	0,080	0,20
320	0,7422	2,561	0,078	0,19
330	0,7346	2,589	0,076	0,19
340	0,7269	2,618	0,075	0,18
350	0,7193	2,646	0,073	0,17



Slika 35. Prikaz mjesta izmjenjivača topline u procesu



Slika 36. Prikaz uljnog izmjenjivača topline



**12.1. Termičko ulje**

Izlazna temperatura ulja:

$$Q = \dot{m}_U \cdot c_U \cdot (t_{Uiz} - t_{Uul}) = \rho_U \cdot \dot{V}_U \cdot c_U \cdot (t_{Uiz} - t_{Uul})$$

$$t_{Uiz} = t_{Uul} + \frac{Q}{\dot{m}_U \cdot c_U} = t_{Uul} + \frac{Q}{\rho_U \cdot \dot{V}_U \cdot c_U}$$

Pretpostavljena izlazna temperatura ulja :  $t_{Uiz} = 265^\circ\text{C}$ **12.1.1. Fizikalna svojstva ulja pri ulaznoj temperaturi  $t_{Uiz} = 260^\circ\text{C}$** 

$$\rho_{Uul} = 788 \text{ kg/m}^3 \quad \text{gustoća}$$

$$c_{Uul} = 2387 \text{ J/(kgK)} \quad \text{specifični topl. kapacitet}$$

**12.1.2. Fizikalna svojstva ulja pri pretpostavljenoj izlaznoj temperaturi**

$$t_{Uiz} = 265^\circ\text{C}$$

$$\rho_{Uiz} = 788 \text{ kg/m}^3 \quad \text{gustoća}$$

$$c_{Uiz} = 2387 \text{ J/(kgK)} \quad \text{specifični topl. kapacitet}$$

**12.1.3. Srednja gustoća i specifični toplinski kapacitet ulja**

$$\rho_U = \frac{\rho_{Uul} + \rho_{Uiz}}{2} = \frac{788 + 784.2}{2} = 786.1 \text{ kg/m}^3$$

$$c_U = \frac{c_{Uul} + c_{Uiz}}{2} = \frac{2387 + 2401.5}{2} = 2394.25 \text{ J/(kgK)}$$

**12.1.4. Maseni protok ulja**

$$\dot{m}_U = \dot{V} \cdot \rho_U = 80 \cdot 786.1 = 62888 \text{ kg/h} = 17.4689 \text{ kg/s}$$

**12.1.5. Stvarna temperatura ulja na izlazu iz izmjenjivača**

$$t_{Uiz} = t_{Uul} + \frac{Q}{\dot{m}_U \cdot c_U} = 260 + \frac{200000}{17.4689 \cdot 2394.25} = 264.8^\circ\text{C} \approx 265^\circ\text{C}$$

## 12.2. Dimni plinovi

Termičko ulje se grije dimnim plinovima koji su produkt izgaranja metana.

Kapacitet izmjenjivača:

$$Q = \dot{m}_{DP} \cdot c_{DP} \cdot (t_{DPUl} - t_{DPIz}) = \rho_{DP} \cdot \dot{V}_{DP} \cdot c_{DP} \cdot (t_{DPUl} - t_{DPIz})$$

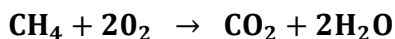
$$t_{DPUl} = 1000^{\circ}\text{C} \Rightarrow \text{ulazna temperatura dimnih plinova}$$

$$t_{DPIz} = 350^{\circ}\text{C} \Rightarrow \text{izlazna temperatura dimnih plinova}$$

Da bi odredili specifičnu toplinu dimnih plinova najprije moramo odrediti sastav dimnih plinova koji nastaju kao produkt izgaranja metana. Pretpostavka je da je izgaranje potpuno ( $\alpha=1$ ), s pretičkom uzduha  $\lambda=1.05$ .

### 12.2.1. Jednadžba izgaranja:

Stehiometrijska jednadžba izgaranja metana:



Molna bilanca tvari:

$$1 \text{ kmol CH}_4 + 2 \text{ kmol O}_2 + 2 \text{ kmol H}_2\text{O}$$

Ako se u molnu bilancu tvari uvrsti molna masa za pojedine tvari,

$$M_{\text{CH}_4} = 16 \text{ kg/kmol}$$

$$M_{\text{O}_2} = 32 \text{ kg/kmol}$$

$$M_{\text{CO}_2} = 44 \text{ kg/kmol}$$

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ kg/kmol}$$

dobiva se masena bilanca tvari:

$$16 \text{ kg CH}_4 + 2 \cdot 32 \text{ kg O}_2 = 44 \text{ kg CO}_2 + 2 \cdot 18 \text{ kg H}_2\text{O}$$

$$1 \text{ kg CH}_4 + 4 \text{ kg O}_2 = 2.75 \text{ kg CO}_2 + 2.25 \text{ kg H}_2\text{O}$$

### 12.2.2. Minimalna količina kisika potrebna za izgaranje

Minimalna količina kisika za općenito zadani sustav plina računa se prema izrazu:

$$O_{\min} = \frac{1}{2} \cdot (CO' + H'_2) + 2 \cdot CH'_4 + 3 \cdot C_2H'_4 + \sum \left(x + \frac{y}{4}\right) \cdot C_xH'_y - O'_2 \left[ \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolG}} \right]$$

gdje su  $CO'$ ,  $H'_2$ ,  $CH'_4$ ,  $C_2H'_4$ ,  $C_xH'_y$ ,  $O'_2$  volumni udjeli pojedinih sudionika u mješavini plinovitog goriva.

U slučaju izgaranja metana gorivo je čisti metan, tako da je

$CH'_4 = 1 \text{ kmolCH}_4/\text{kmolG}$ , a minimalna količina kisika za izgaranje iznosi:

$$O_{\min} = 2 \cdot CH'_4 = 2 \cdot \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolCH}_4} \cdot 1 \cdot \frac{\text{kmolCH}_4}{\text{kmolG}} = 2 \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolG}}$$

Kisik potreban za izgaranje dovodi se atmosferskim uzduhom.

Molni udio kisika u uzduhu:

$$r_{O_2} = 0.21 \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolU}}$$

Minimalna potrebna količina uzduha za izgaranje:

$$L_{\min} = \frac{O_{\min}}{0.21} \quad \left[ \frac{\text{kmolU}}{\text{kmolG}} \right]$$

Stvarna količina uzduha potrebna za izgaranje:

$$L_{\text{stv}} = \lambda \cdot L_{\min} = \lambda \cdot \frac{O_{\min}}{0.21} \quad \left[ \frac{\text{kmolU}}{\text{kmolG}} \right]$$

gdje  $\lambda$  predstavlja faktor pretička uzduha. Ako je faktor pretička uzduha manji od jedinice, izgaranje će se odvijati nepotpuno, a za  $\lambda > 1$  pretička uzduha  $(\lambda - 1) \cdot L_{\min}$

$$L_{\text{stv}} = \lambda \cdot \frac{O_{\min}}{0.21} = 1.05 \cdot \frac{2 \cdot \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolG}}}{0.21 \cdot \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolU}}} = 10 \frac{\text{kmolU}}{\text{kmolG}}$$

### 12.2.3. Ložište

Za izgaranje 1 kmol metana potrebno je dovesti  $L_{\text{stv}}$  kmol uzduha da bi dobili  $n_{\text{vdp}}$  kmol dimnih plinova.

#### 12.2.4. Sastav suhих dimnih plinova

Pri potpunom izgaranju suhi dimni plinovi se sastoje iz  $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_2$  i  $\text{N}_2$ , a pri nepotpunom također još iz  $\text{CO}$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{CH}_4$ . U našem slučaju sastav suhих dimnih plinova može se izraziti jednađbom

$$\text{CO}_2 + \text{O}_2 + \text{N}_2 = 1,$$

Gdje kemijski simboli označavaju volumenske udjele pojedinih sudionika u suhim dimnim plinovima

$$\text{CO}_2 = \frac{[\text{CO}_2]}{n_{\text{SDP}}} = r_{\text{CO}_2} \quad \left[ \frac{\text{kmolCO}_2}{\text{kmolSDP}} \right]$$

$$\text{O}_2 = \frac{[\text{O}_2]}{n_{\text{SDP}}} = r_{\text{O}_2} \quad \left[ \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolSDP}} \right]$$

$$\text{N}_2 = \frac{[\text{N}_2]}{n_{\text{SDP}}} = r_{\text{N}_2} \quad \left[ \frac{\text{kmolN}_2}{\text{kmolSDP}} \right]$$

Količina suhих dimnih plinova po jedinici količine goriva računa se po slijedećoj jednađbi:

$$n_{\text{SDP}} = [\text{CO}_2] + [\text{O}_2] + [\text{N}_2] \quad \left[ \frac{\text{kmolSDP}}{\text{kmolG}} \right]$$

#### 12.2.5. Bilanca dušika

Dušik u ložište dolazi sa uzduhom u količini  $0.79 \lambda L_{\text{min}}$ .

$$0.79 \cdot \lambda \cdot L_{\text{min}} = n_{\text{SDP}} \cdot \text{N}_2 = [\text{N}_2]$$

$$[\text{N}_2] = 0.79 \cdot L_{\text{stv}} = 0.79 \cdot \frac{\text{kmolN}_2}{\text{kmolU}} \cdot 10 \cdot \frac{\text{kmolU}}{\text{kmolG}} = 7.9 \cdot \frac{\text{kmolN}_2}{\text{kmolG}}$$

#### 12.2.6. Bilanca ugljika

$$n_c = \text{CO}_2 + \text{CO} + \text{CH}_4 \quad \left[ \frac{\text{kmolC}}{\text{kmolSDP}} \right]$$

$$[\text{CO}_2] = 1 \frac{\text{kmolCO}_2}{\text{kmolG}}$$

**12.2.7. Bilanca vodika**

$$[\text{H}_2\text{O}] = n_{VDP} \cdot \text{H}_2\text{O} = 2 \frac{\text{kmolH}_2\text{O}}{\text{kmolG}}$$

**12.2.8. Bilanca kisika**

Onaj dio kisika koji nije potreban za proces oksidacije i koji izlazi kao samostalan sudionik suhih dimnih plinova dobiva se iz slijedećeg izraza:

$$(\lambda - 1) \cdot \text{O}_{\min} = [\text{O}_2]$$

$$[\text{O}_2] = (1.05 - 1) \cdot 2 \cdot \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolG}} = 0.1 \frac{\text{kmolO}_2}{\text{kmolG}}$$

**12.2.9. Količina suhih dimnih plinova**

$$n_{SDP} = [\text{CO}_2] + [\text{O}_2] + [\text{N}_2] = 1 + 0.1 + 7.9 = 9 \left[ \frac{\text{kmolSDP}}{\text{kmolG}} \right]$$

**12.2.10. Količina vlažnih dimnih plinova**

$$n_{VDP} = [\text{CO}_2] + [\text{O}_2] + [\text{N}_2] + [\text{H}_2\text{O}] = 1 + 0.1 + 7.9 + 2 = 11 \left[ \frac{\text{kmolSDP}}{\text{kmolG}} \right]$$

Kontrola:

Ulaz: 10 kmol uzduha + 1 kmol goriva ( $\text{CH}_4$ ) = 11 kmol

Izlaz: 1 kmol  $\text{CO}_2$  + 7.9 kmol  $\text{N}_2$  + 0.1 kmol  $\text{O}_2$  + 2 kmol  $\text{H}_2\text{O}$  = 11 kmol

**12.2.11. Volumenski udjeli pojedinih sudionika u vlažnim dimnim plinovima**

$$r_{\text{CO}_2} = \frac{[\text{CO}_2]}{n_{VDP}} = \frac{1}{11} = 0.09091 \frac{\text{kmolCO}_2}{\text{kmolVDP}}$$

$$r_{\text{N}_2} = \frac{[\text{N}_2]}{n_{VDP}} = \frac{7.9}{11} = 0.71818 \frac{\text{kmolCO}_2}{\text{kmolVDP}}$$

$$r_{\text{O}_2} = \frac{[\text{O}_2]}{n_{VDP}} = \frac{0.1}{11} = 0.00909 \frac{\text{kmolCO}_2}{\text{kmolVDP}}$$

$$r_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{[\text{H}_2\text{O}]}{n_{VDP}} = \frac{2}{11} = 0.18182 \frac{\text{kmolCO}_2}{\text{kmolVDP}}$$

### 12.2.12. Određivanje specifične topline dimnih plinova

U tablici su prikazane srednje specifične topline za svakog pojedinog sudionika dimnih plinova, kao i specifične topline dimnih plinova u rasponu od 0 do 350°C i od 0 do 1000°C. Sve veličine su u kJ/(kmol K).

Tablica 2. Srednje specifične topline dimnih plinova

plin	$r_i$	$[C_{pi}]_0^{350}$	$r_i \cdot [C_{pi}]_0^{350}$	$[C_{pi}]_0^{1000}$	$r_i \cdot [C_{pi}]_0^{1000}$
CO <sub>2</sub>	0.09091	42.5025	3.8639	49.392	4.4902
N <sub>2</sub>	0.71818	29.4920	21.1806	31.313	22.4884
O <sub>2</sub>	0.00909	30.6390	0.2785	33.118	0.3010
H <sub>2</sub> O	0.18182	34.8325	6.3332	38.619	7.0217
$\sum r_i \cdot [C_{pi}]_0^{350} = 31.6562 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}}$			$\sum r_i \cdot [C_{pi}]_0^{1000} = 34.3013 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}}$		

Srednja specifična toplina za interval od 350 do 1000°C se dobiva iz sljedećeg izraza – prema:

$$\begin{aligned}
 [C_p]_{350}^{1000} &= \frac{[C_p]_0^{1000} \cdot t_{DPul} - [C_p]_0^{350} \cdot t_{DPiz}}{t_{DPul} - t_{DPiz}} = \frac{34.3013 \cdot 1000 - 31.6562 \cdot 350}{1000 - 350} \\
 &= 35.7256 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}}
 \end{aligned}$$

Prividna molna masa mješavine:

$$\begin{aligned}
 M_{DP} &= \sum r_i \cdot M_i = r_{CO_2} \cdot M_{CO_2} + r_{N_2} \cdot M_{N_2} + r_{O_2} \cdot M_{N_2} + r_{H_2O} \cdot M_{H_2O} \\
 &= 0.090091 \cdot 44.01 + 0.71818 \cdot 28.02 + 0.00909 \cdot 32 + 0.18182 \cdot 18.032 \\
 &= 27.6938 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}
 \end{aligned}$$

$$[c_p]_{350}^{1000} \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right] = \frac{[C_p]_{350}^{1000} \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kmolK}} \right]}{M_{DP} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right]} = \frac{35.7256}{27.6938} = 1.290 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

$$c_{DP} = 1290 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

**12.2.13. Maseni i volumni protok dimnih plinova**

$$Q = \dot{m}_{DP} \cdot c_{DP} \cdot (t_{DPul} - t_{DPiz}) = \rho_{DP} \cdot \dot{V}_U \cdot c_{DP} \cdot (t_{DPul} - t_{DPiz})$$

$$\dot{m}_{DP} = \frac{Q}{c_{DP} \cdot (t_{DPul} - t_{DPiz})} = \frac{200}{1.29 \cdot (1000 - 350)} = 0.23852 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 858.676 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

Volumni protok dimnih plinova se može jednostavno izračunati iz izraza:

$$\dot{V}_{DP} = \frac{\dot{m}_{DP}}{\rho_{DP}}$$

ali se prije toga mora odrediti srednja gustoća dimnih plinova.

Gustoća se može odrediti tako da se koristi jednadžba idealnih plinova.

Gustoća se računa za srednju temperaturu dimnih plinova  $t_{DPsr} = 675^\circ\text{C}$

$$T_{DPsr} = 948.15 \text{ K}$$

$$\rho_{DP} = \frac{p}{R \cdot T_{DPsr}} = \frac{1 \cdot 10^5}{300.212 \cdot 948.15} = 0.3513 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$R = \frac{8314}{M_{DP}} = \frac{8314}{27.6938} = 300.212 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Protočni volumen dimnih plinova:

$$\dot{V}_{DP} = \frac{\dot{m}_{DP}}{\rho_{DP}} = \frac{858.676}{0.3515} = 2444.281 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 0.679 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

### 12.3. Prijelaz topline na strani primara (na strani dimnih plinova)

#### 12.3.1. Fizikalna svojstva dimnih plinova

Fizikalna svojstva plinova su potrebna za određivanje bezdimenzijskih značajki.

Računaju se za srednju temperaturu dimnih plinova:

$$t_{\text{DPsr}} = \frac{t_{\text{DPul}} + t_{\text{DPiz}}}{2} = \frac{100 + 350}{2} = 675^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\text{DPsr}} = t_{\text{DPsr}} + 273.15 = 948.15 \text{ K}$$

Specifična toplina dimnih plinova:

$$c_{\text{DP}} = 1290 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Gustoća dimnih plinova:

$$\rho_{\text{DP}} = 0.3513 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dinamička žilavost dimnih plinova se može izračunati prema Sutherland-ovoj formuli:

$$\eta_{\text{DP}} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{T_{\text{DPsr}}}{T_0}} \cdot \frac{1 + \frac{C}{T_0}}{1 + \frac{C}{T_{\text{DPsr}}}}$$

Za svakog sudionika dimnih plinova dinamička žilavost se računa posebno i tada se, uz množenje sa volumnim udjelima, zbrajaju. Rezultati su prikazani tabelarno:

Tablica 3. Dinamička žilavost dimnih plinova

plin	$r_i$	$T_0$ [°C]	$\eta_0 \cdot 10^8$ [Pa · s]	C [K]	$\eta_{675} \cdot 10^8$ [Pa · s]	$r_i \cdot \eta_{675} \cdot 10^8$ [Pa · s]
CO <sub>2</sub>	0.09091	0	1366	274	3955.00	359.55
N <sub>2</sub>	0.71818	0	1665	103	3853.23	2767.31
O <sub>2</sub>	0.00909	0	1920	138	4700.30	42.73
H <sub>2</sub> O	0.18182	0	–	–	3550.00	645.46
$\eta_{\text{DP}} \cdot 10^8 = \sum r_i \cdot \eta_{675} \cdot 10^8$						3815.05

$$\eta_{\text{DP}} = 3815.05 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$



Koeficijent toplinske vodljivosti se također računa prema Sutherland-ovoj formuli:

$$\lambda_{DP} = \frac{D \cdot (1 + E \cdot T_{DPsr}) \cdot \sqrt{T_{DPsr}}}{1 + \frac{C}{T_{DPsr}}}$$

Tablica 4. Koeficijent toplinske vodljivosti dimnih plinova

plin	$r_i$	C [K]	$10^6 \cdot E$ [K <sup>-1</sup> ]	$10^6 \cdot D$ [W/mK <sup>3/2</sup> ]	$\lambda_0$ [W/mK]	$\lambda_{675}$ [W/mK]	$r_i \cdot \lambda_{675}$ [W/mK]
CO <sub>2</sub>	0.09091	274.0	1026	1352	0.0163	0.0637	0.005792
N <sub>2</sub>	0.71818	123.6	0	2115	0.0241	0.0688	0.049402
O <sub>2</sub>	0.00909	123.6	0	2115	0.0241	0.0688	0.000625
H <sub>2</sub> O	0.18182	673.0	0	3365	0.0159	0.0785	0.014281
$\lambda_{DP} = \sum r_i \cdot \lambda_{675}$							0.070101

$$\lambda_{DP} = 0.070101 \frac{W}{m \cdot K}$$

### 12.3.2. Koeficijent prijelaza topline – prijelaz topline u cijevi – izbor cijevi

Izabrana brzina strujanja dimnih plinova u cijevi:

$$w_{DP} = 11 \text{ m/s}$$

Izbor cijevi:

Izabrana je cijev napravljena od Č7400 (čelik za povišene temperature) dimenzija

DN25 (1'')  $\phi 33.7 \times 2.6 \text{ mm}$

$$d_u = 28.5 \text{ mm}$$

$$d_v = 33.7 \text{ mm}$$

Reynoldsov broj:

$$Re = \frac{w_{DP} \cdot d_u}{\nu_{DP}} = \frac{w_{DP} \cdot d_u \cdot \rho_{DP}}{\eta_{DP}} = \frac{11 \cdot 0.0285 \cdot 0.3513}{3815.04 \cdot 10^{-8}} = 2886.8 > 2300$$

(prijelazno područje)

Prandtlov broj:

$$Pr = \frac{\nu_{DP}}{a_{DP}} = \frac{\frac{\eta_{DP}}{\rho_{DP}}}{\frac{\lambda_{DP}}{\rho_{DP} \cdot C_{DP}}} = \frac{\eta_{DP} \cdot C_{DP}}{\lambda_{DP}} = \frac{3815.05 \cdot 10^{-8} \cdot 1290}{0.070101} = 0.702$$

**Hausen**-ov izraz za proračun prijelaza topline u prijelaznom i turbulentom području ( $Re > 2300$ ):

$$Nu = 0.0235 \cdot \left[ Re^{0.8} - 266 + 510 \cdot \left( \frac{d_u}{L} \right)^{0.5} \right] \cdot (1.8 \cdot Pr^{0.3} - 0.8) \cdot f_G \cdot f_Q$$

$$Nu = 0.0235 \cdot \left[ 2886.8^{0.8} - 266 + 510 \cdot \left( \frac{0.0285}{3.9} \right)^{0.5} \right] \cdot (1.8 \cdot 0.702^{0.3} - 0.8) \cdot 1.0377 \cdot 1.0572$$

$$Nu = 7.687$$

U kojima za  $f_G$  (geometrijski faktor) vrijedi izraz:

$$f_G = 1 + \left( \frac{d_u}{L} \right)^{\frac{2}{3}} = 1 + \left( \frac{0.0285}{3.9} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.0377$$

dok je  $f_Q$  (korekcijski faktor za smjer izmjene topline) definiran izrazom:

$$f_Q = \left( \frac{\eta_{DP}}{\eta_{DPst}} \right)^{0.14} = \left( \frac{3815.05}{2563.53} \right)^{0.14} = 1.0572$$

Temperatura stijenke je pretpostavljena na  $t_{STu} = 271^\circ\text{C}$ . Rezultat je prikazan u tablici 5.

Tablica 5. Dinamička žilavost dimnih plinova kod temperature  $271^\circ\text{C}$

plin	$r_i$	$T_0$ [°C]	$\eta_0 \cdot 10^8$ [Pa · s]	C [K]	$\eta_{271} \cdot 10^8$ [Pa · s]	$r_i \cdot \eta_{271} \cdot 10^8$ [Pa · s]
CO <sub>2</sub>	0.09091	0	1366	274	2568.62	233.51
N <sub>2</sub>	0.71818	0	1665	103	2721.11	1954.25
O <sub>2</sub>	0.00909	0	1920	138	3253.85	29.58
H <sub>2</sub> O	0.18182	0	–	–	1904.00	346.19
$\eta_{DPst} \cdot 10^8 = \sum r_i \cdot \eta_{271} \cdot 10^8$						2563.53

$$Nu = \frac{\alpha_{DP} \cdot d_u}{\lambda_{DP}}$$

$$\alpha_{DP} = \frac{Nu \cdot \lambda_{DP}}{d_u} = \frac{7.687 \cdot 0.070101}{0.0285} = 18.907 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

## 12.4. Prijelaz topline na strani sekundara

### 12.4.1. Fizikalna svojstva ulja

Fizikalna svojstva ulja se uzimaju za srednju temperaturu ulja:

$$t_{Usr} = \frac{t_{Uul} + t_{Uiz}}{2} = \frac{260 + 264.8}{2} = 262.4^{\circ}\text{C}$$

Očitano iz priloga 1 za termičko ulje:

$$\rho_U = 786.176 \text{ kg/m}^3$$

$$C_U = 2393.96 \text{ J/kg K}$$

$$\lambda_U = 0.08676 \text{ W/m K}$$

$$\mu_U = 0.2576 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$$

### 12.4.2. Koeficijent prijelaza topline – izmjenjivač sa segmentnim pregradama

Reynoldsov broj za odabranu brzinu strujanja  $w_u = 0.45 \text{ m/s}$ :

$$Re = \frac{w_U \cdot d_U}{\nu_U} = \frac{w_U \cdot d_U \cdot \rho_U}{\eta_U} = \frac{0.45 \cdot 0.0337 \cdot 786.176}{0.2576 \cdot 10^{-3}} = 46282.4$$

Prandtllov broj iznosi:

$$Pr = \frac{\nu_U}{a_U} = \frac{\eta_U \cdot C_U}{\lambda_U} = \frac{0.2576 \cdot 10^{-3} \cdot 2393.96}{0.08676} = 7.108$$

Prema **Donohue**-u, za proračun prijelaza topline izmjenjivača sa segmentnim pregradama, a u području  $4 \leq Re \leq 5 \cdot 10^4$  i  $0.5 \leq Pr \leq 5 \cdot 10^3$ , preporučuje se izraz:

$$Nu = C \cdot Re^{0.6} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot f_Q$$

Pri čemu za  $f_Q$  vrijedi izraz:

$$f_Q = \left( \frac{\eta_U}{\eta_{Ust}} \right)^{0.14} = \left( \frac{0.2576}{0.249} \right)^{0.14} = 1.0048$$

$\mu_{st}$  je dinamička žilavost ulja kod temperature stijenke cijevi – pretpostavljeno

$$t_{STv} = 270.5^{\circ}\text{C}$$

$$\eta_{Ust} = 0.249 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Konstanta  $C$  iznosi za plašt sa vrlo dobrom mehaničkom obradom  $C=0.25$ , dok za neobardeni iznosi  $C=0.22$ . Izabrano  $C=0.25$

Nusseltova značajka tada ima vrijednost:

$$Nu = C \cdot Re^{0.6} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot f_Q = 0.25 \cdot 46282.4^{0.6} \cdot 7.108^{\frac{1}{3}} \cdot 1.0048 = 304.218$$

Iz Nusselta dobivamo koeficijent prijelaza topline na strani ulja:

$$\alpha_U = \frac{Nu \cdot \lambda_U}{d_v} = \frac{304.218 \cdot 0.08676}{0.0337} = 783.2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

## 12.5. Provjera pretpostavljenih temperatura stijenki cijevi

Kod proračuna prijelaza topline na strani primara pretpostavljena je temperatura stijenke cijevi s unutarnje strane:

$$t_{STu} = 271^{\circ}\text{C}$$

a kod proračuna prijelaza topline na strani sekundara temperatura stijenke cijevi s vanjske strane:

$$t_{STv} = 270.5^{\circ}\text{C}$$

### Vanjska temperatura cijevi $t_{STv}$

Gustoća toplinskog toka na strani dimnih plinova (u cijevi) svedena na vanjsku površinu cijevi, kao funkcija vanjske temperature stijenke cijevi:

$$q_{DPv} = \frac{t_{DPsr} - t_{STv}}{\frac{d_v}{d_u \cdot \alpha_{DP}} + \frac{d_v}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{d_v}{d_u}} = \frac{675 - t_{STv}}{\frac{33.7}{28.5 \cdot 18.907} + \frac{0.0337}{2 \cdot 40} \cdot \ln \frac{33.7}{28.5}}$$

$$q_{DPv} = 15.97157 \cdot (675 - t_{STv})$$

$$\alpha_{DP} = 18.907 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$t_{DPsr} = 675^{\circ}\text{C} - \text{srednja temperatura dimnih plinova}$$

$$\lambda = 40 \frac{\text{W}}{\text{mK}} - \text{očitano za čelik Č 7400}$$

Gustoća toplinskog toka na strani ulja (oko cijevi) svedena na vanjsku površinu cijevi, kao funkcija vanjske temperature stijenke cijevi:

$$q_{Uv} = \alpha_u \cdot (t_{STv} - t_{Usr}) = 783.2 \cdot (t_{STv} - 262.4)$$

$$\alpha_u = 783.2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$t_{Usr} = 262.4^{\circ}\text{C} - \text{srednja temperatura ulja}$$

Ravnoteža toplinskih tokova:

$$q_{DPv} = q_{Uv}$$

$$15.97157 \cdot (675 - t_{STv}) = 783.2 \cdot (t_{STv} - 262.4)$$

$$799.17157 \cdot t_{STv} = 216292.4898$$

$$t_{STv} = 270.64^{\circ}\text{C}$$

Kako je pretpostavljena vanjska temperatura cijevi  $t_{STv} = 270.64^{\circ}\text{C}$ , rezultat zadovoljava.

**Unutarnja temperatura cijevi  $t_{STu}$** 

Gustoća toplinskog toka na strani ulja (oko cijevi) svedena na unutarnju površinu cijevi, kao funkcija unutarnje temperature stijenke cijevi:

$$q_{Uu} = \frac{t_{STu} - t_{Usr}}{\frac{d_u}{d_v \cdot \alpha_u} + \frac{d_u}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{d_v}{d_u}} = \frac{t_{STu} - 262.4}{\frac{28.5}{33.7 \cdot 783.2} + \frac{0.0285}{2 \cdot 40} \cdot \ln \frac{33.7}{28.5}}$$

$$q_{Uu} = 877.5758 \cdot (t_{STu} - 262.4)$$

Gustoća toplinskog toka na strani dimnih plinova (u cijevi) svedena na unutarnju površinu cijevi, kao funkcija unutarnje temperature stijenke cijevi:

$$q_{DPu} = \alpha_{DP} \cdot (t_{DPsr} - t_{STu}) = 18.907 \cdot (675 - t_{STu})$$

Ravnoteža toplinskih tokova:

$$q_{DPu} = q_{Uu}$$

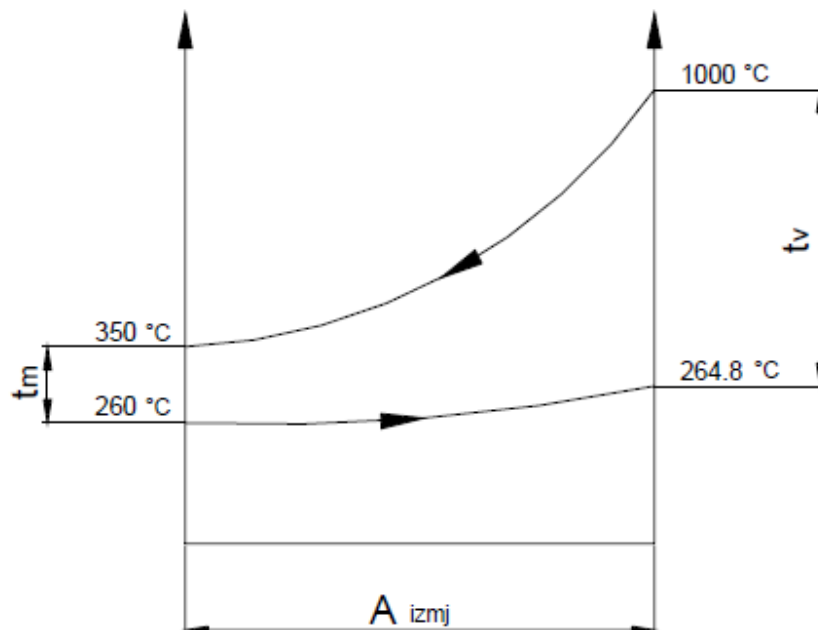
$$877.5758 \cdot (t_{STu} - 262.4) = 18.907 \cdot (675 - t_{STu})$$

$$896.4828 \cdot t_{STu} = 243038.115$$

$$t_{STu} = 271.1^\circ\text{C}$$

Kako je pretpostavljena unutarnja temperatura cijevi  $t_{STu} = 271^\circ\text{C}$  i ovaj rezultat zadovoljava.

## 12.6. Srednja logaritamska razlika temperatura



Slika 37. Tok temperatura na izmjenjivaču topline

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\Delta\vartheta_v - \Delta\vartheta_m}{\ln \frac{\Delta\vartheta_v}{\Delta\vartheta_m}} = \frac{(1000 - 264.8) - (350 - 260)}{\ln \frac{1000 - 264.8}{350 - 260}} = 307.2^\circ\text{C}$$

## 12.7. Koeficijent prolaza topline sveden na vanjsku stranu cijevi

$$\alpha_{DP} = 18.907 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$\alpha_u = 783.2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$k_v = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{DP}} \cdot \frac{d_v}{d_u} + \frac{d_v}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{d_v}{d_u} + \frac{1}{\alpha_u}} = \frac{1}{\frac{1}{18.907} \cdot \frac{33.7}{28.05} + \frac{0.0337}{2 \cdot 40} \cdot \ln \frac{33.7}{28.5} + \frac{1}{783.2}}$$

$$k_v = 15.6524 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

Koeficijent prolaza topline se inače još treba korigirati zbog onečišćenja izmjenjivača topline, ali kako je to onečišćenje za ulje malo, uz nizak koeficijent prolaza topline, ono se može zanemariti. [4] [5] [6]

## 13. PRIKAZ STVARNIH KONSTRUKCIJA IZMJENJIVAČA TOPLINE

### 1. IZMJENJIVAČ TOPLINE S DVOSTRUKOM CIJEVI



Slika 38. Izmjenjivač topline s dvostrukom cijevi

Prednosti:

- najjednostavniji oblik izmjenjivača topline
- lako se sklapa, montira
- niski troškovi proizvodnje

Nedostatci:

- vrlo često curenje, propuštanje
- zahtjeva puno vremena za rastavljanje i čišćenje
- mala površina prijenosa topline
- zauzima veliki prostor



Slika 39. Izmjenjivač topline u procesu proizvodnje



Slika 40. Izmjenjivač topline u procesu proizvodnje



## 2. „SHELL AND TUBE“ IZMJENJIVAČ



Slika 41. „Shell and tube“ izmjenjivač

### Prednosti:

- konstrukcija i način izvedbe izmjenjivača daje veliku površinu u malom volumenu
- može se konstruirati od većeg broja materijala
- dobro uspostavljena procedura konstruiranja
- mala količina radnog medija
- mala temperaturna razlika primar/sekundar
- reducirana težina

### Nedostateci:

- veći pad tlaka
- složenija izrada
- problemi s čišćenjem izmj. površina radi uskih međuprostora



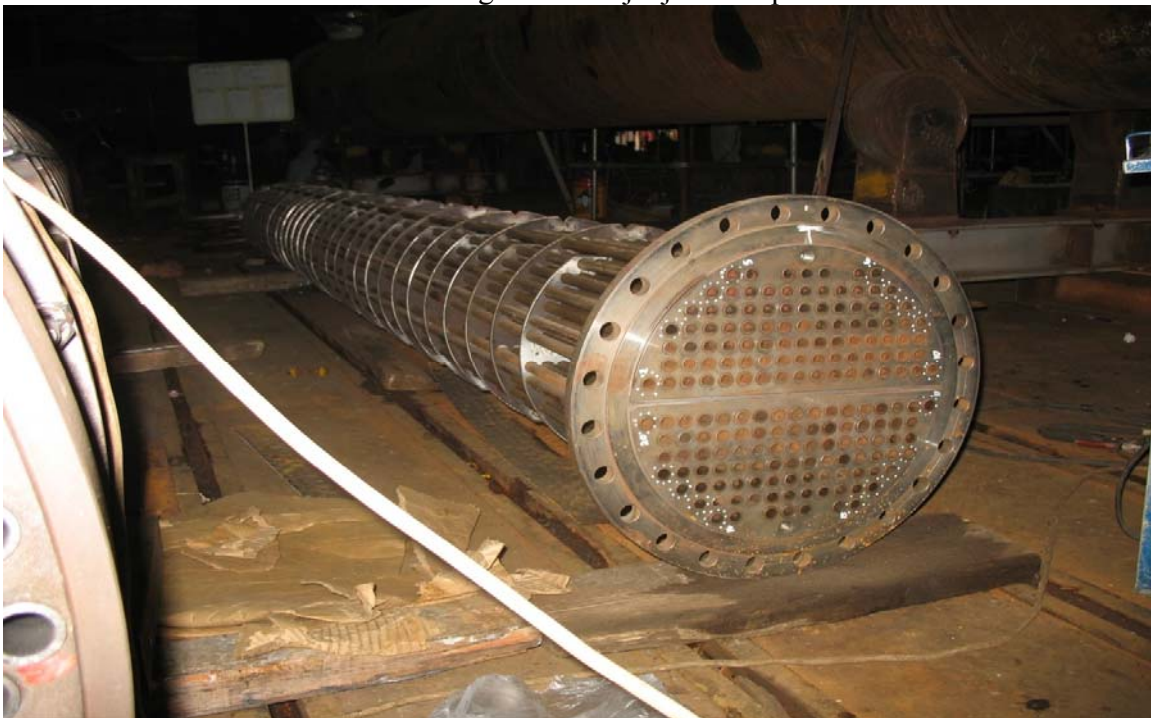
Slika 42. „Shell and tube“ izmjenjivač u proizvodnji



Slika 43. „Shell and tube“ izmjenjivač u proizvodnji



Slika 44. Pregrade u izmjenjivaču topline



Slika 45. Izmjenjivač u proizvodnji



Slika 46. Postupak bušenja razdjelne ploče



Slika 47. Razdjelna ploča



Slika 48. Gotova konstrukcija „Shell and tube“ izmjenjivača topline

## 14. ZAKLJUČAK

Rad sam napravio samostano redosljedom kako je napisano. Prvo sam napravio uvod, u teorijskom dijelu rada opisao sam izmjenjivače topline s posebnim naglaskom na svojstva i vrste rekuperativnih izmjenjivača, te su opisana svojstva kao i njihova podjela, osnovni tipovi, matematička analiza.

Nakon postave zadatka, proveo sam termodinamički proračun izmjenjivača topline ulje – dimni plinovi. Izmjenjivač je postavljen vertikalno u prostoru, dimni plinovi struje kroz cijevi, a termičko ulje usmjeravano je pregradama oko cijevi. Proračun je pokazao da pretpostavljene temperature stijenki cijevi s vanjske i unutarnje strane primara i sekundara zadovoljavaju za izbor cijvi od Č7400 (čelik za povišene temperature) i odabranu brzinu strujanja.

## LITERATURA

[1] Galović, A. : Termodinamika II, Zagreb, 2003.

[2] Wen-Jei Yang, Yasuo Mori: Heat transfer in high technology and power engineering, San Diego, 1987.

[3] Sadid Kakaç: Heat Exchangers, CRS Press, 1997.

[4] Srećko Švaić: Elementi gradnje aparata, podloge, FSB, Zagreb

[5] Toplinske tablice, interno izdanje, FSB, Zagreb

[6] Krešimir Bakić: Elementi gradnje aparata, seminarski rad, 1998.

[www.google.hr](http://www.google.hr)