Aproksimacija i interpolacija funkcija

Lesić, Marijana

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
Specijalistički diplomski stručni studij strojarstva

Marijana Lesić

APROKSIMACIJA I INTERPOLACIJA FUNKCIJA

Završni rad

Mentor:
mr.sc. Marina Tevčić, viši predavač

Karlovac, 2017.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Trg J.J.Strossmayera 9
HR-47000, Karlovac, Croatia
Tel. +385 - (0)47 - 843 - 510
Fax. +385 - (0)47 - 843 – 579

HRN EN ISO 9001:2009

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

Specijalistički studij: Strojarstva

Usmjerenje: Proizvodno strojarstvo

Karlovac, 12.12.2016.

ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

Student: Marijana Lesić

Matični broj: 0111413014

Naslov: Aproksimacija i interpolacija funkcija

Opis zadatka:

Obraditi numeričke metode aproksimacije i interpolacije funkcija s posebnim osvrtom na Lagrangeovu interpolaciju, Newtonov interpolacijski polinom, Metodu najmanjih kvadrata i Spline interpolaciju.
Sve metode ilustrirati na istom primjeru te napisati usporedbu dobivenih rezultata.

Zadatak zadan:	Rok predaje rada:	Predviđeni datum obrane:
12.12.2016.	06.02.2017.	15.02.2017.

Mentor:
mr. sc. Marina Tevčić, viši predavač

Predsjednik Ispitnog povjerenstva:
dipl.ing. Marijan Brozović, viši predavač

PREDGOVOR

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija, iskustvo stečeno tijekom rada te koristeći navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojoj mentorici mr.sc.Marini Tevčić na strpljenju, stručnoj pomoći i vodstvu pri izradi završnog rada, kao i znanju, iskustvu i savjetima koje mi je nesebično ustupila.

Veliko hvala svim profesorima, kolegama i prijateljima koji su mi na putu obrazovanja bili velika potpora.

Također hvala mojoj obitelji na razumijevanju i bezuvjetnoj podršci tijekom studiranja.

Marijana Lesić

APROKSIMACIJA I INTEROLACIJA FUNKCIJA

SAŽETAK

U ovom završnom radu obrađuju se metode interpolacije i aproksimacije funkcije. Ukratko su opisani ključni pojmovi: interpolacija, aproksimacija, Lagrangeov i Newtonov interpolacijski polinom, metoda najmanjih kvadrata te spline interpolacija. Svaka metoda prikazana je kroz primjer, nacrtan je graf funkcije koji najbolje aproksimira funkciju na zadanom skupu diskretnih točaka. Analizirani podaci i usporedba metoda daju nam uvid koja metoda daje točnije rezultate u zavisnosti od zadanih parametara. Problem koji se javlja kod interpolacije ovim metodama je nagla promjena funkcije. U tom slučaju potrebno je smanjiti područje razmatranja ili koristiti npr. interpolacijski spline točno između ili u okolini točaka koje najviše osciliraju. Na temelju dobivenih rezultata ne možemo izvojiti jedan općeniti postupak koji bi bio primjenjiv za sve slučajeve. Svaki slučaj je potrebno analizirati za sebe, analizirati točke rasipanja te odabrati najpovoljniju metodu za konkretni slučaj.

KLJUČNE RIJEČI: *aproksimacija, interpolacija, Lagrange, Newton, Metoda najmanjih kvadrata, Spline*

APPROXIMATION AND INTERPOLATION OF FUNCTIONS

SUMMARY

This paper is an elaboration of methods of interpolation and approximation of functions. It gives a brief description of key terms: interpolation, approximation, Lagrange's and Newton's interpolation polynomial, Least-Squares method and Spline interpolation. Each method is described by example, with the chart that best approximates the function on a given discrete set of points. Analysed data and method comparison give an insight in which method is more accurate depending on given parameters. The problem that occurs with interpolation by these methods is a sudden change of function. In that case it is necessary to reduce the area of consideration or use, for example interpolation spline right in between or around the points that oscillate the most. The given results do not enable us to single out one general procedure that applies to all cases. Each case requires an individual analysis, dissipation points analysis and selection of the best method for the specific case.

KEY WORDS: *approximation, interpolation, Lagrange, Newton least-squares techniques, Spline*

SADRŽAJ

1. UVOD

Kao i sve grane matematike, numerička analiza je vrlo opsežna i u stalnom razvoju iako su prvi postupci numeričke matematike stari koliko i matematika općenito.

Numerička matematika se bavi približnim ili aproksimativnim rješavanjem matematičkih problema. Razlikujemo numeričku matematiku, numeričku linearnu algebru, numeričko rješavanje nelinearnih jednadžbi, aproksimacijske i interpolacijske metode itd. Za primjenu metoda numeričke matematike potrebno je poznavati i analizirati ocjenu pogreške.

Općenito možemo reći, problem koji rješavamo naziva se ulazna informacija a odgovarajući rezultat izlazna informacija. Postupak transformacije ulazne u izlaznu informaciju zovemo algoritam.

U ovom završnom radu obrađena je aproksimacija ili približno poklapanje te interpolacija ili točno poklapanje.

Interpolacijom dolazimo do funkcija koje točno prolaze kroz sve zadane točke, a koristimo je za mali broj ulaznih podataka. Interpolacija podrazumijeva prolazak interpolacijske funkcije kroz sve zadane točke, dok aproksimacija dopušta pogreške u određenoj mjeri, a zatim dobivenu funkciju zaglađujemo.

U slučaju interpolacije, problem određivanja funcije f nazivamo problem interpolacije, a zadane točke x_i zovu se čvorovi (bazne točke, interpolacijske točke). Funkciju f biramo prema prirodi modela, ali tako da bude relativno jednostavna za računanje. Najčešće su to polinomi, trigonometrijske funcije, eksponencijalne funkcije te u novije vrijeme i racionalne funkcije.

U praksi se pokazalo da nije pametno za interpolaciju koristiti polinome stupnja većeg od tri jer kod nekih funkcija povećanje stupnja interpolacijskog polinoma može dovesti do povećanja grešaka. Zbog toga se umjesto visokog stupnja interpolacijskog polinoma koristi interpolacija po dijelovima polinoma tzv. spline interpolacija.

Aproksimacijom dolazimo do funkcija koje prolaze kroz grupu podataka na najbolji mogući način, bez obaveze da točno prođu kroz zadane točke. Aproksimacija je pogodna za velike grupe podataka, lijepo grupirane podatke, te male i velike grupe razbacanih podataka.

Aproksimacija se javlja u dva oblika. Poznata nam je funkcija f, ali je njena forma komplicirana za računanje. U tom slučaju odabiremo informacije o funkciji koje ćemo koristiti. Grešku dobivene aproksimacije možemo ocijeniti s obzirom na pravu vrijednost funkcije.

Funkcija f nam je nepoznata, ali su poznate samo neke informacije o njoj. Na primjer, poznate su vrijednosti na nekom skupu točaka. Zamjensku funkciju φ određujemo iz raspoloživih informacija, koje, osim samih podataka, uključuju i očekivani oblik ponašanja podataka, tj. funkcije φ. U ovom slučaju ne možemo napraviti ocjenu pogreške bez dodatnih informacija o nepoznatoj funkciji f.

U praksi se češće susrećemo s varijantom da nam funkcija f nije poznata. Najčešće se javlja kod mjerenja raznih veličina, jer osim izmjerenih podataka, pokušavamo aproksimirati i podatke koji se nalaze između izmjerenih točaka.

Neki od matematičkih problema mogu se riješiti numeričkim metodama, međutim, ne uvijek s velikom preciznošću i točnošću. Ponekad vrijeme koje imamo za rješavanje problema nije dovoljno te u tom slučaju koristimo programske metode pomoću računala. Programiranje omogućuje rješavanje kompleksnih zadataka s velikom točnošću i u kratkom periodu. Sposobnost računala da u realnom vremenu obavi veliki broj matematičkih operacija pruža velike mogućnosti numeričkoj matematici i matematici općenito te samim time i razvoju znanosti i tehnike.

Glavna zadaća numeričke matematike je konstrukcija i analiza metoda (algoritama) i formiranje odgovarajućeg softvera. Veliki napredak je u realizaciji programskih paketa numeričkih softvera kao što su: MATLAB (The MathWorks, Inc., http://www.mathworks.com), MATHEMATICA (Wolfram Research, Inc., http://www.wolfram.com), MATHCAD (Mathsoft, PTC., http://www.ptc.com/.com), itd.

Sva programska rješenja predstavljaju integrirane sisteme za numerička i simbolička izračunavanja, grafičku prezentaciju i interpretaciju te pružaju podršku koja omogućuje korisniku programiranje na jednostavan način.

2. OSNOVNI POJMOVI

Problem s kojim se često susrećemo u praksi je kako izračunati vrijednost neke funkcije za koju nemamo analitički izraz, ali znamo njene vrijednosti na nekom diskretnom skupu točaka $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n$.

Postavljaju se sljedeća pitanja:

- Kako u tom slučaju pronaći vrijednost funkcije u točkama koje nisu iz zadanog skupa?
- Kako do tih podataka doći u što kraćem vremenskom periodu?

Rješenju problema pristupamo na sljedeći način:

U području podataka, tj. u intervalu $\left[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n\right]$ nepoznatu funciju f treba aproksimirati nekom jednostavnom poznatom funcijom φ tako da vrijedi:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,2,..., n.$$

Funkcija φ bira se prema prirodi modela, ali tako da bude relativno jednostavna za računanje. Ona ovisi o parametrima $a_k, k = 0,...,n$, koje treba odrediti po nekom kriteriju $\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1,..., a_n)$.[1]

Kad smo funkciju φ zapisali u ovom obliku, kao funkciju koja ovisi o parametrima a_k, možemo reći da smo odabrali opći oblik aproksimacijske funkcije.

Aproksimacijom skupa točaka određuju se nepoznati parametri funkcije unaprijed zadanog oblika (ponekad linearne funkcije, ali češće funkcije drugih oblika, poput polinoma višeg stupnja, trigonometrijskih, logaritamskih ili eksponencijalnih funkcija).

Cilj aproksimacije je odrediti funkciju koja "najbolje" opisuje, tj. najmanje odstupa od skupa zadanih točaka. Kriteriji po kojima se utvrđuje "najmanje odstupanje" od skupa zadanih točaka su različiti. Npr., upotrebljava se kriterij najmanjih kvadrata. Tim se kriterijem traži da suma kvadrata udaljenosti između zadanih točaka i pripadnih aproksimacija bude minimalna.

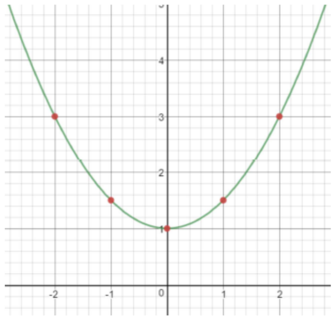
Za razliku od aproksimiranja diskretnog skupa zadanih točaka, prilikom aproksimiranja zadanih funkcija kriterij za "najmanjeg odstupanja" koristi se kriterij apsolutnog odstupanja (kojim se traži maksimum apsolutne vrijednosti razlike između

[1] Tevčić, M.: **Inženjerska matematika**, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

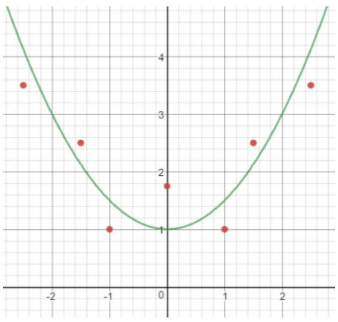
vrijednosti funkcije i njezine aproksimacija na zadanom intervalu) ili apsolutni integralni kriterij (kojim se traži da vrijednost integrala apsolutne vrijednosti razlike između funkcije i njezine aproksimacije bude minimalna). Ovakvi kriteriji definirani su nad intervalima i stoga se teže ocijenjuju. Za njihov izračun često se koriste i neke od numeričkih aproksimativnih metoda, poput diskretizacije podataka ili numeričkog integriranja.[2]

Interpolacija označava metodu konstrukcije novih točaka podataka unutar raspona diskretnog skupa poznatih točaka podataka (npr. prikljupljnih mjerenjem).

Interpolacija dolazi od riječi *inter* između i *polos* os, osovina, odnosno točka, čvor. Svako izračunavanje nove točke između dviju ili više postojećih točaka podataka je interpolacija. Postoje mnoge metode interpolacije od kojih mnoge uključuju prilagođavanje nekakve vrste funkcije podacima i zatim procjenu vrijednosti te funkcije na željenoj točki. Jedan od najjednostavnijih oblika interpolacije je izračun aritmetičke sredine iz vrijednosti dviju susjednih točaka kako bi se odredila točka u njihovoj sredini.[3]



Slika 2.1.: **Primjer interpolacije**
Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru



Slika 2.2.: **Primjer aproksimacije**
Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

[2] www. hr.wikipedia.org/wiki/Aproksimacija
[3] www. hr.wikipedia.org/wiki/Interpolacija

3. METODE APROKSIMACIJE I INTERPOLACIJE FUNKCIJA

Ukoliko su poznate informacije o funkciji f definirane na skupu $X \subseteq R$, na osnovu tih informacija želimo funkciju f zamijeniti nekom drugom funkcijom φ na skupu X, tako da su f i φ bliske. Skup X je najčešće interval oblika $[a,b]$ ili diskretan skup točaka.

Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije je: $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x)$, gdje su $\varphi_0,...\varphi_m$ poznate funkcije koje znamo računati. Primijetimo da se linearnost ne odnosi na oblik funkcije $\varphi_0,...,\varphi_m$, već na njenu ovisnost o parametrima a_k koje treba odrediti. Prednost ovog oblika aproksimacijske funkcije je da se odredivanje parametara a_k obično svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Najčešće korišteni oblici linearnih aproksimacijskih funkcija su algebarski i trigonometrijski polinomi i spline funkcije.[4]

Algebarski polinomi $\varphi(x) = x^k, k = 0,1,2,...,m$ ili $\varphi(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$. gdje funkciju $\varphi(x)$ ne treba nužno zapisati u standardnoj bazi običnih potencija $\{1, x,..., x^m\}$. Vrlo često je neka druga baza bitno pogodnija, na primjer, tzv. ortogonalnih polinoma ili baza $\{1,(x-x_0),(x-x_1),...\}$ gdje su x_0, x_1 zadane točke.

Trigonometrijski polinomi pogodni su za aproksimaciju periodičkih funkcija, npr., u modeliranju signala. Za funkcije φ uzima se $m+1$ funkcija iz skupa $\{1,\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x,...,\}$. Ponekad koristimo faktor u argumentu sinusa i kosinusa koji služi za kontrolu perioda, a ponekad biramo samo parne ili samo neparne funkcije iz ovog skupa.

Za zadane točke $x_0, x_1,..., x_n$ spline funkcija na svakom podintervalu između zadanih točaka svodi se na polinom odredenog fiksnog (niskog) stupnja, tj. $\varphi_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, k = 1,2,...,n$ gdje su p_k polinomi najčešće stupnjeva 1, 2, 3 ili 5. U točkama x_i obično zahtijevamo da funkcija φ zadovoljava još i tzv. "uvjete lijepljenja", tj. iste vrijednosti funkcija i iste vrijednosti njenih derivacija u veznim točkama ili nekih aproksimacija tih derivacija.

[4] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer Sanja, Singer Saša: **Numerička analiza,** PMF Zagreb, 2003.

Spline aproksimacija se danas najčešće koristi zbog dobrih svojstava s obzirom na grešku aproksimacije i kontrolu oblika aproksimacijske funkcije.

Najčešće korišteni oblici nelinearne aproksimacije funkcije su eksponencijalne i racionalne aproksimacije.[5]

Eksponencijalne aproksimacije koriste za funkciju oblik:
$\varphi(x) = c_0 e^{b_o x} + c_1 e^{b_1 x} + ... + c_r e^{b_r x}$ koje imaju $n = 2r + 2$ nezavisna parametra.

Racionalne aproksimacije koriste funkciju oblika $\varphi(x) = \dfrac{b_0 + b_1 x + ... + b_r x^r}{c_0 + c_1 x + ... + c_s x^s}$.

Ovako definirane racionalne funkcije imaju mnogo bolja svojstva aproksimacije nego polinomi, a pripadajuća teorija je relativno nova. Aproksimacijske funkcije biraju se tako da "najbolje" zadovolje uvjete koji se postavljaju na njih. Najčešći su zahtjevi da graf aproksimacijske funkcije prolazi odredenim točkama tj. da interpolira funkciju u tim točkama ili da je odstupanje aproksimacijske od polazne funkcije u nekom smislu minimalno.

[5] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer Sanja, Singer Saša: **Numerička analiza,** PMF Zagreb, 2003.

3.1. Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeova metoda zasniva se na sljedećem:

Zadana je funkcija $f:[a,b]\to R$ i međusobno različite točke $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ u intervalu $[a,b]$. Želimo aproksimirati funkciju f polinomom koji u odabranim točkama ima iste vrijednosti kao i funkcija f. Ovako postavljen problem ima nekoliko rješenja, no ako zahtijevamo da stupanj polinoma bude najviše n (polinom prolazi kroz $(n+1)$ različitu točku), onda postoji točno jedan takav polinom.[6]

Da pronađemo takav polinom koristimo se pomoćnim polinomima $L_k,\ k=0,1,2,...,n$.

Polinomi L_k imaju sljedeće svojstvo:

$$L_k(x_0)=0,...,\ L_k(x_{k-1})=0,\ L_k(x_k)=1,\ L_k(x_{k+1})=0,\ L_k(x_n)=0 \text{ tj.:}$$

$$L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & za\ i=j\\ 0, & za\ i\neq j\end{cases} \qquad i,j=0,1,...,n.$$

Koristeći to svojstvo definira se polinom P:

$$P(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+...+f(x_n)L_n(x).$$

U zadanom čvoru x_k vrijedi:

$$P(x_k)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x_k)=f(x_k)L_k(x_k)=f(x_k).$$

Potrebno je pronaći pomoćne polinome L_k. S obzirom da svaki polinom L_k ima n nultočaka $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$ vrijedi sljedeće:

$$L_k(x)=a_k(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)$$

Nepoznati koeficijent a_k računamo iz uvjeta $L_k(x_k)=1$, pa vrijedi:

$$1=a_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)$$

odnosno

$$a_k=\frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

Uvrštavamo u $L_k(x)$ dobivamo:

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)} \qquad (1)$$

[6] Tevčić, M.: **Inženjerska matematika**, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

Polinom $P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + ... + f(x_n)L_n(x)$ zovemo Lagrangeov interpolacijski polinom funkcije f za točke $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$.[7]

Za $n = 1$ polinom provlačimo kroz točke $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ i dobivamo Lagrangeov interpolacijski polinom, tj. jednadžbu pravca kroz dvije točke:

$L_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$.[8]

Za $n = 2$ polinom provlačimo kroz tri točke $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2).$$

Dobivamo Lagrangeov interpolacijski polinom, tj. jednadžbu parabole kroz tri točke.

Vrijedi sljedeća ocjena greške:

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \omega(x)$$

gdje su:

$$\omega(x) = |x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdot ... \cdot |x - x_n| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

---

[7] Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A.: **Matematički priručnik**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

[8] Ivanšić, I.: **Numerička matematika**, Element, Zagreb, 1998.

Primjer 1.: Interpolacija Lagrangeovim polinomom

Odrediti Lagrangeov interpolacijski polinom čiji graf prolazi sljedećim točkama:

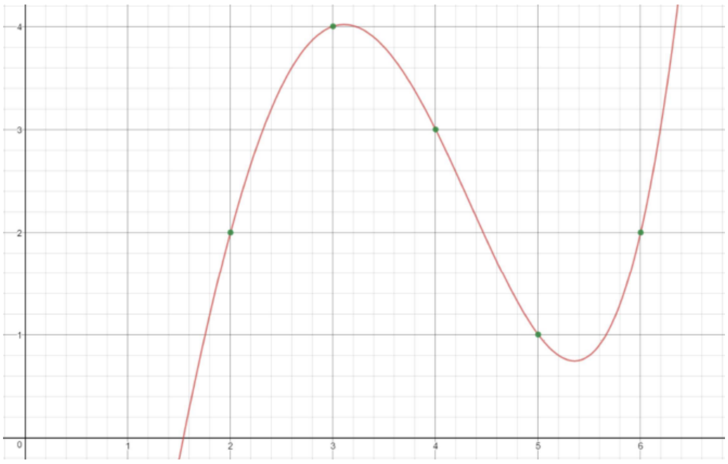
$T_0(2,2), T_1(3,4), T_2(4,3), T_3(5,1), T_4(6,2)$.

Izračunati vrijednost za $x = 3{,}5$.

Postupak rješavanja:

Zadane točke uvrštavamo u Lagrangeov interpolacijski polinom (1):

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} f(x_1) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} f(x_3) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} f(x_4) = \\
&= \frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)} \cdot 2 + \frac{(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)}{(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)} \cdot 4 + \frac{(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{(x-2)(4-3)(4-5)(4-6)} \cdot 3 + \\
&+ \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)}{(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)} \cdot 1 + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)} \cdot 2 = \\
&= \frac{(x^2-3x-4x+12)(x^2-5x-6x+30)}{(-1)(-2)(-3)(-4)} \cdot 2 + \frac{(x^2-2x-4x+8)(x^2-5x-6x+30)}{1(-1)(-2)(-3)} \cdot 4 + \\
&= \frac{(x^2-2x-3x+6)(x^2-5x-6x+30)}{1 \cdot 2 \cdot (-1)(-2)} \cdot 3 + \frac{(x^2-2x-3x+6)(x^2-5x-6x+30)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)} \cdot 1 + \\
&= \frac{(x^2-2x-3x+6)(x^2-4x-5x+20)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 = \\
&= \frac{2(x^4-18x^3+119x^2-342x+360)}{24} + \frac{4(x^4-17x^3+104x^2-268x+240)}{-6} + \\
&+ \frac{3(x^4-16x^3+91x^2-216x+180)}{-4} + \frac{x^4-15x^3+80x^2-180x+144}{-6} + \\
&+ \frac{2(x^4-14x^3+71x^2-154x+120)}{8} = \\
&= \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{119}{12}x^2 - \frac{57}{2}x + 30\right) + \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{34}{3}x^3 - \frac{208}{3}x^2 + \frac{536}{3}x - 160\right) + \\
&+ \left(-\frac{3}{4}x^4 - 12x^3 + \frac{273}{4}x^2 - 162x + 135\right) + \left(-\frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{40}{3}x^2 + 30x - 24\right) + \\
&+ \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{77}{6}x + 10\right) = \\
&= \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{12}x^2 + \frac{16}{3}x - 9
\end{aligned}
$$



Slika 3.1.: **Graf funkcije f(x)=0,083x^4-0,833x^3+1,416x^2+5,333x-9**
Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Računamo vrijednost funkcije za $x = 3{,}5$.

$$P(3{,}5) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{12}x^2 + \frac{16}{3}x - 9 =$$
$$= \frac{1}{12}\cdot 3{,}5^4 - \frac{5}{6}\cdot 3{,}5^3 + \frac{17}{12}\cdot 3{,}5^2 + \frac{16}{3}\cdot 3{,}5 - 9 = 3{,}804$$

Slika 3.2.: **Graf funkcije f(x)=0,083x^4-0,833x^3+1,416x^2+5,333x-9, naznačena vrijednost za x=3,5**
Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Primjer 2.: Interpolacija Lagrangeovim polinomom

Odrediti Lagrangeov interpolacijski polinom čiji graf prolazi sljedećim točkama:

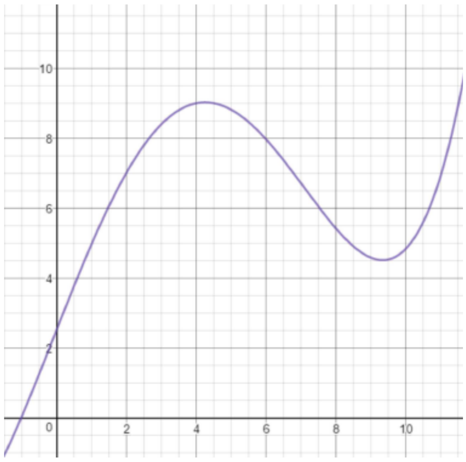
$T_0(0,2.5), T_1(2,7), T_2(4,9), T_3(6,8), T_4(8,5.5)$.

Izračunati vrijednosti za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

Postupak rješavanja:

Zadane točke uvrštavamo u Lagrangeov interpolacijski polinom (1):

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} f(x_1) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} f(x_3) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} f(x_4) = \\
&= \frac{(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)}{(0-2)(0-4)(0-6)(0-8)} \cdot 2{,}5 + \frac{(x-0)(x-4)(x-6)(x-8)}{(2-0)(2-4)(2-6)(2-8)} \cdot 7 + \\
&+ \frac{(x-0)(x-2)(x-6)(x-8)}{(4-0)(4-2)(4-6)(4-8)} \cdot 9 + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-8)}{(6-0)(6-2)(6-3)(6-8)} \cdot 8 + \\
&+ \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-6)}{(8-0)(8-2)(8-4)(8-6)} \cdot 5{,}5 = \\
&= \frac{1}{192}x^4 - \frac{7}{96}x^3 - \frac{1}{48}x^2 + \frac{61}{24}x + \frac{5}{2} = \\
&= 0{,}0052x^4 - 0{,}073x^3 - 0{,}021x^2 + 2{,}542x + 2{,}5
\end{aligned}
$$



Slika 3.3.: **Graf funkcije f(x)=0,0052x^4-0,073x^3-0,021x^2+2,542x+2,5**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

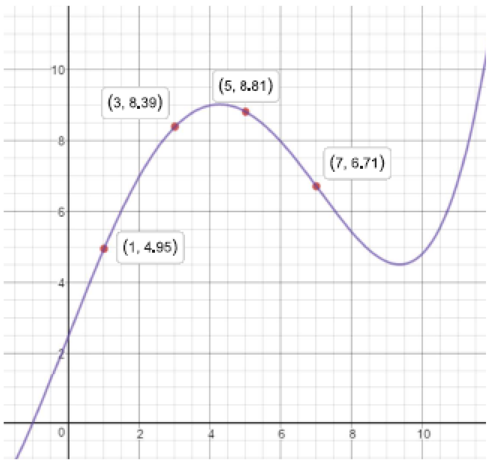
Izračunati vrijednosti za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

$$f(x_5) = f(1) = 0{,}0052x^4 - 0{,}073x^3 - 0{,}021x^2 + 2{,}542x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}0052 \cdot 1 - 0{,}073 \cdot 1 - 0{,}021 \cdot 1 + 2{,}542 \cdot 1 + 2{,}5 = 4{,}95$$

$$f(x_6) = f(3) = 0{,}0052x^4 - 0{,}073x^3 - 0{,}021x^2 + 2{,}542x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}0052 \cdot 3^4 - 0{,}073 \cdot 3^3 - 0{,}021 \cdot 3^2 + 2{,}542 \cdot 3 + 2{,}5 = 8{,}39$$

$$f(x_7) = f(5) = 0{,}0052x^4 - 0{,}073x^3 - 0{,}021x^2 + 2{,}542x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}0052 \cdot 5^4 - 0{,}073 \cdot 5^3 - 0{,}021 \cdot 5^2 + 2{,}542 \cdot 5 + 2{,}5 = 8{,}81$$

$$f(x_8) = f(7) = 0{,}0052x^4 - 0{,}073x^3 - 0{,}021x^2 + 2{,}542x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}0052 \cdot 7^4 - 0{,}073 \cdot 7^3 - 0{,}021 \cdot 7^2 + 2{,}542 \cdot 7 + 2{,}5 = 6{,}71$$



Slika 3.4.: **Graf funkcije f(x)=0,0052x^4-0,073x^3-0,021x^2+2,542x+2,5, naznačene vrijednosti za x$_5$=1, x$_6$=3, x$_7$=5, x$_8$=7**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

3.2. Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma pogodan je za korištenje ukoliko je stupanj polinoma veći od pet.

Polinom stupnja n koji interpolira podatke $(x_k, f(x_k)), k = 0,1,2,..., n$, u Newtonovom obliku glasi:[9]

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... + f[x_0, x_1,..., x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}) \tag{2}$$

pri čemu su $f[x_0, x_1,..., x_i]$ podijeljene razlike, a računaju se rekurzivnom formulom

$$f[x_0, x_1,..., x_i] = \frac{f[x_1, x_2,..., x_i] - f[x_0, x_1,..., x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \; i = 1,2,..., n.$$

Za početne podijeljene razlike vrijedi:

$$f[x_k] := f(x_k), k = 0,1,2,..., n.$$

Ostale su vidljive iz tablice podijeljenih razlika.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$\cdots$	$f[x_0, \ldots, x_n]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$f[x_0, \ldots, x_n]$
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$		$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Slika 3.5.: **Tablica podijeljenih razlika**
Izvor: Ivanšić, I.: **Numerička matematika,** Element, Zagreb, 1998.

[9] Davis J., P.: **Interpolation and approximation**, Dover Publications, Inc.Mineola, New York, 2014.

Primjer 3.: Interpolacija Newtonovim polinomom

Odrediti Newtonov interpolacijski polinom čiji graf prolazi sljedećim točkama:

$T_0(2,2), T_1(3,4), T_2(4,3), T_3(5,1), T_4(6,2)$.

Izračunati vrijednost za $x = 3,5$.

Postupak rješavanja:

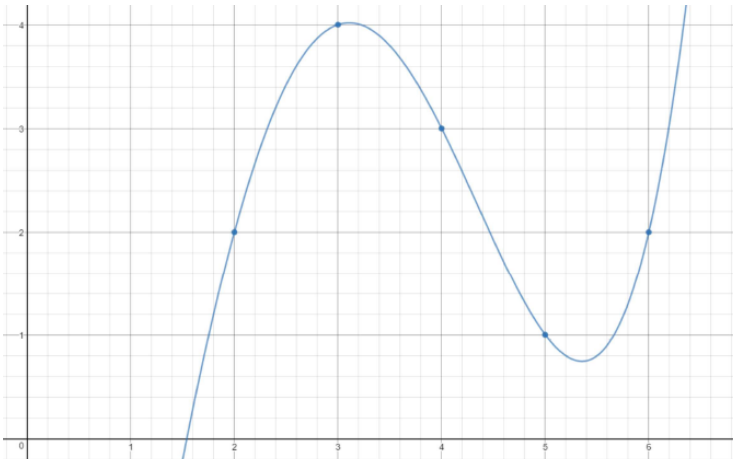
Uvrštavamo zadane točke u tablicu podijeljenih razlika.

Tablica 1.: Tablica podijeljenih razlika za primjer 3.

i	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k, x_{k+1})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4})$
0	2	2				
			4-2/3-2=2			
1	3	4		-1-2/4-2=-1,5		
			3-4/4-3=-1		-0,5-(-1,5)/5-2=0,333	
2	4	3		-2-(-1)/5-3=-0,5		0,666-0,333/6-2=0,08325
			1-3/5-4=-2		1,5-(-0,5)/6-3=0,666	
3	5	1		1-(-2)/6-4=1,5		
			2-1/6-5=1			
4	6	2				

Primjetimo da od tablice podijeljenih razlika koristimo samo "gornji rub" koji uvrštavamo u Newtonov interpolacijski polinom (2).

$$
\begin{aligned}
P(x) &= f\left[x_0\right] + f\left[x_0, x_1\right]\cdot(x-x_0) + f\left[x_0, x_1, x_2\right]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \\
&+ f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) + \\
&+ f\left[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\right]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3) = \\
&= 1 + 2(x-2) + ((-1,5)(x-2)(x-3)) + \\
&+ (0,333(x-2)(x-3)(x-4)) + \\
&+ (0,08325(x-2)(x-3)(x-4)) = \\
&= \frac{333}{4000}x^4 - \frac{333}{400}x^3 + 1,414x^2 + 5,337x - 9,002 = \\
&= 0,08325x^4 - 0,8325x^3 + 1,414x^2 + 5,337x - 9,002
\end{aligned}
$$

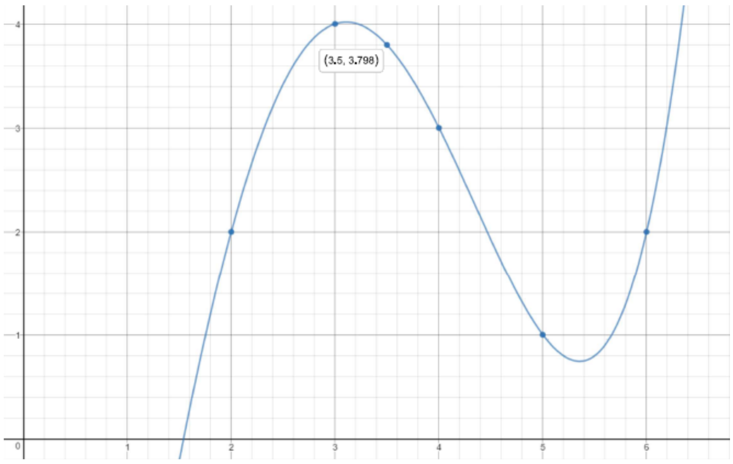


Slika 3.6.: **Graf funkcije f(x)= 0,08325x^4-0,8325x^3+1,414x^2+5,337x-9,002**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Računamo vrijednost funkcije za $x = 3{,}5$.

$$P(3{,}5) = 0{,}08325x^4 - 0{,}8325x^3 + 1{,}414x^2 + 5{,}337x - 9{,}002 =$$
$$= 0{,}08325 \cdot 3{,}5^4 - 0{,}8325 \cdot 3{,}5^3 + 1{,}414 \cdot 3{,}5^2 + 5{,}337 \cdot 3{,}5 - 9{,}002 = 3{,}798$$



Slika 3.7.: **Graf funkcije f(x)= 0,08325x^4-0,8325x^3+1,414x^2+5,337x-9,002, naznačena vrijednost za x=3,5**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Primjer 4.: Interpolacija Newtonovim polinomom

Odrediti Newtonov interpolacijski polinom čiji graf prolazi sljedećim točkama:

$T_0(0,2.5), T_1(2,7), T_2(4,9), T_3(6,8), T_4(8,5.5)$.

Izračunati vrijednost za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

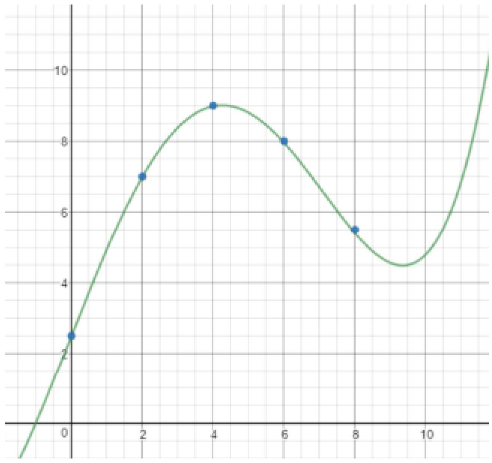
Postupak rješavanja:

Uvrštavamo zadane točke u tablicu podijeljenih razlika.

Tablica 2.: Tablica podijeljenih razlika za primjer 4.

i	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k, x_{k+1})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4})$
0	0	2,5				
			7-2,5/2-0=2,25			
1	2	7		1-2,25/4-0=-0,3125		
			9-7/4-2=1		-0,375+0,3125/6-0=-0,0104	
2	4	9		-0,5-1/6-2=-0,375		0,03125+0,0104/8-0=0,0052
			8-9/6-4=-0,5		-0,1875+0,375/8-2=0,03125	
3	6	8		-1,25+0,5/8-4=-0,1875		
			5,5-8/8-6=-1,25			
4	8	5,5				

$$P(x) = f\left[x_0\right] + f\left[x_0, x_1\right](x - x_0) + f\left[x_0, x_1, x_2\right](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$f + \left[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\right](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= 2,5 + 2,5(x - 0) + ((-0,3125)(x - 0)(x - 2)) + (-0,01)(x - 0)(x - 2)(x - 4)) +$$
$$+ 2,5 + 2,25x - 0,3125x^2 + 0,625x + (-0,01(x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x)) +$$
$$+ ((0,005(x^2 - 2x)(x^2 - 10x + 24)) =$$
$$= -0,2525x^2 - 0,01x^3 + 2,795x + 2,5 + 0,005x^4 - 0,06x^3 + 0,22x^2 - 0,24x =$$
$$= 0,005x^4 - 0,07x^3 - 0,0325x^2 + 2,555x + 2,5$$



Slika 3.8.: **Graf funkcije f(x)= $0,005x^4-0,07x^3-0,0325x^2+2,555x+2,5$**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

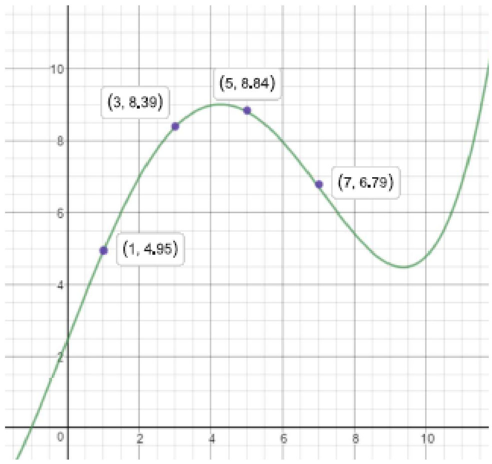
Izračunati vrijednosti za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

$$f(x_5) = f(1) = 0{,}005x^4 - 0{,}07x^3 - 0{,}0325x^2 + 2{,}555x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}005 \cdot 1 - 0{,}07 \cdot 1 - 0{,}0325 \cdot 1 + 2{,}555 \cdot 1 + 2{,}5 = 4{,}95$$

$$f(x_6) = f(3) = 0{,}005x^4 - 0{,}07x^3 - 0{,}0325x^2 + 2{,}555x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}005 \cdot 3^4 - 0{,}07 \cdot 3^3 - 0{,}0325 \cdot 3^2 + 2{,}555 \cdot 3 + 2{,}5 = 8{,}39$$

$$f(x_7) = f(5) = 0{,}005x^4 - 0{,}07x^3 - 0{,}0325x^2 + 2{,}555x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}005 \cdot 5^4 - 0{,}07 \cdot 5^3 - 0{,}0325 \cdot 5^2 + 2{,}555 \cdot 5 + 2{,}5 = 8{,}84$$

$$f(x_8) = f(7) = 0{,}005x^4 - 0{,}07x^3 - 0{,}0325x^2 + 2{,}555x + 2{,}5 =$$
$$= 0{,}005 \cdot 7^4 - 0{,}07 \cdot 7^3 - 0{,}0325 \cdot 7^2 + 2{,}555 \cdot 7 + 2{,}5 = 6{,}79$$



Slika 3.9.: **Graf funkcije f(x)= $0,005x^4-0,07x^3-0,0325x^2+2,555x+2,5$**
naznačene vrijednosti za x_5=1, x_6=3, x_7=5, x_8=7

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

3.3. Metoda najmanjih kvadrata

Najraniji oblik regresije dao je Pierre-Simon Laplace, francuski matematičar i astronom, kada je 1799. godine koristio princip minimiziranja zbroja apsolutnih pogrešaka s dodatnim uvjetom da će zbroj pogrešaka biti jednak nuli. Gauss je tvrdio kako su, po načelima vjerojatnosti, veće ili manje pogreške jednako moguće u svim jednadžbama. Po njegovom mišljenju, bilo je evidentno da se rješenje koje zadovoljava točno n jednadžbi, treba smatrati manje u skladu sa zakonima vjerojatnosti.[10]

1795. godine Gauss je dao osnove metode najmanjih kvadrata, iako nije objavljena do 1809. godine. Metodu je objavio u jednom od svojih radova o nebeskoj mehanici. Do slične metode je došao i Adrien-Marie Legendre. Budući da su obje metode bile objavljene u približno jednakom vremenskom periodu, između Gaussa i Legendrea razvile su se žustre polemike oko prava na otkriće te metode.[11]

Metode najmanjih kvadrata jedna je od važnijih metoda za obradu eksperimentalnih podataka. Lagrangeov polinom dobro aproksimira funkciju lokalno, u izabranim točkama, dok izvan tih točaka aproksimacija može biti vrlo loša. Drugi problem je ukoliko je polinom stupnja veći od pet, teško je računati i moguće su velike pogreške. Ista razmatranja vrijede i za Newtonov interpolacijski polinom.

Metoda najmanjih kvadrata omogućava nam da zadanu funkciju aproksimiramo drugom funkcijom određenog tipa globalno, tako da njihova međusobna udaljenost bude što manja, bez obzira što funkcija možda neće imati iste vrijednosti niti u jednoj točki.

Pretpostavimo da su poznate vrijednosti funkcije f u nekim točkama $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ tj. znamo $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), ..., (x_n, f(x_n))$. Želimo pronaći funkciju φ određenog tipa s neodređenim parametrima $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, koja najbolje aproksimira funciju f. To možemo učiniti na sljedeći način:

Promatramo sumu kvadrata razlika vrijednosti funkcija f i φ.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - \varphi(x_k) \right]^2$$

[10] Björck, A.: **Numerical methods for least squares problems**, SIAM, Philadelphia, 1996.
[11] Jerković, I.: **Metoda najmanjih kvadrata i njezina primjena u fizici**, Diplomski rad, Osijek, 2016.

Tražimo parametre $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, iz uvjeta da S kao funkcija tih parametara ima minimalnu vrijednost. Ako je funkcija f zadana u svim točkama nekog segmenta $[a,b]$ onda se funkcija S definira pomoću integrala:

$$S = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x) \right]^2 dx.$$

Klase funkcija iz kojih biramo funciju ρ su obično:

a) polinomi prvog stupnja

$$\varphi(x) = a_1 x + a_0,$$

b) polinomi drugog stupnja

$$\varphi(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

c) eksponencijalne funkcije

$$\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x} + a_2.$$

Ukoliko su nam poznate vrijednosti $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), ..., (x_n, f(x_n))$ te neka je $\varphi(x) = a_1 x + a_0$, polinom prvog stupnja s nepoznatim koeficijentima a_1 i a_0. Potrebno je odrediti a_1 i a_0 tako da polinom $\varphi(x) = a_1 x + a_0$, aproksimira bolje od svakog drugog polinoma prvog stupnja dane vrijednosti funkcije u smislu metode najmanjih kvadrata.

Minimum funkcije $S = S(a_0, a_1)$, računamo na sljedeći način:[12]

$$S(a, a_0) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - a_1(x_k) - a_0 \right]^2 \rightarrow \min$$

Nužan uvjet za ekstrem funcije S je:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$$

To su i dovoljni uvjeti zbog oblika funkcije, tj. ne treba provjeravati da li je to globalni extrem.

Raspisane jednadžbe glase:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - a(x_k) - a_0 \right] x_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - a(x_k) - a_1 \right] x_k = 0$$

[12] Tevčić, M.: **Inženjerska matematika**, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

Sređivanjem sustava dvije linearnih jednadžbe s dvije nepoznanice dobijemo:

$$a_1\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + a_2\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)x_k$$

$$a_1\sum_{k=1}^{n} x_k + na_0 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Iz sustava izračunamo a_1 i a_0. Jasno je da funcija S ima samo minimum te tako određeni parametri daju najbolju aproksimaciju funkcije f .

Kada se funcija φ traži u obliku eksponencijalne, logaritamske i slično, tada se na ovaj način dobije sustav nelinearnih jednadžbi. Takve sustave je teže rješavati. Obično se operacijama nad funkcijama, npr. logaritmiranjem pojednostavni funkcija u kojoj tražimo aproksimaciju no parametri koje dobijemo na taj način nisu uvijek najbolji u smislu metode najmanjih kvadrata.

Primjer 5.: Aproksimacija polinomom prvog stupnja

Odrediti polinom prvog stupnja $\varphi(x)$ koji najbolje aproksimira funkciju zadanu sljedećim vrijednostima:

$T_0(2,2), T_1(3,4), T_2(4,3), T_3(5,1), T_4(6,2)$.

Izračunati vrijednosti za $x = 3,5$.

Postupak rješavanja:

Izračunati podatke potrebne za metodu najmanjih kvadrata, aproksimiramo polinomom prvog stupnja.

Tablica 3. Izračunate vrijednosti za aproksimaciju polinomom prvog stupnja

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$f(x_k)\ x_k$
1	2	2	4	4
2	3	4	9	12
3	4	3	16	12
4	5	1	25	5
5	6	2	36	12
$\sum$	20	12	90	45

Na temelju dobivenih vrijednosti iz tablice 3., postavljamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

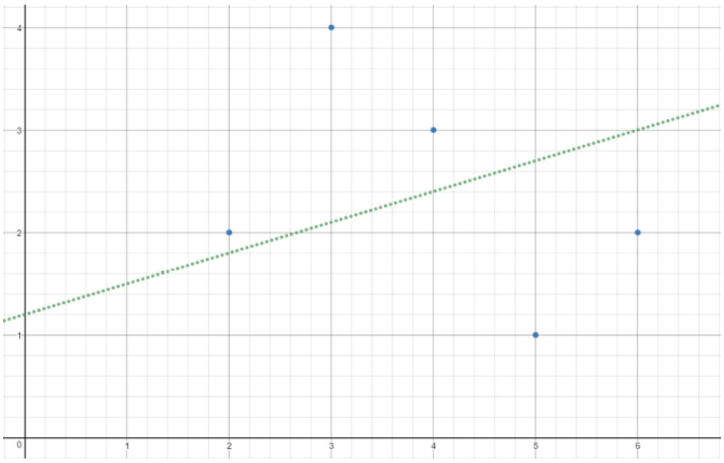
$$a_0 5 + a_1 20 = 12$$
$$a_0 20 + a_1 90 = 45.$$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobijemo:

$$a_0 = \frac{6}{5},$$
$$a_1 = \frac{3}{10}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $\varphi(x) = a_1 x + a_0$ dobijemo traženu funkciju - polinom prvog stupnja koja u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju zadanu na diskretnom skupu točaka.

$$\varphi(x) = a_1 x + a_0$$
$$\varphi(x) = \frac{3}{10} x + \frac{6}{5}$$

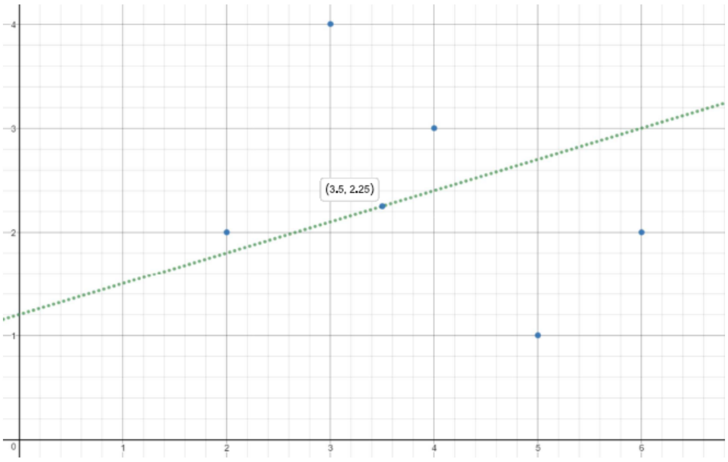


Slika 3.10. **Graf funkcije f(x)=0,3x+1,2**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Izračunati vrijednost funkcije za $x = 3{,}5$.

$$P(3{,}5) = \frac{3}{10}x + \frac{6}{5} = \frac{3}{10} \cdot 3.5 + \frac{6}{5} = 2{,}25$$



Slika 3.11.:**Graf funkcije f(x)= 0,3x+1,2, naznačena vrijednost za x=3,5**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Primjer 6.: Aproksimacija polinomom prvog stupnja

Odrediti polinom prvog stupnja $\varphi(x)$ koji najbolje aproksimira funkciju zadanu sljedećim vrijednostima:

$T_0(0,2.5), T_1(2,7), T_2(4,9), T_3(6,8), T_4(8,5.5)$.

Izračunati vrijednosti za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

Postupak rješavanja:

Izračunati podatke potrebne za metodu najmanjih kvadrata, aproksimiramo polinomom prvog stupnja.

Tablica 4. Izračunate vrijednosti za aproksimaciju polinomom prvog stupnja

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$f(x_k)\,x_k$
1	0	2,5	0	0
2	2	7	4	14
3	4	9	16	36
4	6	8	36	48
5	8	5,5	64	8
$\sum$	20	24	120	106

Postavljamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

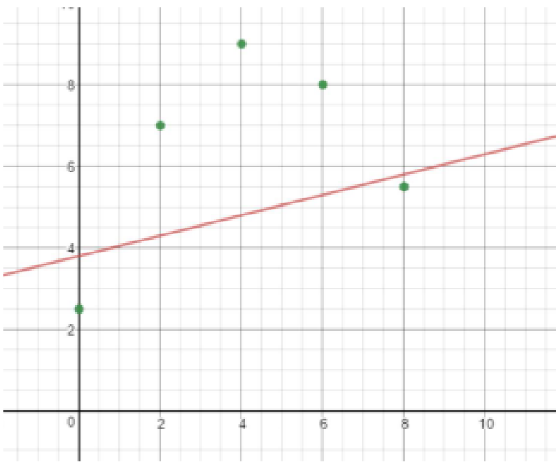
$$a_0 5 + a_1 20 = 24$$
$$a_0 20 + a_1 120 = 106.$$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobijemo:

$$a_0 = \frac{19}{5},$$
$$a_1 = \frac{1}{4}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $\varphi(x) = a_1 x + a_0$ dobijemo traženu funkciju - polinom prvog stupnja koja u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju zadanu na diskretnom skupu točaka.

$$\varphi(x) = a_1 x + a_0$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{4} x + \frac{19}{5}$$



Slika 3.12.: **Graf funkcije f(x)=0,25x+3,8**
Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

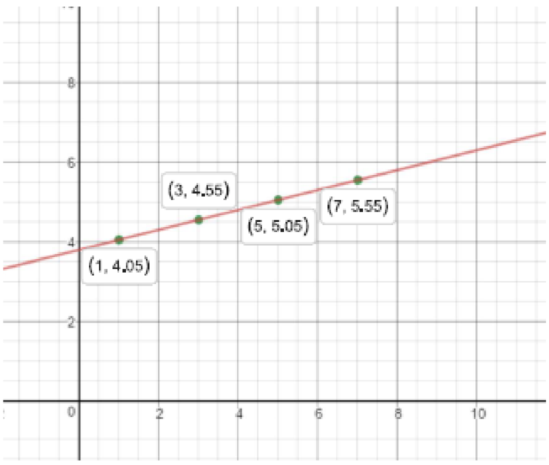
Izračunati vrijednosti za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

$$f(x_5) = f(1) = \frac{1}{4}x + \frac{19}{5} = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{19}{5} = 4{,}05$$

$$f(x_6) = f(3) = \frac{1}{4}x + \frac{19}{5} = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{19}{5} = 4{,}55$$

$$f(x_7) = f(5) = \frac{1}{4}x + \frac{19}{5} = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{19}{5} = 5{,}05$$

$$f(x_8) = f(7) = \frac{1}{4}x + \frac{19}{5} = \frac{1}{4} \cdot 7 + \frac{19}{5} = 5{,}55$$



Slika 3.13.: **Graf funkcije f(x)=0,25x+3,8, naznačene vrijednosti za x_5=1, x_6=3, x_7=5, x_8=7**
Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Aproksimacija polinomom drugog stupnja sastoji se u sljedećem:
Zadane su vrijednosti $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ funkcije f u točkama $x_1, x_2,..., x_n$ i neka je $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, polinom drugog stupnja s nepoznatim koeficijentima a_0, a_1, a_2. Treba odrediti koeficijente a_0, a_1, a_2 tako da polinom $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, aproksimira bolje od bilo kojeg polinoma drugog stupnja dane vrijednosti funkcije u smislu metode najmanjih kvadrata.

Minimum funkcije $S = S(a_0, a_1, a_2)$, računamo na sljedeći način:[13]

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - a_2x_k^2 - a_1x_k - a_0 \right]^2 \to \min$$

Nužan uvjet za ekstrem funkcije $S = S(a_0, a_1, a_2)$ je:[14]

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \cdot (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - a_2x_k^2 - a_1x_k - a_0 \right] x_k^2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \cdot (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - a_2x_k^2 - a_1x_k - a_0 \right] x_k = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \cdot (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - a_2x_k^2 - a_1x_k - a_0 \right] = 0$$

Nakon sređivanja dobijemo sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ a_0 \sum_{k=1}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^3 &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) x_k \\ a_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^4 &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) x_k^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Brojevi a_0, a_1, a_2 koje dobijemo kao rješenje ovog sustava predstavljaju koeficijente polinoma drugog stupnja, koji najbolje u smislu metode najmanjih kvadrata, aproksimira dane vrijednosti funkcije.

[13] Tevčić, M.: **Inženjerska matematika**, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.
[14] Ivanšić, I.: **Numerička matematika**, Element, Zagreb, 1998.

Primjer 7.: Aproksimacija polinomom drugog stupnja

Odrediti polinom drugog stupnja $\varphi(x)$ koji najbolje aproksimira funkciju zadanu sljedećim vrijednostima:

$T_0(2,2), T_1(3,4), T_2(4,3), T_3(5,1), T_4(6,2)$

Izračunati vrijednost za $x = 3,5$.

Postupak rješavanja:

Izračunavamo podatke potrebne za metodu najmanjih kvadrata, aproksimiramo polinomom drugog stupnja.

Tablica 5.: Izračunate vrijednosti za aproksimaciju metodom najmanjih kvadrata

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$f(x_k)\,x_k$	$f(x_k)\,x_k^2$
1	2	2	4	8	16	4	8
2	3	4	9	27	81	12	36
3	4	3	16	64	256	12	48
4	5	1	25	125	625	5	25
5	6	2	36	216	1296	12	72
$\sum$	20	12	90	440	2274	45	189

Na temelju dobivenih vrijednosti iz tablice 5. postavljamo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice. Vrijednosti iz tablice 5. uvrštavano u (3):

$$a_0 n + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$a_0 \sum_{k=1}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) x_k$$

$$a_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^4 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) x_k^2$$

Tražimo neodređene parametre $a_{2,}\ a_1\ i\ a_0$.

$$a_0 5 + a_1 20 + a_2 90 = 12$$
$$a_0 20 + a_1 90 + a_2 440 = 45$$
$$a_0 90 + a_1 440 + a_2 2274 = 189$$

$$5a_0 + 20a_1 + 90a_2 = 12$$
$$20a_0 + 90a_1 + 440a_2 = 45$$
$$90a_0 + 440a_1 + 2274a_2 = 189$$

Rješavamo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanicete dobivamo rješenja:

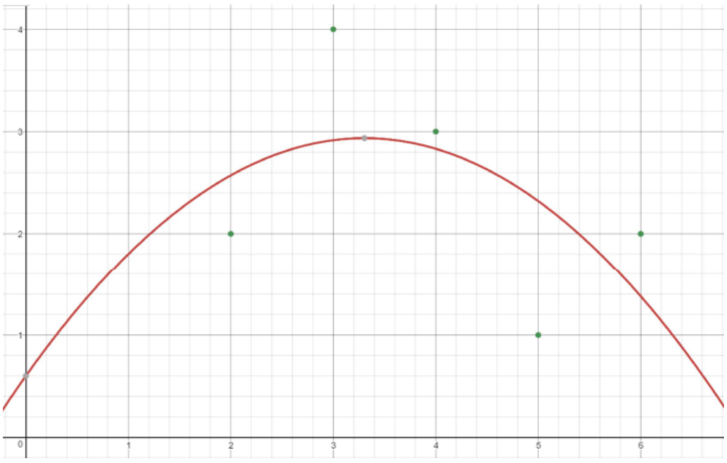
$a_0 = 0{,}6$

$a_1 = 1{,}414$

$a_2 = -0{,}214$

Koeficijente uvrštavamo u jednadžbu $\varphi(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, i dobivamo funkciju - polinom koji u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju zadanu na diskretnom skupu točaka.

$\varphi(x) = -0{,}214x^2 + 1{,}414x + 0{,}6.$

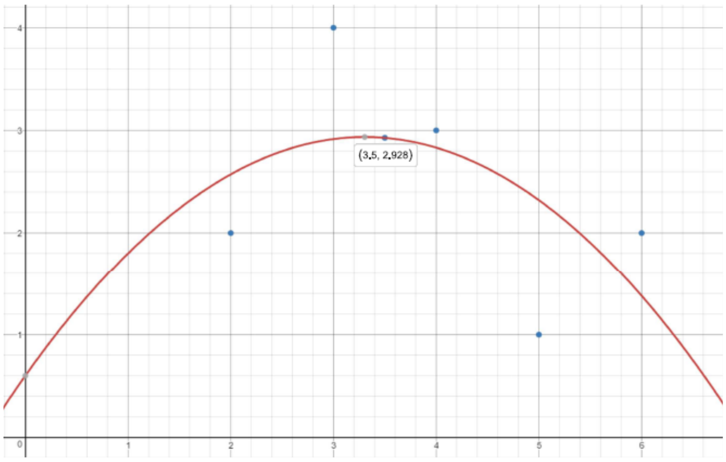


Slika 3.14.: **Graf funkcije f(x)=-0,214x^2+1,414x+0,6**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Izračunavamo vrijednost funkcije za $x = 3{,}5$.

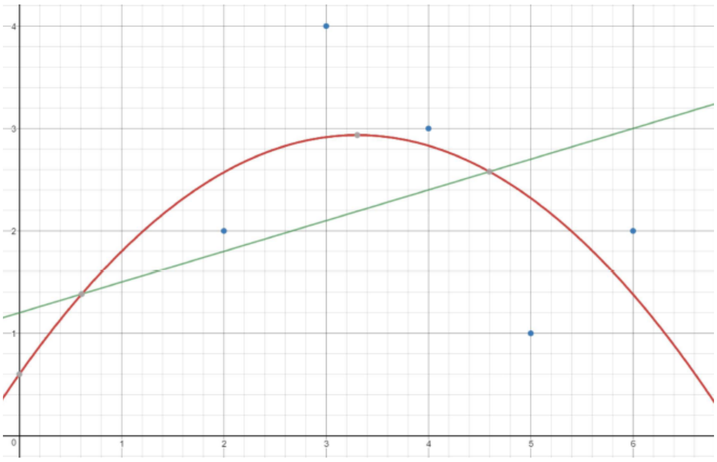
$P(3{,}5) = -0{,}214x^2 + 1{,}414x + 0{,}6 = 2{,}9275$



Slika 3.15.: **Graf funkcije f(x)=- 0,214x^2+1,414x+0,6, naznačena vrijednost za x=3,5**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Grafički prikaz usporedbe metode najmanjih kvadrata polinomom prvog i drugog stupnja:



Slika 3.16.: **Graf funkcije $f(x)=-0,214x^2+1,414x+0,6$ i $f(x)=0,3x+1,2$**
Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

Primjer 8.: Aproksimacija polinomom drugog stupnja

Odrediti polinom drugog stupnja $\varphi(x)$ koji najbolje aproksimira funkciju zadanu sljedećim vrijednostima:

$T_0(0,2.5), T_1(2,7), T_2(4,9), T_3(6,8), T_4(8,5.5)$.

Izračunati vrijednosti za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$.

Postupak rješavanja:

Izračunavamo podatke potrebne za metodu najmanjih kvadrata, aproksimiramo polinomom drugog stupnja.

Tablica 6.: Izračunate vrijednosti za aproksimaciju metodom najmanjih kvadrata

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$f(x_k)\, x_k$	$f(x_k)\, x_k^2$
1	0	2,5	0	0	0	0	0
2	2	7	4	8	16	14	28
3	4	9	16	64	256	36	144
4	6	8	36	216	1296	48	288
5	8	5,5	64	512	4096	44	352
$\sum$	20	24	120	800	5664	142	812

Postavljamo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice. Vrijednosti iz tablice 6. uvrštavamo u (3):

Tražimo neodređene parametre $a_{2,}\, a_1\, i\, a_0$.

$$a_0 5 + a_1 20 + a_2 120 = 24$$
$$a_0 20 + a_1 120 + a_2 800 = 142$$
$$a_0 120 + a_1 800 + a_2 5664 = 812$$

$$5a_0 + 20a_1 + 120a_2 = 24$$
$$20a_0 + 120a_1 + 800a_2 = 142$$
$$120a_0 + 800a_1 + 5664a_2 = 812$$

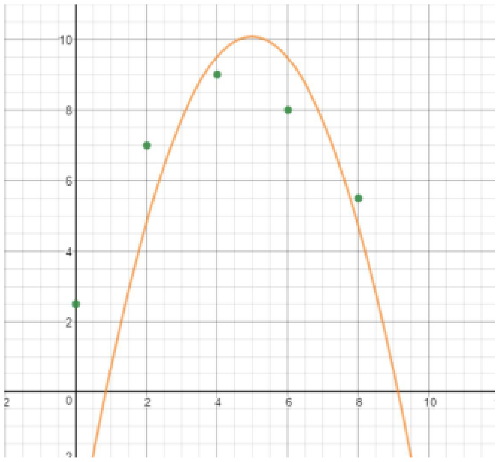
Rješavamo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanicete dobivamo rješenja:

$$a_0 = -4{,}514$$

$$a_1 = 5{,}864$$

$$a_2 = -0{,}589$$

Koeficijente uvrštavamo u jednadžbu $\varphi(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, i dobivamo funkciju – polinom $\varphi(x) = -0{,}589x^2 + 5{,}864x - 4{,}514$. koji u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju zadanu na diskretnom skupu točaka.



Slika 3.17.: **Graf funkcije f(x)=-0,589x^2+5,864x-4,514**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

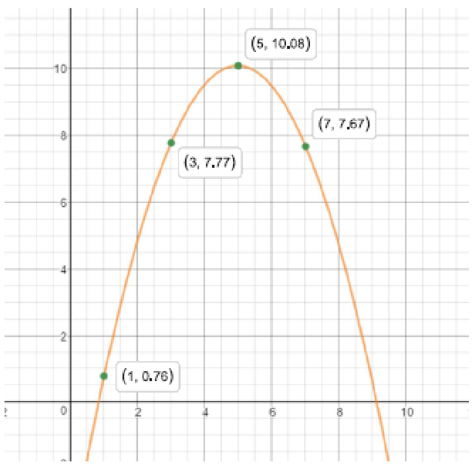
Izračunavamo vrijednosti funkcije za $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

$$\varphi(1) = -0{,}589x^2 + 5{,}864x - 4{,}514 = -0{,}589 \cdot 1 + 5{,}864 \cdot 1 - 4{,}514 = 0{,}76$$

$$\varphi(3) = -0{,}589x^2 + 5{,}864x - 4{,}514 = -0{,}589 \cdot 3^2 + 5{,}864 \cdot 3 - 4{,}514 = 7{,}77$$

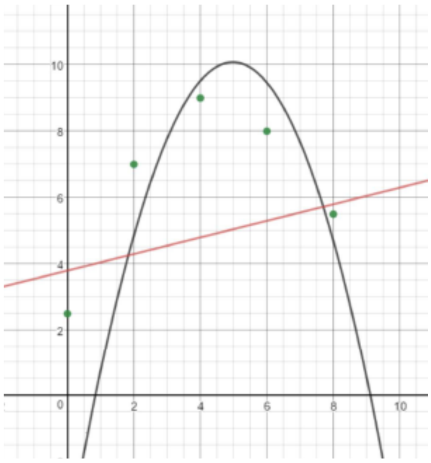
$$\varphi(5) = -0{,}589x^2 + 5{,}864x - 4{,}514 = -0{,}589 \cdot 5^2 + 5{,}864 \cdot 5 - 4{,}514 = 10{,}08$$

$$\varphi(7) = -0{,}589x^2 + 5{,}864x - 4{,}514 = -0{,}589 \cdot 7^2 + 5{,}864 \cdot 7 - 4{,}514 = 7{,}67$$



Slika 3.18.: **Graf funkcije f(x)=-0,589x^2+5,864x-4,514, naznačene vrijednosti za x_5=1, x_6=3, x_7=5, x_8=7**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru



Slika 3.19.: **Graf funkcije $f(x)=-0{,}589x^2+5{,}864x-4{,}514$ i $f(x)=0{,}25x+3{,}8$**

Izvor: Obrada autora u Desmos grafičkom kalkulatoru

3.4. Spline interpolacija

Ako je broj čvorova interpolacije velik, interpolacija polinomom je otežana zbog visokog stupnja polinoma. Umjesto interpolacijskog polinoma koji smo provlačili kroz sve čvorove, sada ćemo po dijelovima, od čvora do čvora, interpolirati funkciju $\varphi : [a,b] \to R$ takvu da je:[15]

$$\varphi\big|[x_{i-1,} x_i] = \varphi_i , \quad i = 1, 2, ..., n,$$

pri čemu je $\varphi\big|[x_{i-1,} x_i] = \varphi_i , i = 1, 2, ..., n$ neka jednostavna funkcija (npr. polinom 1. ili 3. stupnja) takva da je

$$\varphi_i (x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = y_{i-1}, i = 1, 2, ..., n,$$

$$\varphi_i (x_i) = f(x_i) = y_i , i = 1, 2, ..., n.$$

U ovom radu izvojena je spline interpolacija pomoću linearne i kubne funkcije.

3.4.1. Linearni spline

Linearni spline dobit ćemo tako da se svake dvije susjedne točke spoje ravnom crtom. Pretpostavimo da je $f : [a,b] \to R$ neprekidna funkcija i neka poznajemo njene vrijednosti u čvorovima $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} x_n = b$:

$$y_0 = \mathrm{f}(x_0), y_1 = \mathrm{f}(x_1), \mathrm{y}_2 = \mathrm{f}(x_2), ..., y_n = \mathrm{f}(x_n).$$

Funkciju f interpolirat ćemo neprekidno po dijelovima linearnom funkcijom $\varphi : [a,b] \to R$ za $i = 1, 2, ..., n$ takve da vrijedi:

$$\varphi\big|[x_{i-1,} x_i] = \varphi_i , \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$\varphi_i (x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Kako je $\varphi_i (x_i) = y_i$, no i $\varphi_i (x_i) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_0 - x_i) = y_i$ slijedi:

$$\varphi_i (x_i) = y_i = \varphi_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Funkcija f je neprekidna na intervalu $[a,b]$, a neprekidna na svakom podintervalu $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

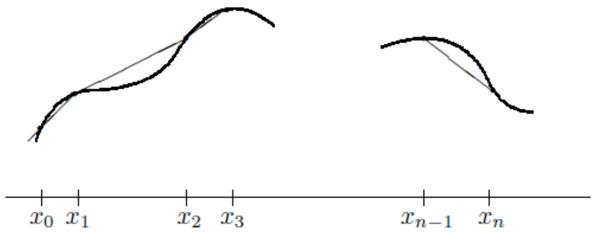
[15] Tevčić, M.: **Inženjerska matematika**, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

Vrijedi:

$\varphi(x_0) = y_0 = \varphi_1(x_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$

$\varphi(x_i) = y_i = \varphi_i(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

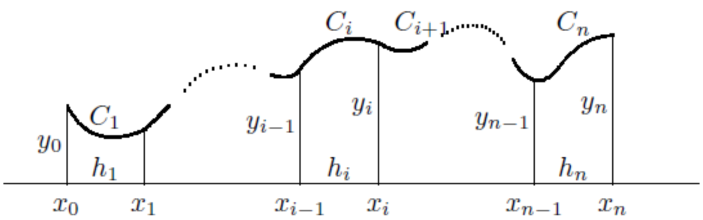
Funkcija φ interpolira funkciju f u čvorovima $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Linearni interpolacijski spline nije derivabilna funkcija u čvorovima $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, pa nije pogodan za praktičnu upotrebu.[16]



Slika 3.20.: **Interpolacija linearnim splineom**
Izvor: R. Scitovski, Numerička matematika

3.4.2. Kubni spline

Ukoliko dvije susjedne točke spojimo dijelom grafa polinoma 3. stupnja dobit ćemo kubni spline.



Slika 3.21.: **Interpolacija kubnim splineom**
Izvor: R. Scitovski, Numerička matematika

[16] Dr.sc. Scitovski, R.: **Numerička matematika,** Grafika d.o.o. Osijek, 2004.

Kubni spline najčešće koristimo iz dva glavna razloga. Prvi je što je stupanj tri relativno nizak pa izračun nije kompliciran. S druge strane, stupanj tri je dovoljno visok, a graf polinoma trećeg stupnja ima područje rasta i pada, lokalni minimum i maksimum te točke infleksije. Ta svojstva grafa odgovaraju karakteristikama opisa inženjerskog procesa, odnosno vezom dvjema zavisnih varijabli. Uslijed povećanja jedne vrijednosti druga se povećava odnosno smanjuje i obrnuto.

Neprekidnu funkciju $f:[a,b]\to R$ čije vrijednosti $y_0, y_1, ..., y_n$ poznajemo u $(n+1)$ čvorova $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} x_n = b$ interpolirat ćemo funkcijom $C:[a,b]\to R$

$C(x) = C_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, ..., n,$

gdje su $C_i, i = 1, 2, \; ..., n$ kubični polinomi koji trebaju zadovoljavati sljedeće uvjete:[17]

1. $C_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad i = 1, 2, ..., n,$
2. $C_i(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, ..., n,$
3. $C_i'(x_i) = C_{i+1}'(x_i), \qquad i = 1, 2, ..., n-1,$
4. $C_i''(x_i) = C_{i+1}'' = (x_i), \quad i = 1, 2, ..., n-1.$

Navedeni uvjeti (1-4) osiguravaju da će funkcija C zadovoljiti interpolacijske uvjete u čvorovima $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, ali i da će biti klase $C^2_{[a,b]}$.

Budući da n kubičnih polinoma $C_1, ... C_n$ ima ukupno $4n$ neodređenih koeficijenata, a zahtjevima je određeno $(4n-2)$ uvjeta, za jednoznačno određivanje funkcije C potrebno je postaviti još dva dodatna uvjeta.

Najčešće zahtijevamo još da bude $C_1'(x_0) = C_n''(x_n) = 0$ iako je moguće zadati i neke druge zahtjeve.

Funkciju C koja zadovoljava uvjete (1-4), te dodatne uvjete $C_n''(x_0) = C_n''(x_n) = 0$ nazivamo prirodni kubični interpolacijski spline. Funkcija C je klase $C^2_{[a,b]}$, koja na intervalu $[a,b]$ interpolira funkciju f poznatu u čvorovima $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$.

Postavlja se pitanje kako odrediti polinome C_i? To rješavamo pomoću sljedećeg teorema:

[17] Dr.sc. Scitovski, R.: **Numerička matematika,** Grafika d.o.o. Osijek, 2004.

Teorem 1.:

Zadane su vrijednosti u čvorovima (x_i, y_i), $i = 0,1,2,...,n,$ koji zadovoljavaju uvjet $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Tada postoji jedinstveni kubni interpolacijski spline C, pri čemu su polinomi $C_i, i = 1,2,...,n$ zadani na sljedeći način:[18]

$$C_i(x) = y_{i-1} - s_{i-1} \cdot \frac{h_i^2}{6} + b_i(x - x_{i-1}) + \frac{s_{i-1}}{6h_i} \cdot (x_i - x)^3 + \frac{s_i}{6h_i} \cdot (x - x_{i-1})^3$$

gdje za $i = 0,1,2,..., n-1,$:

$$b_i = d_i - (s_i - s_{i-1}) \cdot \frac{h_i}{6}$$

$$d_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1},$$

a brojevi $s_i, i = 0,1,2,...,n,$ zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$s_{i-1} h_i + 2s_i (h_i + h_{i+1}) + s_{i+1} h_{i+1} = 6(d_{i+1} - d_i), \quad i = 1,2,...,n-1,$$

$$s_0 = s_n = 0.$$

Sustav $(n-1) \times (n-1)$ možemo matrično zapisati $H \cdot s = e$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix},$$

Slika 3.22.:**Trodimenzionalna matrica**

Izvor: R. Scitovski, Numerička matematika

[18] Tevčić, M.: **Inženjerska matematika, skripta,** Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad e = \begin{bmatrix} 6(d_2 - d_1) \\ \vdots \\ 6(d_n - d_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Primjetimo: ako su razmaci između čvorova jednaki (čvorovi su ekvidistantni) i iznose h, onda možemo uzeti:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \frac{6}{h}(d_2 - d_1) \\ \vdots \\ \frac{6}{h}(d_n - d_{n-1}) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Primjer 9.: Interpolacija kubnim splineom

Za zadane točke diskretnog skupa $T_0(2,2), T_1(3,4), T_2(4,3), T_3(5,1), T_4(6,2)$ potrebno je odrediti kubni interpolacijski spline te izračunati vrijednost u točki $x = 3{,}5$.

Postupak rješavanja:

S obzirom da imamo pet zadanih točaka, broj koraka će nam biti četiri $i = 4$.

Računamo razmake između točaka:

$h_1 = x_1 - x_0 = 3 - 2 = 1$

$h_2 = x_2 - x_1 = 4 - 3 = 1$

$h_3 = x_3 - x_2 = 5 - 4 = 1$

$h_4 = x_4 - x_3 = 6 - 5 = 1$

Možemo primjetiti da su razmaci između čvorova jednaki (čvorovi su ekvidistantni) i u tom slučaju možemo koristiti zapis (4).

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} = \frac{4-2}{1} = 2$$

$$d_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_2} = \frac{3-4}{1} = -1$$

$$d_3 = \frac{y_3 - y_2}{h_3} = \frac{1-3}{1} = -2$$

$$d_4 = \frac{y_4 - y_3}{h_4} = \frac{2-1}{1} = 1$$

$$e = \begin{bmatrix} 6\cdot(d_2 - d_1) = 6(-1-2) \\ 6\cdot(d_3 - d_2) = 6(-2-(-1)) \\ 6\cdot(d_4 - d_3) = 6(1-(-2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$H \cdot s = e \Rightarrow s_1 = -4.071,\ s_2 = -1{,}714,\ s_3 = 4.929.$

Dodatni uvjet koji možemo iščitati iz Teorema 1.: $s_0 = s_4 = 0$.

Računamo $b_i = d_i - (s_i - s_{i-1}) \cdot \frac{h_i}{6}$ za $b = 1 do 4$.

$$b_1 = d_1 - (s_1 - s_0)\frac{h_1}{6} = 2 - \left(-\frac{57}{14} - 0\right)\frac{1}{6} = 2{,}687$$

$$b_2 = d_2 - (s_2 - s_1)\frac{h_2}{6} = -1 - \left(-\frac{12}{7} + \frac{57}{14}\right)\frac{1}{6} = -1{,}393$$

$$b_3 = d_3 - (s_3 - s_2)\frac{h_1}{6} = -2 - \left(\frac{69}{14} + \frac{12}{7}\right)\frac{1}{6} = -3{,}107$$

$$b_4 = d_4 - (s_4 - s_3)\frac{h_1}{6} = 1 - \left(0 - \frac{69}{14}\right)\frac{1}{6} = 1{,}821$$

Računamo vrijednost polinoma C_1 za $2 \le x \le 3$:

$$C_1(x) = (y_0 - s_0 \cdot \frac{h_1^2}{6}) + b_1 \cdot (x - x_0) + \frac{s_0}{6h_1} \cdot (x_1 - x)^3 + \frac{s_1}{6h_1} \cdot (x - x_0)^3 =$$
$$= (2 - 0) + (2.678(x-2)) + 0 + \left(-\frac{4.071}{6}(x-2)^3\right) =$$
$$= 3{,}356 + 2{,}678x - 0{,}6785x^3 + 4{,}071x^2 - 8{,}142x + 5{,}428 =$$
$$= -0{,}6785x^3 + 4{,}071x^2 - 5{,}464x + 2{,}072$$

Računamo vrijednost polinoma C_2 za $3 \le x \le 4$:

$$C_2(x) = (y_1 - s_1 \cdot \frac{h_2^2}{6}) + b_2 \cdot (x - x_1) + \frac{s_1}{6h_2} \cdot (x_2 - x)^3 + \frac{s_2}{6h_2} \cdot (x - x_1)^3 =$$
$$= 4 - \left(\frac{-4{,}071}{6}\right) + (-1{,}393(x-3) + \left(\frac{-4{,}071}{6}\right)(4-x)^3 + \left(\frac{-1{,}714}{6}\right)(x-3)^3 =$$
$$= 8{,}8575 - 1{,}393x + 0{,}6785x^3 - 8{,}142x^2 + 32{,}568x -$$
$$- 43{,}424 - 0{,}286x^3 + 2{,}57x^2 - 7{,}711x + 7{,}711 =$$
$$= 0{,}3925x^3 - 5{,}572x^2 + 23{,}464x - 26{,}8553$$

Računamo vrijednost polinoma C_3 za $4 \le x \le 5$:

$$C_3(x) = (y_2 - s_2 \cdot \frac{h_2^2}{6}) + b_3 \cdot (x - x_2) + \frac{s_2}{6h_2} \cdot (x_3 - x)^3 + \frac{s_3}{6h_2} \cdot (x - x_2)^3 =$$

$$= 3 + \frac{1{,}714}{6} + (-3{,}107(x-4)) + \left(\frac{-1{,}714}{6}\right)(5-x)^3 + \left(\frac{4{,}929}{6}\right)(x-4)^3 =$$

$$= 15{,}7136 - 3{,}107x + 0{,}2853x^3 - 4{,}284x^2 + 21{,}42x -$$

$$- 35{,}7 + 0{,}8215x^3 - 9{,}858x^2 + 39{,}432x - 52{,}576 =$$

$$= 1{,}107x^3 - 14{,}142x^2 + 57{,}745x - 72{,}562$$

Računamo vrijednost polinoma C_4 za $5 \le x \le 6$:

$$C_4(x) = (y_3 - s_3 \cdot \frac{h_3^2}{6}) + b_4 \cdot (x - x_3) + \frac{s_3}{6h_2} \cdot (x_4 - x)^3 + \frac{s_4}{6h_2} \cdot (x - x_3)^3 =$$

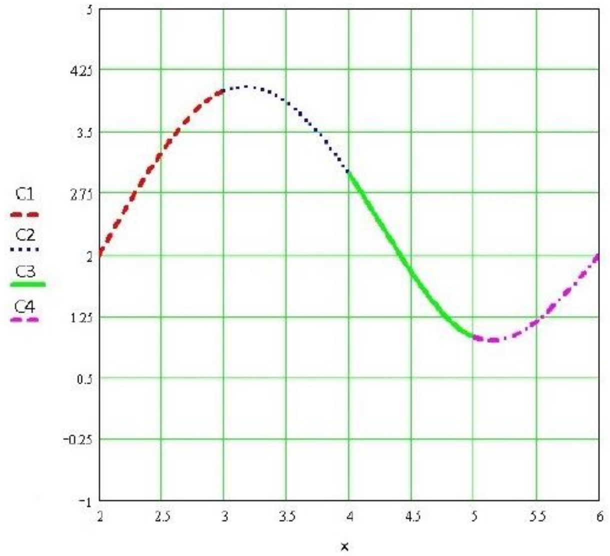
$$= 1 - \frac{4{,}929}{6} + 1{,}821(x-5) + \left(\frac{4{,}929}{6}\right) \cdot (6-x)^3 + 0 =$$

$$= -0{,}8215x^3 + 14{,}787x^2 - 86{,}901x + 168{,}5175$$

Izračunavamo vrijednost funkcije za $x = 3{,}5$.

Računamo vrijednost polinoma C_2 za $3 \le x \le 4$ jer je $3 \le 3{,}5 \le 4$

$$C_2(3{,}5) = 0{,}3925x^3 - 5{,}572x^2 + 23{,}464x - 26{,}8553 = 3{,}84$$



Slika 3.23.: **Graf funkcije interpolirane kubnim splineom iz primjera 9.**
Izvor: Obrada autora u Mathcadu

Primjer 10.: Interpolacija kubnim splineom

Za zadane točke diskretnog skupa $T_0(0,2.5), T_1(2,7), T_2(4,9), T_3(6,8), T_4(8,5.5)$ potrebno je odrediti kubni interpolacijski spline.

Postupak rješavanja:

S obzirom da imamo pet zadanih točaka, broj koraka će nam biti četiri $i = 4$.

Računamo razmake između točaka:

$$h_1 = x_1 - x_0 = 2 - 0 = 2$$

$$h_2 = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2$$

$$h_3 = x_3 - x_2 = 6 - 4 = 2$$

$$h_4 = x_4 - x_3 = 8 - 6 = 2$$

Razmaci između čvorova su jednaki (čvorovi su ekvidistantni) koristimo zapis (4).

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} = \frac{7 - 2,5}{2} = 2,25$$

$$d_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_2} = \frac{9 - 7}{2} = 1$$

$$d_3 = \frac{y_3 - y_2}{h_3} = \frac{8 - 9}{2} = -0,5$$

$$d_4 = \frac{y_4 - y_3}{h_4} = \frac{5,5 - 8}{2} = -1,25$$

$$e = \begin{bmatrix} 6 \cdot (d_2 - d_1) = 6(1 - 1,25) \\ 6 \cdot (d_3 - d_2) = 6(0,5 - 1) \\ 6 \cdot (d_4 - d_3) = 6(-1,25 + 0,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 \\ -9 \\ -4,5 \end{bmatrix}$$

$$H \cdot s = e \Rightarrow s_1 = -0,723, s_2 = -0,857, s_3 = -0,348.$$

Dodatni uvjet koji možemo iščitati iz Teorema 1.: $s_0 = s_4 = 0$.

Računamo $b_i = d_i - (s_i - s_{i-1}) \cdot \frac{h_i}{6}$ za $b = 1 do 4$.

$$b_1 = d_1 - (s_1 - s_0)\frac{h_1}{6} = 2{,}25 - (-0{,}723)\frac{2}{6} = 2{,}491$$

$$b_2 = d_2 - (s_2 - s_1)\frac{h_2}{6} = -1 - (-0{,}857 + 0{,}723)\frac{2}{6} = 1{,}045$$

$$b_3 = d_3 - (s_3 - s_2)\frac{h_1}{6} = -0{,}5 - (-0{,}348 + 0{,}857)\frac{2}{6} = -0{,}67$$

$$b_4 = d_4 - (s_4 - s_3)\frac{h_1}{6} = -1{,}25 - (0 + 0{,}348)\frac{2}{6} = -1{,}366$$

Računamo vrijednost polinoma C_1 za $0 \le x \le 2$:

$$C_1(x) = (y_0 - s_0 \cdot \frac{h_1^2}{6}) + b_1 \cdot (x - x_0) + \frac{s_0}{6h_1} \cdot (x_1 - x)^3 + \frac{s_1}{6h_1} \cdot (x - x_0)^3 =$$
$$= (2{,}5 - 0) + (2{,}491(x - 0)) + 0 + \left(\frac{-0{,}723}{12}\right)(x - 0)^3) =$$
$$= -0{,}0602x^3 + 2{,}491x + 2{,}5$$

Računamo vrijednost polinoma C_2 za $2 \le x \le 4$:

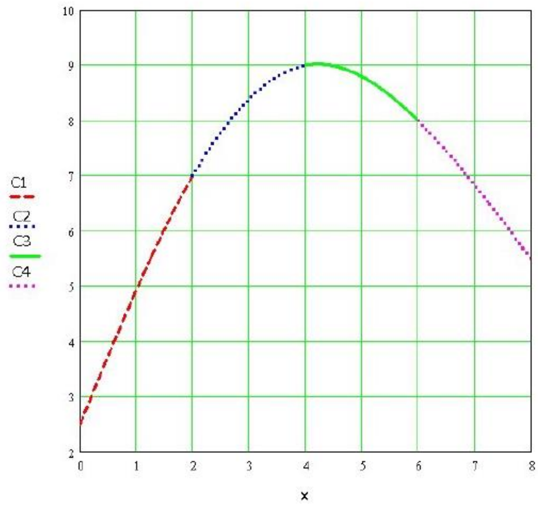
$$C_2(x) = (y_1 - s_1 \cdot \frac{h_2^2}{6}) + b_2 \cdot (x - x_1) + \frac{s_1}{6h_2} \cdot (x_2 - x)^3 + \frac{s_2}{6h_2} \cdot (x - x_1)^3 =$$
$$= 7 - \left(-0{,}723 \cdot \frac{4}{6}\right) + (1{,}045(x - 2) + \left(\frac{-0{,}723}{12}\right) \cdot (4 - x)^3 + \left(\frac{-0{,}857}{12}\right)(x - 2)^3 =$$
$$= 5{,}425 + 1{,}015x - 3{,}856 + 2{,}892x - 0{,}723x^2 + 0{,}06025x^3 - 0{,}0714x^3 + 0{,}4284x^2 - 0{,}8568x + 0{,}5712 =$$
$$= -0{,}01115x^3 - 0{,}2946x^2 + 3{,}0802x + 2{,}1402$$

Računamo vrijednost polinoma C_3 za $4 \le x \le 6$:

$$C_3(x) = (y_2 - s_2 \cdot \frac{h_2^2}{6}) + b_3 \cdot (x - x_2) + \frac{s_2}{6h_2} \cdot (x_3 - x)^3 + \frac{s_3}{6h_2} \cdot (x - x_2)^3 =$$
$$= (9 - (-0{,}857 \cdot \frac{4}{6})) + (-0{,}67(x - 4) + \frac{(-0{,}857)}{6 \cdot 2} \cdot (6 - x)^3 + (\frac{-0{,}348}{6 \cdot 2})(x - 4)^3 =$$
$$= 12{,}251 - 0{,}67x + 0{,}071x^3 - 1{,}278x^2 + 7{,}668x - 15{,}336 - 0{,}029x^3 + 0{,}348x^2 - 1{,}392x + 10856 =$$
$$= 0{,}042x^3 - 0{,}93x^2 + 5{,}606x - 1{,}229$$

Računamo vrijednost polinoma C_4 za $6 \le x \le 8$:

$$C_4(x) = (y_3 - s_3 \cdot \frac{h_3^2}{6}) + b_4 \cdot (x - x_3) + \frac{s_3}{6h_2} \cdot (x_4 - x)^3 + \frac{s_4}{6h_2} \cdot (x - x_3)^3 =$$
$$= \left(8 + 0{,}348 \cdot \frac{4}{6}\right) + (-1{,}366 \cdot (x-6) + \left(\frac{-0{,}348}{12}\right) \cdot (8-x)^3 + 0 =$$
$$= 0{,}029x^3 - 0{,}696x^2 + 4{,}202x + 1{,}58$$



Slika 3.24.: **Graf funkcije interpolirane kubnim splineom iz primjera 10.**
Izvor: Obrada autora u Mathcadu

Izračunati vrijednosti $x_5 = 1, x_6 = 3, x_7 = 5, x_8 = 7.$

Računamo vrijednost polinoma C_1 za $0 \le x \le 2$:

$$C_1(1) = -0{,}0602x^3 + 2{,}491x + 2{,}5 = -0{,}0602 + 2{,}491 + 2{,}5 = 4{,}93$$

Računamo vrijednost polinoma C_2 za $2 \le x \le 4$:

$$C_2(3) = -0{,}01115x^3 - 0{,}2946x^2 + 3{,}0802x + 2{,}1402 =$$
$$= -0{,}01115 \cdot 3^3 - 0{,}294 \cdot 3^2 + 3{,}0802 \cdot 3 + 2{,}1402 = 8{,}43$$

Računamo vrijednost polinoma C_3 za $4 \le x \le 6$:

$$C_3(5) = 0{,}042x^3 - 0{,}93x^2 + 5{,}606x - 1{,}229 =$$
$$= 0{,}042 \cdot 5^3 - 0{,}93 \cdot 5^2 + 5{,}606 \cdot 5 - 1{,}229 = 8{,}80$$

Računamo vrijednost polinoma C_4 za $6 \le x \le 8$:

$$C_4(7) = 0{,}029x^3 - 0{,}696x^2 + 4{,}202x + 1{,}58 =$$
$$= 0{,}029 \cdot 7^3 - 0{,}696 \cdot 7^2 + 4{,}202 \cdot 7 + 1{,}58 = 6{,}84$$

3.5. Pregled dobivenih podataka

Tablica 7.: Pregled dobivenih podataka

Zadane vrijednosti na diskretnom skupu točaka	**T_0(2,2), T_1(3,4), T_2(4,3), T_3(5,1), T_4(6,2)**	**T_0(2,2.5), T_1(2,7), T_2(4,9), T_3(6,8), T_4(8,5.5)**
Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma	$f(x)=0{,}083x^4-0{,}833x^3+1{,}416x^2+5{,}333x-9$	$f(x)=0{,}0052x^4-0{,}073x^3-0{,}021x^2+2{,}542x+2{,}5$
	f(3,5)=3,804	f(1)=4,95, f(3)=8,39, f(5)=8,81, f(7)=6,71
Newtonov oblik interpolacijskog polinoma	$f(x)= 0{,}08325x^4-0{,}8325x^3+1{,}414x^2+5{,}337x-9{,}002$	$f(x)= 0{,}005x^4-0{,}07x^3-0{,}0325x^2+2{,}555x+2{,}5$
	f(3,5)=3,798	f(1)=4,95, f(3)=8,39, f(5)=8,84, f(7)=6,79
Metoda najmanjih kvadrata-interpolacija polinomom prvog stupnja	$f(x)=0{,}3x+1{,}2$	$f(x)=0{,}25x+3{,}8$
	f(3,5)=2,25	f(1)=4,05, f(3)=4,55, f(5)=5,05, f(7)=5,55
Metoda najmanjih kvadrata-interpolacija polinomom drugog stupnja	$f(x)=-0{,}214x^2+1{,}414x+0{,}6$	$f(x)=-0{,}589x^2+5{,}864x-4{,}514$
	f(3,5)=2,9275	f(1)=0,76, f(3)=7,77, f(5)=10,08, f(7)=7,67
Kubni spline	$f(x)=-0{,}6785x^3+4{,}071x^2-5{,}464x+2{,}072;\quad 2\leq x\leq 3$ $f(x)=0{,}3925x^{3-}5{,}572x^2+23{,}464x-26{,}8553;\quad 3\leq x\leq 4$ $f(x)=1{,}107x^3-14{,}142x^2-+57{,}745x-72{,}562;\quad 4\leq x\leq 5$ $f(x)=-0{,}8215x^3+14{,}787x^2-86{,}901x+168{,}5175;\quad 5\leq x\leq 6$	$f(x)=-0{,}0602x^3+2{,}491x+2{,}5;\quad 0\leq x\leq 2$ $f(x)=-0{,}01115x^3-0{,}2946x^2+3{,}0802x+2{,}1402;\quad 2\leq x\leq 4$ $f(x)=0{,}042x^3-0{,}93x^2+5{,}606x-1{,}229;\quad 4\leq x\leq 6$ $f(x)=0{,}029x^3-0{,}696x^2+4{,}202x+1{,}58;\quad 6\leq x\leq 8$
	f(3,5)=3,84	f(1)=4,93; f(3)=8,43; f(5)=8,80, f(7)=6,84

4. ZAKLJUČAK

U tehnici, aproksimacija se javlja u dva bitno različita oblika. Prvi oblik je kada nam je poznata funkcija ali je njezina forma prekomplicirana za računanje. U tom slučaju, izaberemo neke informacije o funkciji i po nekom kriteriju odredimo aproksimacijsku funkciju. Kada govorimo o ovom obliku aproksimacije možemo birati informacije o funkciji koje ćemo koristiti. Drugi oblik je kada ne znamo funkciju već samo neke informacije o njoj, na primjer, vrijednosti na nekom diskretnom skupu točaka. Zamjenska funkcija odreduje se iz raspoloživih informacija. Osim samih podataka, ove informacije uključuju očekivani oblik ponašanja funkcije. Prvi oblik koristimo u teoriji za razvoj numeričkih metoda na bazi aproksimacije. S drugim oblikom češće se susrećemo u praksi. Na primjer, kod mjerenja nekih veličina, osim izmjerenih podataka, pokušavamo aproksimirati i podatke koji se nalaze "između" izmjerenih točaka.

Problem koji se može pojaviti kod interpolacije ovim metodama je ukoliko funkcija ima nagle promjene. U tom slučaju potrebno je smanjiti područje razmatranja ili koristiti npr. interolacijski spline točno između ili u okolini točaka koje najviše osciliraju.

Bez obzira, ne možemo izvojiti jedan općeniti postupak koji bi bio primjenjiv za sve slučajeve. Svaki slučaj je potrebo analizirati za sebe, analizirati točke rasipanja te odabrati najpovoljniju metodu koja će dati najtočnije rezultate.

LITERATURA

[1] Björck, A.:**Numerical methods for least squares problems**, SIAM, Philadelphia, 1996.

[2] Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A.: **Matematički priručnik**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

[3] Davis J., P.: **Interpolation and approximation**, Dover Publications, Inc.Mineola, New York, 2014.

[4] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer Sanja, Singer Saša: N**umerička analiza,** PMF, Zagreb, 2003.

[5] Ivanšić, I.:**Numerička matematika**, Element, Zagreb, 1998.

[6] Jerković, I.: **Metoda najmanjih kvadrata i njezina primjena u fizici**, Diplomski rad, Osijek, 2016.

[7] Perić, I., Vukelić, A.:**Numeričke metode**, Predavanja i vježbe, Zagreb, 2006.

[8] Scitovski, R.: **Numerička matematika,** Grafika d.o.o. Osijek, 2004.

[9] Tevčić, M.:**Inženjerska matematika, skripta,** Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

[10] www.hr.wikipedia.org/wiki/Aproksimacija

[11] www.hr.wikipedia.org/wiki/Interpolacija

POPIS PRIMJERA

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA