

# USPOREDBA FILTARSKIH APROKSIMACIJA

---

**Radoš, Katarina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:979591>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-27**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Veleučilište u Karlovcu

Strojarski odjel

Stručni studij mehatronike

Katarina Radoš

# **USPOREDBA FILTARSKIH APROKSIMACIJA**

ZAVRŠNI RAD

Karlovac, 2020.

Karlovac University of Applied Sciences  
Engineering Department  
Professional undergraduate study of Mechatronics

Katarina Radoš

# **COMPARISON OF FILTER APPROXIMATION METHODS**

FINAL PAPER

Karlovac, 2020.

Veleučilište u Karlovcu

Strojarski odjel

Stručni studij mehatronike

Katarina Radoš

# **USPOREDBA FILTARSKIH APROKSIMACIJA**

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Anamarija Kirin, mag. ing. inf. et comm. techn.

Karlovac, 2020.



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



Trg J.J.Strossmayera 9

HR-47000, Karlovac, Croatia  
Tel. +385 - (0)47 - 843 - 510  
Fax. +385 - (0)47 - 843 - 579

## **VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**

Stručni studij: Mehatronika

Usmjerenje: .....Karlovac, .....

### **ZADATAK ZAVRŠNOG RADA**

Student: Katarina Radoš

Matični broj: 0112615043

Naslov: Usporedba filtarskih aproksimacija

.....  
Opis zadatka: U Završnom radu opisati postupak projektiranja filtra iz zadanih specifikacija korištenjem različitih vrsta aproksimacija. Primijeniti opisani postupak na konkretni slučaj koristeći navedene aproksimacije. Usporediti svojstva tako dobivenih filtara i odrediti prednosti i nedostatke pojedinih aproksimacija.

Koristiti se stručnom literaturom, radnim materijalima, Zakonima i Pravilnicima, ostalom stručnom literaturom i konzultirati se s mentorom. Završni rad izraditi sukladno Pravilniku VUKA.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datum obrane:

4.11.2019.

.....

13.7.2020.

Mentor:

Predsjednik Ispitnog povjerenstva:



## **PREDGOVOR**

Pisanjem ovog završnog rada shvatila sam koliko je teško snaći se u literaturi koja je isključivo na stranom jeziku, bez obzira na poznavanje tog stranog jezika. Uzevši to u obzir, moram reći da ovaj rad ne bi bio završen bez velike pomoći moje mentorice Anamarije Kirin. Ovim putem želim joj se zahvaliti na iznimnom razumijevanju i angažiranosti, s kojom mi je maksimalno olakšala pisanje ovog rada. Također, želim se zahvaliti svim profesorima i asistentima, koji su godinama nesebično prenosili svoje znanje meni i mojim kolegama. Na posljetku, želim zahvaliti svojoj obitelji koja mi je omogućila školovanje, bodrila me u svim teškim trenucima i slavila sve moje uspjehe što u privatnom, to u akademskom životu. Uistinu, bez njih ne bih imala ni priliku pisati ovaj završni rad, i na tome sam im neizmjerljivo zahvalna.

## **SAŽETAK**

U ovom radu objasniti ćemo ideju idealnog filtra, vrste idealnog filtra i vrste aproksimacija. U 2. poglavlju opisat ćemo idealni filter i njegove vrste te napraviti uvod u realne filtre i objasniti neka njihova svojstva. U 3. poglavlju objasniti ćemo proces projektiranja filtra i razraditi metode aproksimiranja realnog filtra. Nadalje, u praktičnom dijelu ovog rada, pružit ćemo primjer projektiranja filtra korištenjem različitih metoda aproksimacije te usporediti rezultate. Na kraju, obuhvatit ćemo cjelokupni rad u zaključku.

Ključne riječi: idealni filter, realni filter, analogni filter, projektiranje filtra, aproksimacije



## **ABSTRACT**

In this final paper, we will present the idea of ideal filter, types of ideal filter and types of approximation methods. In the second chapter, we will describe the ideal filter and its types, then make an introduction to real filters and explain some of their characteristics, in the third chapter, we will depict the process of designing a filter and elaborate various methods of approximation of real filters. Furthermore, in the practical part of this final paper, we will offer an example of designing the filter using different methods of approximation, and then compare the results. Ultimately, we will cover all of our work in the Conclusion chapter.

Keywords: ideal filter, real filter, analog filter, filter designing, approximation methods

# Sadržaj

<b>1. UVOD</b> .....	1
<b>2. IDEALNI I REALNI FILTRI</b> .....	2
<b>2.1. Idealni filter</b> .....	2
<b>2.1.1. Niskopropusni filter</b> .....	2
<b>2.1.2. Visokopropusni filter</b> .....	3
<b>2.1.3. Pojasnopropusni filter</b> .....	4
<b>2.1.4. Pojasna brana</b> .....	5
<b>2.2. Realni filteri</b> .....	6
<b>3. PROJEKTIRANJE FILTERA</b> .....	9
<b>3.1. Prijenosna funkcija</b> .....	9
<b>3.2. Specifikacije filtra</b> .....	10
<b>3.3. Aproksimacija</b> .....	13
<b>3.3.1. Butterworthova aproksimacija</b> .....	14
<b>3.3.2. Čebiševljeva aproksimacija</b> .....	17
<b>3.3.3. Inverzna Čebiševljeva aproksimacija</b> .....	20
<b>3.3.4. Eliptična aproksimacija</b> .....	23
<b>3.4. Transformacija prijenosne funkcije</b> .....	24
<b>4. PRIMJENA TRANSFORMACIJA NA ZADANI FILTER</b> .....	25
<b>4.1. Butterworthova aproksimacija</b> .....	25
<b>4.2. Čebiševljeva aproksimacija</b> .....	26
<b>4.3. Inverzna Čebiševljeva aproksimacija</b> .....	28
<b>4.4. Usporedba rezultata</b> .....	29
<b>5. ZAKLJUČAK</b> .....	31
LITERATURA.....	32
POPIS SLIKA .....	33
POPIS TABLICA.....	34

## 1. UVOD

Filtar je, u osnovnom značenju riječi, uređaj koji razdvaja određene komponente jedne od drugih. Vrste filtra su mnogobrojne, od onih najjednostavnijih kao što je to na primjer filtar za kavu, do onih složenijih kao što je to električni filtar. U ovom završnom radu analizirat ćemo upravo električni filtar. Električni filtar dijeli se na pasivne filtre koji se sastoje od pasivnih komponenti (zavojnice, kondenzatora i otpornika) i na aktivne filtre koji, osim pasivnih komponenti sadržavaju i aktivne komponente (tranzistori, operacijska i druga pojačala). Cilj aktivnih komponenti je pojačanje signala. Aktivni i pasivni filtri dalje se dijele na analogne i digitalne. U ovom završnom radu baviti ćemo se isključivo analognim filtrima.

Analogni električni filtar je električni sklop, odnosno sustav čiji je cilj ukloniti neželjene komponente analognog signala na ulazu, te propustiti samo određene komponente tog istog signala na izlazu. Drugim riječima, analogni električni filtar na ulazu prima ulazni analogni signal, uklanja ili umanjuje neželjena svojstva tog signala, zadržava ili ističe željena svojstva i propušta ih u obliku izlaznog signala. Poveznicu ulaznog i izlaznog signala možemo ostvariti preko prijenosne funkcije filtra.

Kao što smo to već napisali, analogni električni filtar je sustav što znači da je opisan nekom funkcijom. Ova funkcija je najčešće zadana kao prijenosna funkcija  $H(s)$ . Također, sustav filtra može biti opisan impulsnim odzivom  $h(t)$ . Impulsni odziv je sa prijenosnom funkcijom povezan preko Laplace-ove transformacije. Odnosno, Laplace-ovom transformacijom impulsnog odziva dobit ćemo upravo prijenosnu funkciju.

## 2. IDEALNI I REALNI FILTRI

### 2.1. Idealni filter

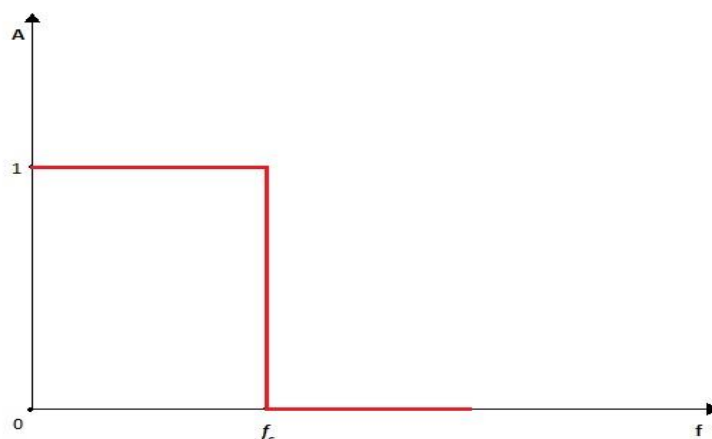
Idealan filter je onaj filter koji savršeno eliminira sve neželjene frekvencije ulaznog signala, te propušta poželjne frekvencije, bez da ih izobličava, u obliku izlaznog signala. Impulsni odziv idealnog filtra je *sinc* funkcija u vremenskoj domeni. S obzirom da *sinc* funkcija ima vrijednost različitu od 0 kroz cijeli vremenski interval, filter zahtjeva beskonačnu memoriju kako bi bio izvediv. Također, impulsni odziv je beskonačno dugačak, što znači da bi filtru trebao beskonačno dugačak vremenski period da odstrani neželjene komponente. S obzirom na to, idealni filter je fizički nemoguće izraditi.

U teoriji, idealni filter nema prijelazno područje između propusnog i nepropusnog pojasa. Granična frekvencija idealnog filtra je oštra, odnosno frekvencijski odziv filtra je pravokutan. Prema selektivnosti propuštanja frekvencija razlikujemo sljedeće vrste idealnog filtra:

- Niskopropusni filter
- Visokopropusni filter
- Pojasno propusni filter
- Pojasna brana

#### 2.1.1. Niskopropusni filter

Niskopropusni (NP) filter je tip filtra koji propušta signal na niskim frekvencijama, odnosno na frekvencijama nižim od granične frekvencije  $f_c$ , a ostale frekvencije guši. Koristimo ga kada, na primjer, sa audio signala želimo ukloniti visoke šumove. Također, moramo razumjeti da uz te visoke šumove možemo potencijalno ukloniti i dijelove informacije koja se nalazi na višim frekvencijama. Filter ne prepoznaje informaciju od šuma, nego pojase frekvencija koje mu zadamo.

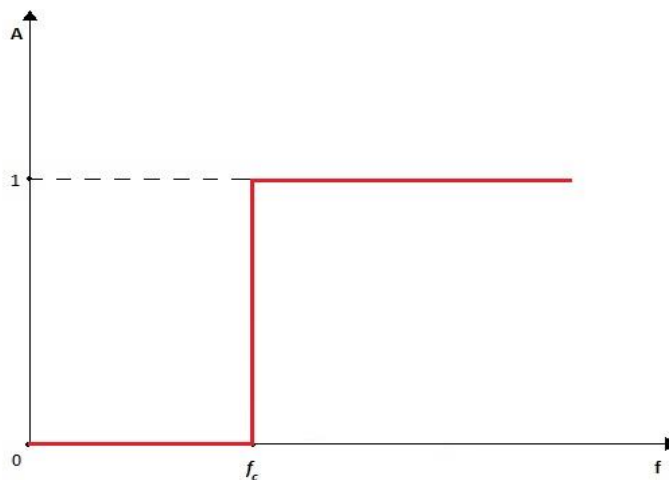


Slika 1. Frekvencijski odziv niskopropusnog filtra

Na slici 1. prikazan je frekvencijski odziv NP filtra. Iz njega možemo zaključiti kako NP filter propušta frekvencije niže od frekvencije  $f_c$ , dok prigušuje frekvencije više od frekvencije  $f_c$ . U ovom slučaju, interval frekvencija između 0 i  $f_c$  nazivamo propusnim pojasom, a interval frekvencija od  $f_c$  do  $+\infty$  pojasom gušenja. Također, frekvencija  $f_c$  označava *cutoff* frekvenciju, odnosno frekvenciju koja označava prijelaz između propusnog pojasa i pojasa gušenja. S obzirom da se radi o idealnom NP filteru, prijelazni pojas je pod kutom od  $90^\circ$ , odnosno nemamo interval frekvencija u kojem postupno prelazimo iz propusnog u nepropusni pojas. Upravo to je jedna od karakteristika idealnog filtra: ne postoji prijelazni pojas, nego frekvencija  $f_c$  savršeno „reže“ (eng. „cut“) propusni pojas, te nas automatski prebacuje u pojas gušenja. Iz tog razloga frekvenciju  $f_c$  nazivamo *cutoff* frekvencijom.

### 2.1.2. Visokopropusni filter

Visokopropusni (VP) filter propušta signal na visokim frekvencijama, odnosno frekvencijama iznad granične frekvencije  $f_c$ , a guši frekvencije ispod granične frekvencije  $f_c$ . Koristimo ga kada želimo ukloniti smetnje na niskim frekvencijama. Također, kao i kod NP filtra, moramo paziti da ne odstranimo dio poželjne informacije koji se nalazi na niskim frekvencijama.

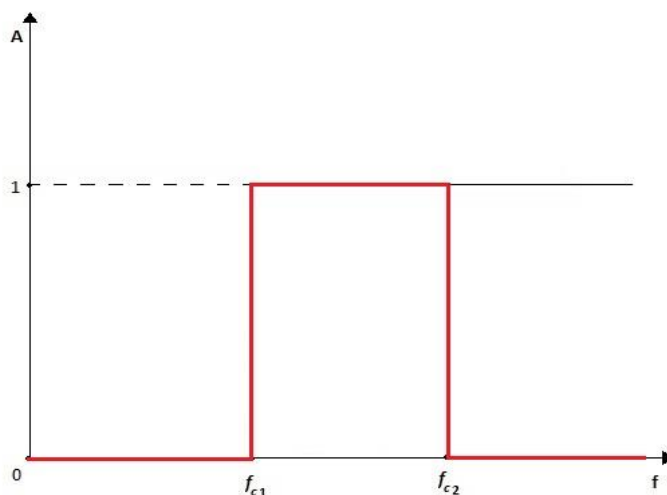


Slika 2. Frekvencijski odziv visokopropusnog filtra

Iz slike 2. vidimo kako se ponaša VP filter. Slično kao na slici 1., možemo razlikovati propusni i nepropusni pojas. Isto tako imamo i *cutoff* frekvenciju  $f_c$  koja označava prijelaz između pojasa propuštanja i pojasa gušenja. S obzirom da se radi o VP filteru, za razliku od niskopropusnog, on propušta frekvencije više od  $f_c$ , a guši frekvencije niže od  $f_c$ . Iz tog razloga, interval frekvencija od 0 do  $f_c$  nazivamo pojasom gušenja, a interval frekvencija od  $f_c$  do  $+\infty$  pojasom propuštanja. Također, radi se o idealnom VP filteru, što znači da nemamo prijelazni pojas nego *cutoff* frekvenciju.

### 2.1.3. Pojasnopropusni filter

Pojasnopropusni (PP) filter, za razliku od VP i NP filtra sadržava dvije granične frekvencije  $f_{c1}$  i  $f_{c2}$ . Kao što mu i samo ime govori, PP filter propušta frekvencije između graničnih frekvencija, a guši sve ostale. Ovakav filter možemo koristiti kada želimo zadržati informacije određenih frekvencija. Na primjer, ljudsko uho može prepoznati sve frekvencije od 300 Hz do 3000 Hz [1]. Pomoću ovakvog filtra, možemo eliminirati sve pozadinske šumove s potencijalne audio snimke, a zadržati samo željenu informaciju – ljudski glas. Pri tome, jedna od graničnih frekvencija bi iznosila 300 Hz, a druga 3000 Hz. Kao i u prošlim tipovima filtra, moramo paziti pri postavljanju ovih graničnih frekvencija kako ne bi uklonili dijelove željenih informacija. Također, moguće je da se neželjeni sadržaj informacija djelomično nalazi na frekvencijama propusnog pojasa, što znači da ga nećemo moći u potpunosti ukloniti.

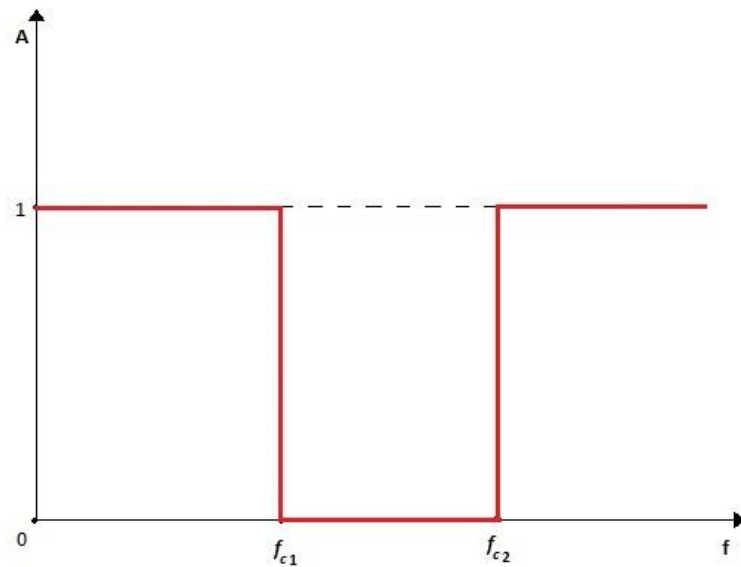


Slika 3. Frekvencijski odziv pojasnopropusnog filtra

Na slici 3. vidimo kako PP filter propušta interval frekvencija koje se nalaze između frekvencija  $f_{c1}$  i  $f_{c2}$ . U ovom slučaju,  $f_{c1}$  i  $f_{c2}$  označavaju dvije granične, to jest *cutoff* frekvencije. Ako usporedimo slike 1. i 2. sa slikom 3. možemo vidjeti kako NP i VP filter imaju po jedan konstantan pojas gušenja i jedan konstantan pojas propuštanja, dok PP filter ima pojas gušenja koji je podijeljen na dva intervala, između kojih se nalazi pojas propuštanja. Dakle, interval frekvencija od 0 do  $f_{c1}$  označava prvi dio nepropusnog pojasa, interval frekvencija od  $f_{c1}$  do  $f_{c2}$  označava propusni pojas, a interval od  $f_{c2}$  do  $+\infty$  označava nastavak nepropusnog pojasa. Također, radi se o idealnom filteru, dakle nemamo prijelazne pojaseve, nego *cutoff* frekvencije. Kada bi se radilo o realnom filteru, imali bi dva prijelazna pojasa, jer imamo dvije granične frekvencije.

#### 2.1.4. Pojasna brana

Kao i PP filter, pojasna brana (PB) sadržava dvije granične frekvencije. Suprotno od PP filtra, ovaj filter guši frekvencije omeđene graničnim frekvencijama  $f_{c1}$  i  $f_{c2}$ , a propušta sve ostale. Ovakav je filter posebno koristan kada ga ugrađujemo u mjerne instrumente, kako bi eliminirali mogućnost prolaska signala u osjetljive dijelove mjernog instrumenta. Na primjer, veliki broj elektroničkih mjernih instrumenata koristi AC napajanje sa ulaznom frekvencijom od 60 Hz. U takav uređaj, ugrađujemo pojasnu branu frekvencija 58 Hz – 62 Hz [2], kako signal ne bi mogao proći u osjetljiva mjerna područja uređaja.



Slika 4. Frekvencijski odziv pojasne brane

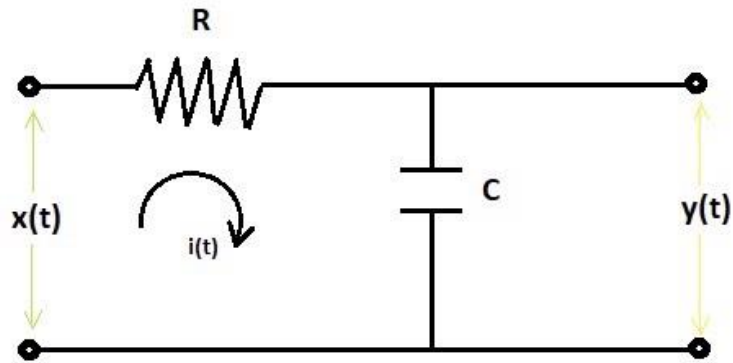
Ako usporedimo slike 3. i 4. možemo zaključiti kako se PB ponaša suprotno od PP filtra. Dakle, PB guši interval frekvencija koje se nalaze između  $f_{c1}$  i  $f_{c2}$  koje označavaju dvije granične frekvencije. Također, propusni pojas se sastoji od dva intervala, odnosno prekinut je nepropusnim pojasom. Tako je, u ovom slučaju, interval od 0 do  $f_{c1}$  prvi dio propusnog pojasa, interval od  $f_{c1}$  do  $f_{c2}$  nepropusni pojas, a interval od  $f_{c2}$  do  $+\infty$  nastavak propusnog pojasa. Isto kao i u primjeru PP filtra, kada bi se radilo o realnom filtru imali bismo dva prijelazna pojasa. S obzirom da se radi o idealnom filtru, imamo *cutoff* frekvencije umjesto prijelaznih pojaseva.

## 2.2. Realni filtri

Kao primjer realnog filtra možemo uzeti NP filter ostvaren pasivnim elementima. Najjednostavniji takav filter je RC filter prikazan na slici 5. gdje su izlazni signal označen kao  $y(t)$ , i ulazni signal označen kao  $x(t)$  povezani sljedećom jednadžbom

$$RC \times y'(t) + y(t) = x(t). \quad (1)$$





Slika 5. Niskopropusni RC filter

Fourierovom transformacijom ove jednadžbe računamo frekvencijski odziv  $H(\omega)$  na sljedeći način:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \quad (2)$$

pri čemu je:

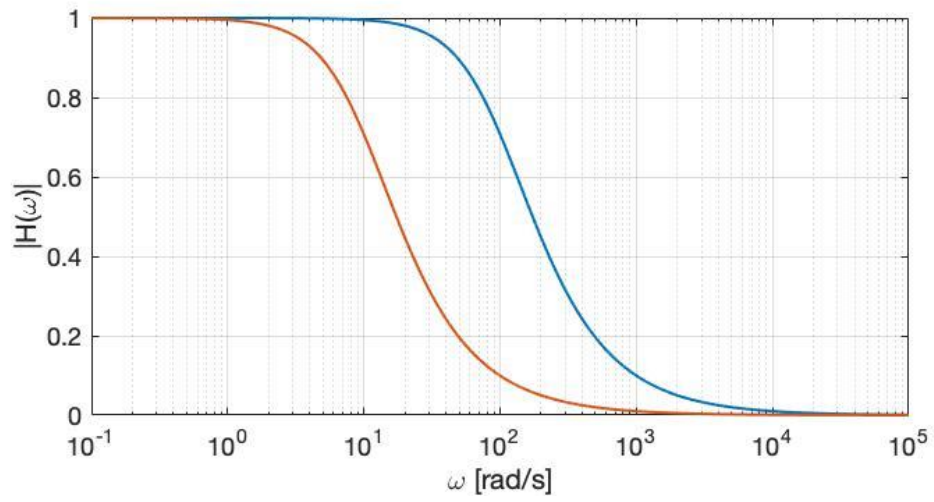
$$\omega_0 = 1/RC. \quad (3)$$

Također, amplitudni odziv  $|H(\omega)|$  i fazni odziv  $\theta_H(\omega)$  računamo pomoću sljedećih formula:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega/\omega_0|} = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_0)^2]^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (5)$$

Frekvencijski odziv ovog filtra, za  $\omega_0 = 100$  rad/s (plava linija) i za  $\omega_0 = 10$  rad/s (crvena linija), dan je na slici 6.



Slika 6. Frekvencijski odziv RC filtra za  $\omega_0 = 10$  rad/s (crvena linija) i  $\omega_0 = 100$  rad/s (plava linija)

### 3. PROJEKTIRANJE FILTERA

Projektiranje filtra je postupak kojim određujemo prijenosnu funkciju sustava sa željenim karakteristikama. Pri projektiranju filtra težimo karakteristikama idealnog filtra koji bi trebao propuštati frekvencije signala iz propusnog pojasa bez oslabljivanja, a frekvencije signala iz nepropusnog pojasa beskonačno prigušiti, odnosno ukloniti tako da njihova amplituda na izlazu bude jednaka nuli. Također, nastojimo frekvencije iz propusnog pojasa propustiti kroz filter tako da ne dođe do izobličenja.

Nažalost, s obzirom da su prijenosne funkcije realnih filtera racionalne funkcije s ograničenim brojem nula i polova, ne možemo u potpunosti postići karakteristike idealnog filtra, već im se možemo samo približiti.

Iz tog razloga, specifikacije filtra moraju uzeti u obzir ove nesavršenosti. U specifikacijama filtra moraju se navesti granične vrijednosti propusnog i nepropusnog pojasa, kao i maksimalno dozvoljeno gušenje u pojasu propuštanja i minimalno potrebno gušenje u pojasu gušenja.

Projektiranje tipičnog analognog filtra temelji se na aproksimacijama amplitudne ili fazne karakteristike polinomima ili racionalnim funkcijama. Ovaj rad će se baviti aproksimacijama amplitudne karakteristike.

#### 3.1. Prijenosna funkcija

Prijenosna funkcija, koju označavamo kao  $H(s)$ , linearnih, vremenski invarijantnih sustava (*linear time-invariant systems, LTI*) čiji su početni uvjeti jednaki nuli, izražena je kao omjer Laplaceovih transformacija izlaznog i ulaznog signala

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (6)$$

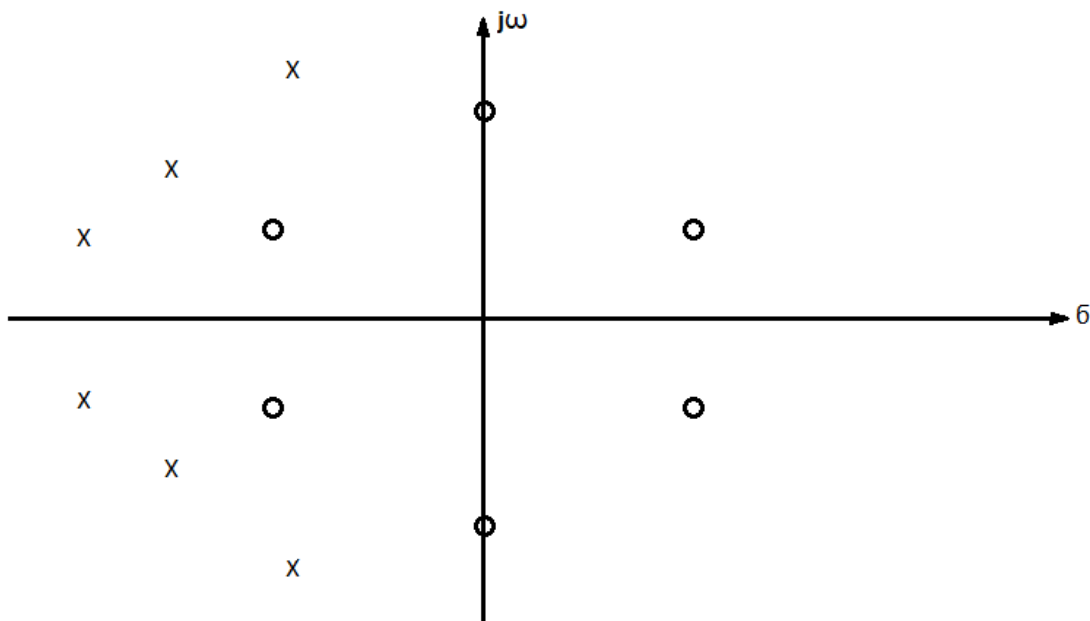
Pri raspisivanju prethodne jednadžbe, možemo zaključiti kako je prijenosna funkcija zapravo omjer dvaju polinoma

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (7)$$

odnosno u faktoriziranom obliku

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (8)$$

gdje su  $a_k$  i  $b_k$  koeficijenti polinoma u nazivniku i brojniku. Za LTI sustave ti koeficijenti ne smiju biti funkcije ulaznog ni izlaznog signala, niti funkcije vremenske varijable  $t$ . Da bi sustav bio ostvariv, koeficijenti moraju biti i realni. Iz faktoriziranog oblika možemo odrediti nule,  $z_k$ , i polove,  $p_k$ , sustava. Polovi su korijeni polinoma u nazivniku prijenosne funkcije  $H(s)$ . Kao uvjet za stabilne sustave, oni se moraju nalaziti u lijevoj strani kompleksne  $s$ -ravnine. Također, za stabilne sustave, stupanj polinoma u nazivniku mora biti veći od stupnja polinoma u brojniku. Nule su korijeni polinoma u brojniku prijenosne funkcije  $H(s)$ . Kada nule leže na imaginarnoj osi ili se nalaze na lijevoj strani koordinatnog sustava, funkcija  $H(s)$  je funkcija minimalne faze što automatski znači da je manje kašnjenje signala. Polovi i nule mogu bit imaginarni ali u tom slučaju dolaze u konjugirano kompleksnim parovima. Jedan od mogućih rasporeda polova i nula stabilnog sustava prikazan je na slici 7.

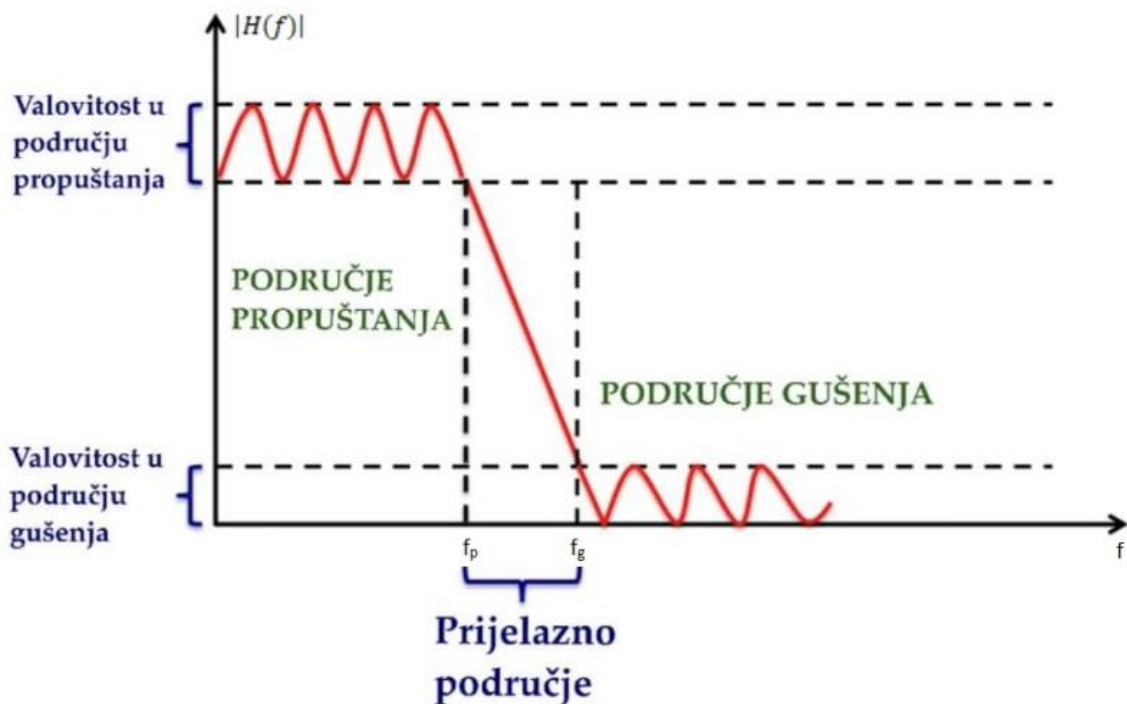


Slika 7. Raspored polova i nula prijenosne funkcije

### 3.2. Specifikacije filtra

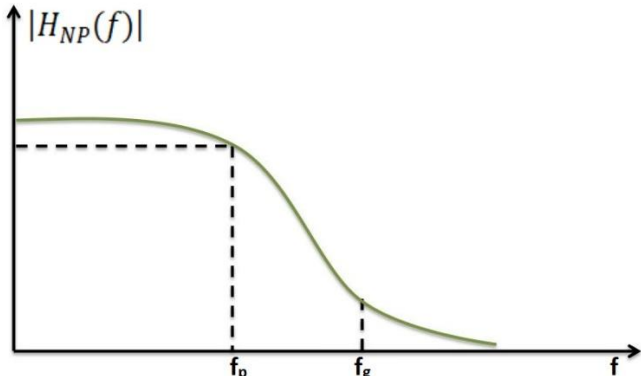
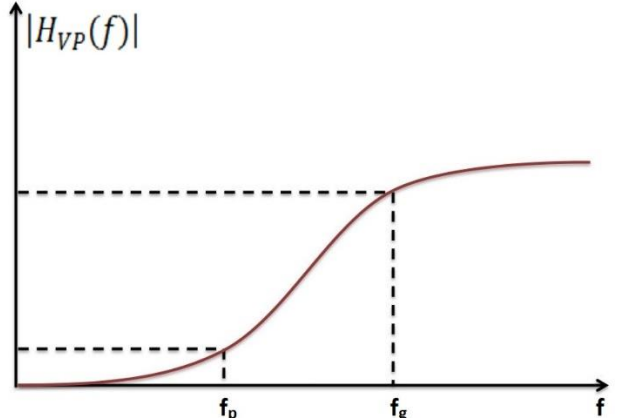
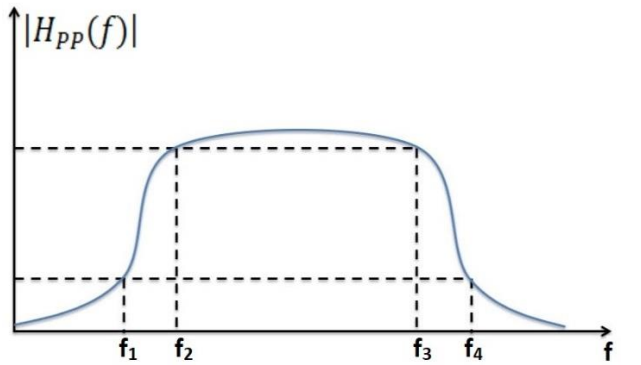
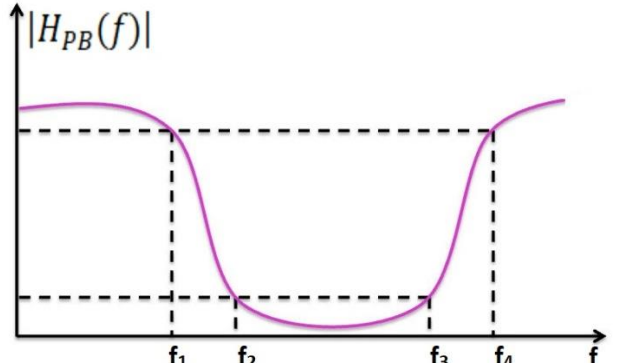
Konstruiranje filtra obično započinje sa skupom specifikacija koje filter mora zadovoljavati. U slučaju amplitudne specifikacije definirano je pojačanje odnosno najveće dopušteno gušenje u području propuštanja, najmanje gušenje u području gušenja te rubne frekvencije pojedinih područja. Primjer navedenih područja i rubnih frekvencija za NP filter dan je na slici 8. Cilj je iz zadanih podataka pronaći prijenosnu funkciju filtra minimalne faze, najmanjeg reda koja zadovoljava zadane uvjete. U većini

slučajeva postupak projektiranja odvija se tako da se najprije zadane specifikacije transformiraju u vrijednosti koje se mogu primijeniti na **niskopropusni prototip (NPP)**. NPP je filter čija je granična frekvencija normirana na 1 rad/s i u većini slučajeva označava rub pojasa propuštanja. Frekvencije NPP-a označavat ćemo s  $v$ . Izračun frekvencija koje označavaju rub pojasa gušenja NPP-a,  $v_g$ , ovisno o vrsti filtera koji konstruiramo dan je u tablici 1. Frekvencije koje označavaju rubove pojedinih područja kod PP filtera te pojasne brane moraju imati geometrijsku simetriju što znači da mora vrijediti  $f_1 f_4 = f_2 f_3$ . Ukoliko ne postoji geometrijska simetrija potrebno je promijeniti jednu od frekvencija i to tako da se ne mijenja rub pojasa gušenja te da prijelazno područje nakon promjene frekvencije bude uže. Na primjer, ako za PP filter ne postoji geometrijska simetrija, nećemo mijenjati frekvencije  $f_1$  i  $f_4$  jer bismo time promijenili rubove pojasa gušenja. Mijenjamo, dakle, ili frekvenciju  $f_2$  ili  $f_3$  pri čemu frekvenciju  $f_2$  smijemo samo smanjiti, a frekvenciju  $f_3$  samo povećati.



Slika 8. Karakteristična područja i frekvencije NP filtera

Tablica 1. Određivanje frekvencija ruba pojasa gušenja za NPP

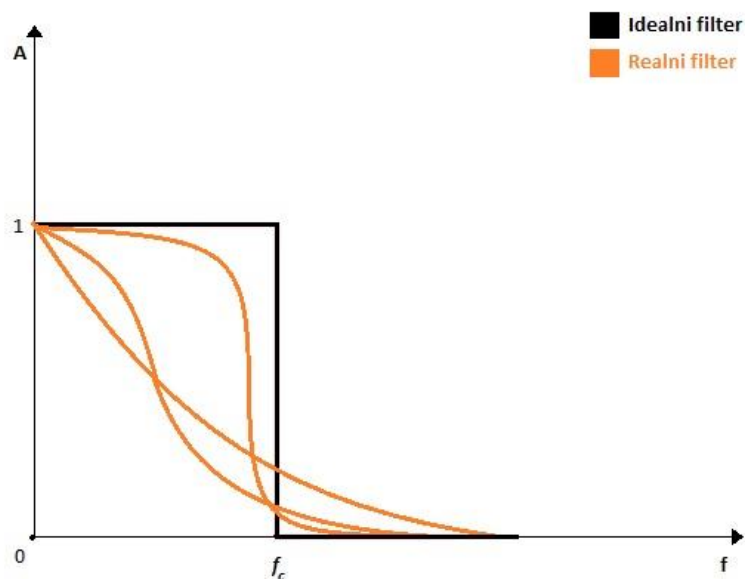
	$v_p = 1 \text{ rad/s,}$ $v_g = \frac{f_s}{f_p}$
	$v_p = 1 \text{ rad/s,}$ $v_g = \frac{f_p}{f_g}$
	$v_p = 1 \text{ rad/s,}$ $v_g = \frac{f_4 - f_1}{f_3 - f_2}$
	$v_p = 1 \text{ rad/s,}$ $v_g = \frac{f_4 - f_1}{f_3 - f_2}$

### 3.3. Aproksimacija

Kao što smo to već napisali, idealan filter je neostvariv, što znači da ga ne možemo izraditi, ali ga možemo aproksimirati. Kada pogledamo frekvencijske odzive prije navedenih vrsta idealnog filtra, možemo primijetiti kako su prijelazna područja između propusnog i nepropusnog pojasa vrlo oštra. U realnosti, nažalost, stvari nisu tako idealne. Oblik prijelaznog područja, između ostalog, ovisi i o tome koju smo vrstu aproksimacije koristili.

Realni filter je, za razliku od idealnog, kauzalan i stabilan te ograničen u vremenskoj domeni. To znači da je realni filter fizički ostvariv. Postupkom aproksimacije pokušavamo dobiti realni filter s karakteristikama što sličnijim idealnom.

Kako bi najbolje objasnili što je to aproksimacija, za primjer možemo uzeti frekvencijski odziv idealnog NP filtra. Na slici 9. uz odziv idealnog NP filtra, prikazani su i odzivi realnog filtra. Što je odziv sličniji idealnom, to je njegova izvedba skuplja. Na slici 9. krivulje u boji predstavljaju Butterworthove aproksimacije različitog reda, pri čemu je krivulja koja najbliže prikazuje idealan filter najvišeg reda, a krivulja koja je najmanje slična idealnom filtru, najmanjeg reda.



Slika 9. Odziv Butterworthove aproksimacije u usporedbi sa odzivom realnog filtra

Postupak projektiranja filtra svodi se na aproksimaciju kvadrata amplitude frekvencijske karakteristike NPP-a polinomom ili omjerom polinoma u  $v^2$ . Iz frekvencijske karakteristike izvodimo prijenosnu funkciju minimalne faze. Prijenosna funkcija i prigušenje za filter  $n$ -tog reda dani su redom sljedećim izrazima:

$$|H(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 L_n^2(\nu)}, \quad (9)$$

$$A_{dB}(\nu) = 10 \log[1 + \alpha^2 L_n^2(\nu)], \quad (10)$$

gdje  $\alpha$  određuje prigušenje u pojasu propuštanja, a  $L_n(\nu)$  je racionalna funkcija ili polinom  $n$ -tog reda. Pojedine aproksimacije razlikuju se upravo u odabiru  $L_n(\nu)$  pri čemu u pojasu propuštanja mora vrijediti  $L_n^2(\nu) \approx 0$ , a u pojasu gušenja  $L_n^2(\nu) \gg 0$ . Iz gornjih jednadžbi možemo odrediti red filtra  $n$  i parametar valovitosti  $\alpha$  što će u nastavku biti pokazano za nekoliko aproksimacija.

Postoji više vrsta aproksimacija, a koristimo vrstu aproksimacije koja daje najbolje željene rezultate. Četiri glavne vrste aproksimacije amplitudne karakteristike su:

- Butterworthova aproksimacija
- Čebiševljeva aproksimacija
- Inverzna Čebiševljeva aproksimacija
- Eliptična aproksimacija

### 3.3.1. Butterworthova aproksimacija

Butterworthova aproksimacija prvi put je opisana 1930. godine u radu britanskog inženjera i fizičara Stephena Butterwortha pod nazivom "On the Theory of Filter Amplifiers". Upravo po njemu je i dobila naziv. Drugi naziv za Butterworthovu aproksimaciju je „maksimalno monotona“ aproksimacija, jer ima glatki, odnosno monotoni, prijelaz iz pojasa propuštanja u pojas gušenja. Ova aproksimacija ima minimalni fazni odziv. S obzirom na to, koristimo ju kada nam je potreban minimalni fazni pomak i umjerena selektivnost.

Kvadrat amplitude frekvencijske karakteristike niskopropusnog Butterworthovog filtra definiramo pomoću izraza

$$|H(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \nu^{2n}}. \quad (11)$$

Iz vrijednosti frekvencijske karakteristike, odnosno gušenja na rubu područja propuštanja i na rubu područja gušenja računamo parametar  $\varepsilon$  i red filtra

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1, \quad (12)$$



$$n = \frac{\log[(10^{0.1A_s} - 1)/\varepsilon^2]}{2\log(v_s)}, \quad (13)$$

pri čemu je  $A_s$  najmanje gušenje u pojasu gušenja,  $A_p$  najveće gušenje u području propuštanja, a  $v_s$  rub područja gušenja NPP-a. Ukoliko računajući red filtra pomoću prethodne formule dobijemo decimalni broj, obavezno ga zaokružujemo na idući cijeli broj. Tako ćemo, na primjer, ako dobijemo rezultat  $n = 2.11$  kao rješenje uzeti  $n=3$ .

Polovi Butterworthovog filtra leže na kružnici. Položaj polova Butterworthovog filtra određujemo na sljedeći način:

1. Računamo radijus kruga na kojem leže polovi:

$$R = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}} \quad (14)$$

2. Računamo kutove u odnosu na  $j\omega$ -os pod kojima leže polovi :

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Ukoliko je filter 2. reda imat ćemo 4 kuta, ukoliko je 3. reda imat ćemo 6 kutova itd. Važno je uočiti kako kutovi  $\theta_k$  ne mogu biti 0 pa polovi ne mogu biti na imaginarnoj osi. Za neparne  $n$  jedan kut iznosi  $\pi/2$  pa će jedan pol biti na realnoj osi. Za parne  $n$ , nema polova na realnoj osi.

3. Određujemo položaj polova iz izraza

$$p_k = -R \sin \theta_k + j R \cos \theta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Iz dobivenih polova možemo odrediti nazivnik prijenosne funkcije

$$Q_p(s) = \prod_{k=1}^n (s - p_k). \quad (17)$$

Konačno, prijenosna funkcija Butterworthovog filtra glasi

$$H(s) = \frac{K}{Q_p(s)}, \quad (18)$$

pri čemu je:

$$K = Q_p(0). \quad (19)$$

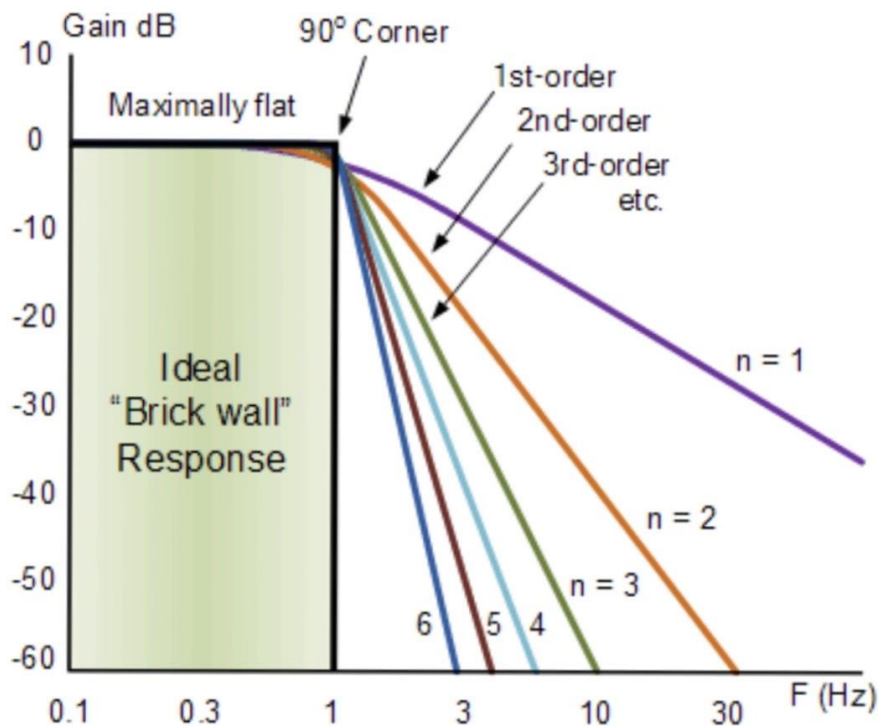
Ako za primjer uzmemo  $n=3$ , dobivamo:

$$K = R^3, \quad (20)$$

$$Q_p(s) = s^3 + 2Rs^2 + 2R^2s + R^3, \quad (21)$$

$$H(s) = \frac{K}{Q_p(s)} = \frac{R^3}{s^3 + 2Rs^2 + 2R^2s + R^3}. \quad (22)$$

Na slici 10. vidimo detaljniji prikaz onoga što smo spomenuli o slici 8. Dakle, aproksimacijom filtra pokušavamo imitirati odziv idealnog filtra. Što je red aproksimiranog filtra veći, to je odziv sličniji idealnom. Ako promotrimo sliku, možemo vidjeti kako aproksimirani filter, umjesto *cutoff* frekvencije kao idealni filter, ima prijelazno područje. S obzirom da se radi o odzivu Butterworthovog filtra, vidimo kako je prijelazni pojas dosta širok čak i kod filtra višeg reda, ali zauzvrat imamo vrlo precizno aproksimiran propusni i nepropusni pojas.



Slika 10. Frekvencijski odziv Butterworthovog filtra ovisno o redu filtra [5]

### 3.3.2. Čebiševljeva aproksimacija

Čebiševljeva aproksimacija dobila je ime po ruskom matematičaru Pafnutyju Chebyshev. Čebiševljeva aproksimacija, kao i Butterworthova aproksimacija ima prijenosnu funkciju koja ovisi o polovima. Za razliku od Butterworthove aproksimacije, Čebiševljeva aproksimacija dopušta varijacije odnosno valovitost u propusnom pojasu filtra. Također, prijelazni pojas Čebiševljevog filtra je puno strmiji od prijelaznog pojasa Butterworthovog filtra. Iz tog razloga, Čebiševljevi filtri nižih redova su precizniji, odnosno sličniji idealnim nego Butterworthovi filtri istih redova. Fazni odziv Čebiševljevog filtra nije linearan kao Butterworthov, što znači da će faza Čebiševljevog filtra biti deformirana.

Kvadrat amplitude frekvencijske karakteristike Čebiševljevog filtra dan je izrazom

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(v)}, \quad (23)$$

pri čemu je  $T_n(v)$  Čebiševljev polinom. Čebiševljev polinom jednak je [3] :

$$T_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1}(\omega)) \text{ kada je } 0 \leq \omega \leq 1, \quad (24)$$

$$T_n(\omega) = \cosh(n \cosh^{-1}(\omega)) \text{ kada je } \omega > 1. \quad (25)$$

Svojstva Čebiševljevog polinoma su **[4]** :

$$1. T_0(\omega) = 1 \quad (26)$$

$$2. T_1(\omega) = \omega \quad (27)$$

3. za svaki  $n$ :

$$0 \leq |T_n(\omega)| \leq 1 \quad \text{kada je} \quad 0 \leq |\omega| \leq 1 \quad (28)$$

$$|T_n(\omega)| > 1 \quad \text{kada je} \quad |\omega| > 1 \quad (29)$$

4. za svaki  $n$ :

$$T_n(1) = 1, \quad (30)$$

5.  $T_n(\omega)$  je paran ako je red filtra neparan i obrnuto

6.  $|T_n(\omega)|$  monotono raste kada je  $|\omega| > 1$

7.  $|T_n(0)| = 0$ , kada je  $n$  neparan

8.  $|T_n(0)| = 1$ , kada je  $n$  paran

Iz prigušenja na rubu područja propuštanja, kao i kod Butterworthovog filtra, računamo faktor valovitosti pomoću izraza

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1, \quad (31)$$

a iz prigušenja na rubu područja gušenja red Čebiševljevog filtra

$$n = \frac{\cosh^{-1}[\sqrt{(10^{0.1A_s} - 1)/\varepsilon^2}]}{\cosh^{-1}(v_s)}, \quad (32)$$

pri čemu je  $A_s$  najmanje gušenje u pojasu gušenja,  $A_p$  najveće gušenje u području propuštanja, a  $v_s$  rub pojasa gušenja. Također, kao i kod određivanja reda Butterworthovog filtra, zaokružujemo dobiveni broj na prvi veći cijeli broj.

Polovi Čebiševljevog filtra leže na elipsi. Položaj polova Čebiševljevog filtra određujemo na sljedeći način:

1. Pronalazimo kutove u odnosu na  $j\omega$ -os na kojima leže polovi :

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (33)$$

2. Određujemo položaj polova iz izraza:

$$p_k = -\sin \theta_k \sinh \alpha + j \cos \theta_k \cosh \alpha, \quad (34)$$

pri čemu je:

$$\alpha = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (35)$$

Nazivnik prijenosne funkcije,  $Q_p(s)$ , dan je izrazom

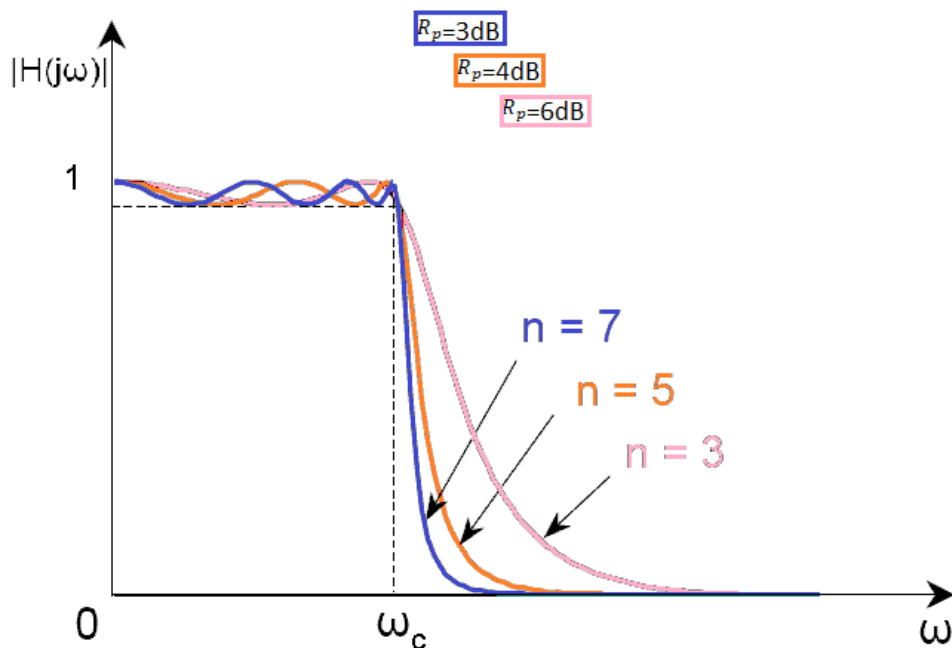
$$Q_p(s) = \prod_{k=1}^n (s - p_k). \quad (36)$$

Konačna prijenosna funkcija Čebiševljevog filtra dana je izrazom

$$H_p(s) = \frac{K}{Q_p(s)}, \quad (37)$$

gdje je:

$$K = \begin{cases} Q_p(0)/\sqrt{1 + \varepsilon^2}, & \text{kada je } n \text{ paran} \\ Q_p(0), & \text{kada je } n \text{ neparan.} \end{cases} \quad (38)$$

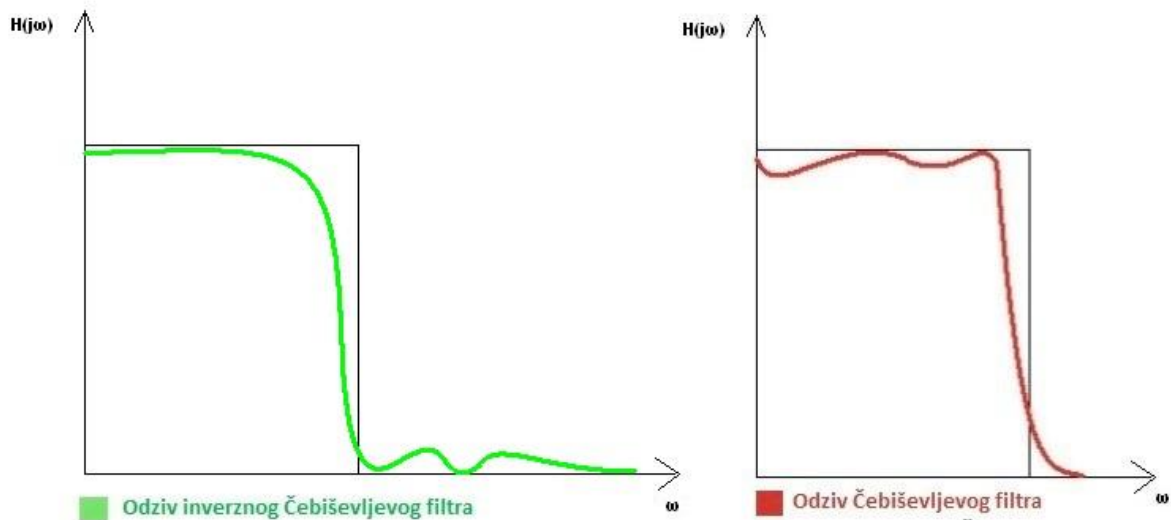


Slika 11. Frekvencijski odziv Čebiševljevog filtra

Uspoređivanjem slike 10. i slike 11. možemo najbolje uočiti razliku između Butterworthovog i Čebiševljevog filtra. Tako na slici 11. vidimo strmi, odnosno uski, prijelazni pojas Čebiševljevog filtra, za ralik od Butterworthovog prijelaznog pojasa koji je, i u višim redovima filtra, širok. Isto kao i kod Butterworthovog, što je red filtra viši, to je prijelazno područje uže. Također, vidimo deformaciju, odnosno valovitost propusnog pojasa koju smo spomenuli. Što je valovitost filtra veća, to je prijelazni pojas strmiji i obrnuto.

### 3.3.3. Inverzna Čebiševljeva aproksimacija

Čebiševljevom aproksimacijom osiguravamo strmi prijelaz između propusnog i nepropusnog pojasa, ali zauzvrat dobivamo valovitost odnosno šumove u području propuštanja. Inverznom Čebiševljevom aproksimacijom zadržavamo svojstvo strmine prijelaznog pojasa, ali umjesto valovitosti u pojasu propuštanja, događa se valovitost u pojasu gušenja, dok pojas propuštanja ostaje monoton. Na slici 12. možemo vidjeti razliku ponašanja Čebiševljevog i inverznog Čebiševljevog filtra.



Slika 6. Usporedba frekvencijskog odziva Čebiševljevog i inverznog Čebiševljevog filtra

Kvadrat amplitude frekvencijske karakteristike inverznog Čebiševljevog filtra zadan je sljedećim izrazom:

$$|H(\nu)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_n^2(1/\nu)}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(1/\nu)}, \quad (39)$$

pri čemu je  $T_n(1/\nu)$  Čebiševljev polinom.

Kod inverzne Čebiševljeve aproksimacije, za razliku od prethodno navedenih, faktor valovitosti ne određujemo iz prigušenja na rubu područja propuštanja, već iz prigušenja na rubu područja gušenja:

$$\varepsilon^{-2} = 10^{0.1A_s} - 1, \quad (40)$$

a red inverznog Čebiševljevog filtra određujemo iz gušenja na rubu područja propuštanja:

$$n = \frac{\cosh^{-1} \left[ \sqrt{\varepsilon^{-2} / (10^{0.1A_p} - 1)} \right]}{\cosh^{-1}(1/\nu_p)}, \quad (41)$$

gdje je iznimno za inverzni Čebiševljev filter  $\nu_p = \frac{f_p}{f_s}$ , dok je  $\nu_s = 1$  rad/s.

Prijenosnu funkciju inverznog Čebiševljevog prototipa određujemo na sljedeći način

1. Pronalazimo kutove u odnosu na  $j\omega$ -os na kojima leže polovi :

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (42)$$

2. Određujemo polove prijenosne funkcije iz izraza:

$$\frac{1}{p_k} = -\sin \theta_k \sinh \alpha + j \cos \theta_k \cosh \alpha, \quad (43)$$

pri čemu je:

$$\alpha = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (44)$$

3. Određujemo nule prijenosne funkcije iz izraza:

$$z_k = \pm j \cos \theta_k \cosh \alpha = \pm j \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, \text{int}(n/2). \quad (45)$$

pri čemu je:

$$\alpha = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (46)$$

Konjugirani parovi nula daju faktore oblika  $s^2 + \omega_k^2$ .

Nazivnik prijenosne funkcije,  $Q_p(s)$ , dan je izrazom:

$$Q_p(s) = \prod_{k=1}^n (s - p_k), \quad (47)$$

a brojnik,  $P_p(s)$ , izrazom:

$$P_p(s) = \prod_{k=1}^{\text{int}(n/2)} (s^2 + \omega_k^2). \quad (48)$$



Konačno, prijenosna funkcija glasi:

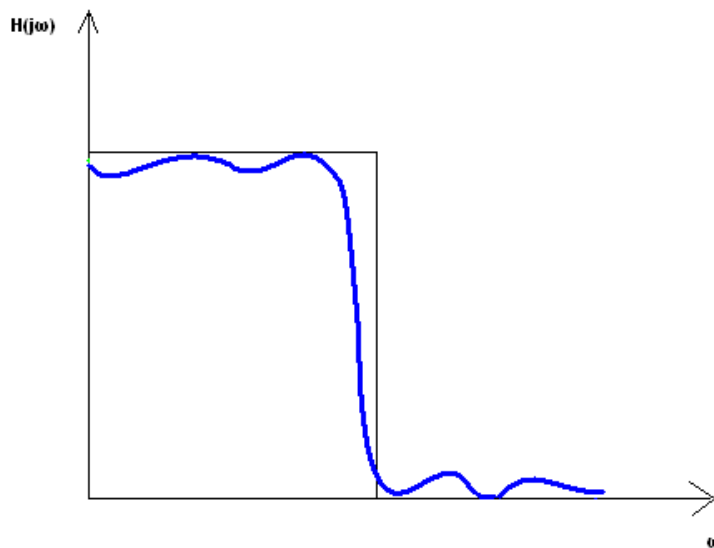
$$H_p(s) = K \frac{P_p(s)}{Q_p(s)}, \quad (49)$$

gdje je:

$$K = \frac{Q(0)}{P(0)}. \quad (50)$$

### 3.3.4. Eliptična aproksimacija

Za razliku od prošlih opisanih vrsta aproksimacija, u kojima je barem jedan od pojaseva bio monoton, eliptična aproksimacija daje valovitost u pojasu propuštanja ali i u pojasu gušenja kao što to vidimo na slici 13. Dakle, odziv eliptičnog filtra je valovit u oba pojasa. Također, kao i kod Čebiševljeve i inverzne Čebiševljeve aproksimacije, prijelazni pojas između pojasa gušenja i pojasa propuštanja je strm i monoton.



Slika 7. Odziv eliptičnog filtra

Zbog složenosti eliptične metode aproksimacije, za potrebe ovog rada nećemo ju koristiti.

### 3.4. Transformacija prijenosne funkcije

Kada vršimo proces aproksimacije, dobivamo normirani filter odnosno NPP. Da bismo do kraja projektirali filter potrebno je izvršiti transformaciju dobivene prijenosne funkcije. Ovisno o tome kakav nam je filter potreban, koristimo jednu od sljedećih transformacija:

- **NPP → NP**

Transformacija prijenosne funkcije NPP-a u prijenosnu funkciju NP filtra

$$s \rightarrow \frac{s}{2\pi f_p}, \text{ pri čemu je } f_p \text{ frekvencija ruba pojasa propuštanja NP filtra}$$

- **NPP → VP**

Transformacija prijenosne funkcije NPP-a u prijenosnu funkciju VP filtra

$$s \rightarrow \frac{2\pi f_p}{s}, \text{ pri čemu je } f_p \text{ frekvencija ruba pojasa propuštanja VP filtra}$$

- **NPP → PP**

Transformacija prijenosne funkcije NPP-a u prijenosnu funkciju PP filtra

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}, \text{ pri čemu je } \omega_0 \text{ geometrijska sredina rubova pojasa propuštanja } \omega_2 \text{ i } \omega_3, \omega_2 \omega_3 = \omega_0^2, \text{ a } B \text{ je širina pojasa propuštanja, } B = \omega_3 - \omega_2.$$

- **NPP → PB**

Transformacija prijenosne funkcije NPP-a u prijenosnu funkciju VP filtra

$$s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}, \text{ pri čemu je } \omega_0 \text{ geometrijska sredina rubova pojasa propuštanja } \omega_1 \text{ i } \omega_4, \omega_1 \omega_4 = \omega_0^2, \text{ a } B \text{ je širina pojasa propuštanja, } B = \omega_1 - \omega_4.$$

#### 4. PRIMJENA TRANSFORMACIJA NA ZADANI FILTAR

Kako bi konkretno mogli uočiti određene prednosti i mane, te razlike između filtara projektiranih različitim metodama aproksimacije, u ovom poglavlju ponudit ćemo izračune prijenosnih funkcija niskopropusnog filtra koristeći Butterworthovu, Čebiševljevu i inverznu Čebiševljevu aproksimaciju. Kao početne specifikacije niskopropusnog filtra koristit ćemo sljedeće:

- $f_p = 4$  kHz
- $f_s = 8$  kHz
- $A_p = 3$  dB
- $A_s = 20$  dB

Dakle, za svaku od aproksimacija izračunat ćemo granične frekvencije  $\nu_s$  i  $\nu_p$ , red filtra  $n$  i parametar valovitosti  $\varepsilon$ . S obzirom na dobivene vrijednosti, odredit ćemo prijenosnu funkciju te napraviti transformaciju u niskopropusni filter. Nakon toga, usporedit ćemo razlike dobivene korištenjem različitih metoda aproksimacije.

##### 4.1. Butterworthova aproksimacija

Kao što smo ranije definirali rub pojasa propuštanja iznosi  $\nu_p = 1$  rad/s, dok je rub pojasa gušenja  $\nu_s = \frac{2\pi f_p}{2\pi f_s} = 2$  rad/s. Za faktor valovitosti dobivamo  $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1 A_p} - 1} = 0.998$ , a red filtra iznosi  $n = \frac{\log \sqrt{(10^{0.1 A_s} - 1)/\varepsilon^2}}{\log \nu_s} = 3.32$  što zaokružujemo na 4. Iz dobivenih vrijednosti možemo odrediti polumjer kružnice na kojoj leže polovi  $R = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}} = 1$  te kutove u odnosu na y-os:

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \rightarrow \theta_1 = 22.5^\circ, \theta_2 = 67.5^\circ, \theta_3 = 112.5^\circ, \theta_4 = 157.5^\circ \quad (51)$$

što rezultira sljedećim polovima :

$$p_1 = p_4^* = -R \sin \theta_1 + j \cos \theta_1 = -0.383 + j 0.924 \quad (52)$$

$$p_2 = p_3^* = -R \sin \theta_2 + j \cos \theta_2 = -0.924 + j 0.383 \quad (53)$$

i nazivnikom prijenosne funkcije:

$$\begin{aligned} Q_p(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4) \\ &= s^4 + 2.614 s^3 + 3.416 s^2 + 2.614 s + 1. \end{aligned} \quad (54)$$

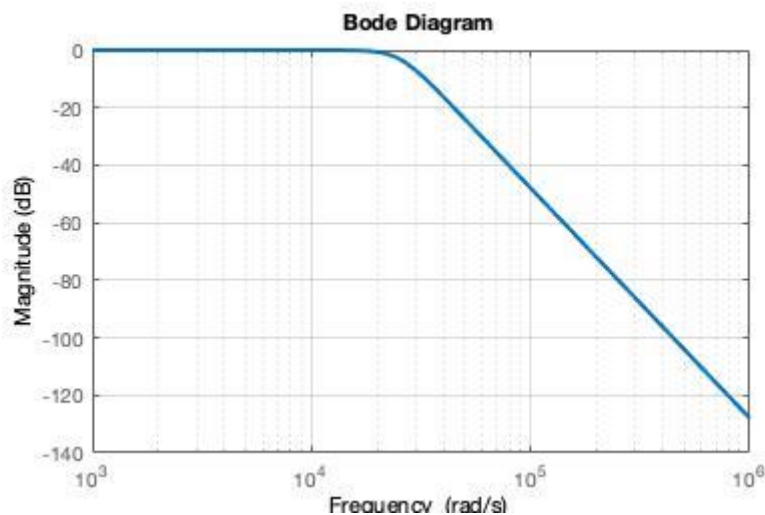
Konačno, prijenosna funkcija NPP-a glasi

$$H_p(s) = \frac{K}{Q_p(s)} = \frac{1}{s^4 + 2.614 s^3 + 3.416 s^2 + 2.614 s + 1}, \quad (55)$$

a nakon transformacije, dobivamo prijenosnu funkciju NP filtra

$$H(s) = \frac{3.99 \cdot 10^{17}}{s^4 + 6.57 \cdot 10^4 s^3 + 2.158 \cdot 10^9 s^2 + 4.15 \cdot 10^{13} s + 3.99 \cdot 10^{17}}. \quad (56)$$

Na slici 13. prikazana je amplituda frekvencijske karakteristike dobivenog filtra.



Slika 13. Amplitudna karakteristika NP filtra dobivena korištenjem Butterworthove aproksimacije

#### 4.2. Čebiševljeva aproksimacija

Definirani rub pojasa propuštanja iznosi  $\nu_p = 1$  rad/s, dok je rub pojasa gušenja  $\nu_s = \frac{2\pi f_p}{2\pi f_s} = 2$  rad/s. Za faktor valovitosti dobivamo, kao i kod Butterworthove aproksimacije,

$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1 A_p} - 1} = 0.998$ , a red filtra iznosi  $n = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{(10^{0.1 A_s} - 1)/\varepsilon^2}}{\cosh^{-1} \nu_s} = 2.27$  što

zaokružujemo na 3. Iz dobivenih vrijednosti možemo odrediti parametar elipse na kojoj leže polovi  $\alpha = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) = 0.294$  te kutove  $\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \rightarrow \theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 90^\circ, \theta_3 = 150^\circ$ . To daje polove:

$$p_1 = p_3^* = -\sin \theta_1 \sinh \alpha + j \cos \theta_1 \cosh \alpha = -0.149 + j 0.9 \quad (57)$$

$$p_2 = -\sin \theta_2 \sinh \alpha + j \cos \theta_2 \cosh \alpha = -0.298 \quad (58)$$

i nazivnik prijenosne funkcije

$$Q_p(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 + 0.596 s^2 + 0.921 s + 0.248 \quad (59)$$

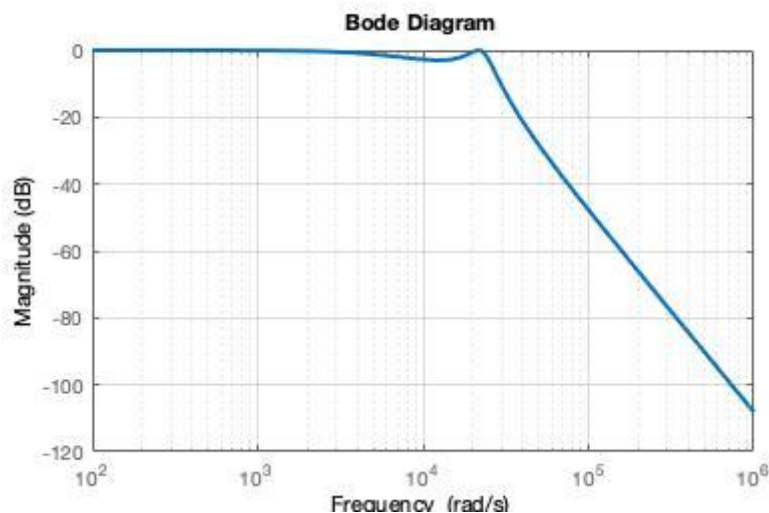
Konačno, prijenosna funkcija NPP-a glasi:

$$H_p(s) = \frac{K}{Q_p(s)} = \frac{0.248}{s^3 + 0.596 s^2 + 0.921 s + 0.248}, \quad (60)$$

a nakon transformacije, dobivamo prijenosnu funkciju NP filtra

$$H(s) = \frac{3.937 \cdot 10^{12}}{s^3 + 14979.11 s^2 + 581753961.8 s + 3.937 \cdot 10^{12}} \quad (61)$$

Na slici 14. prikazana je amplituda frekvencijske karakteristike dobivenog filtra.



Slika 14. Amplitudna karakteristika NP filtra dobivena korištenjem Čebiševljeve aproksimacije

### 4.3. Inverzna Čebiševljeva aproksimacija

Za razliku od prethodne dvije aproksimacije, ovdje rub pojasa gušenja iznosi  $v_s = 1$  rad/s, dok je rub pojasa propuštanja  $v_p = \frac{2\pi f_s}{2\pi f_p} = 0.5$  rad/s. Faktor valovitosti ovdje

iznosi  $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{10^{0.1 A_s - 1}}} = 0.1$ , a red filtra je  $n = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\varepsilon^{-2}/10^{0.1 A_p - 1}}}{\cosh^{-1} \frac{1}{v_p}} = 2.27$  što kao i u

prethodnom slučaju zaokružujemo na 3. Ponovno računamo parametre iz kojih možemo odrediti polove:  $\alpha = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} = 0.99$  i  $\Theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \rightarrow \Theta_1 = 30^\circ, \Theta_2 = 90^\circ, \Theta_3 = 150^\circ$ , a sami polovi glase

$$p_1 = p_3^* = \frac{1}{-\sin \Theta_1 \sinh \alpha + j \cos \Theta_1 \cosh \alpha} = \frac{1}{-0.585 + j 1.334} \quad (62)$$

$$p_2 = \frac{1}{-\sin \Theta_2 \sinh \alpha + j \cos \Theta_2 \cosh \alpha} = -0.85. \quad (63)$$

Za inverznu Čebiševljevu aproksimaciju još moramo odrediti i nule, kojih u slučaju filtra 3. reda ima 2, odnosno jedan kompleksno konjugirani par

$$z_1 = j\omega_1 = \pm j \cos \Theta_1 \cdot \cosh \alpha = \pm j 1.32. \quad (64)$$

Brojnik i nazivnik prijenosne funkcije NPP-a su redom

$$P_p(s) = s^2 + \omega_1^2 = s^2 + 1.74 \quad (65)$$

$$Q_p(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 + 1.41 s^2 + 0.95 s + 0.4 \quad (66)$$

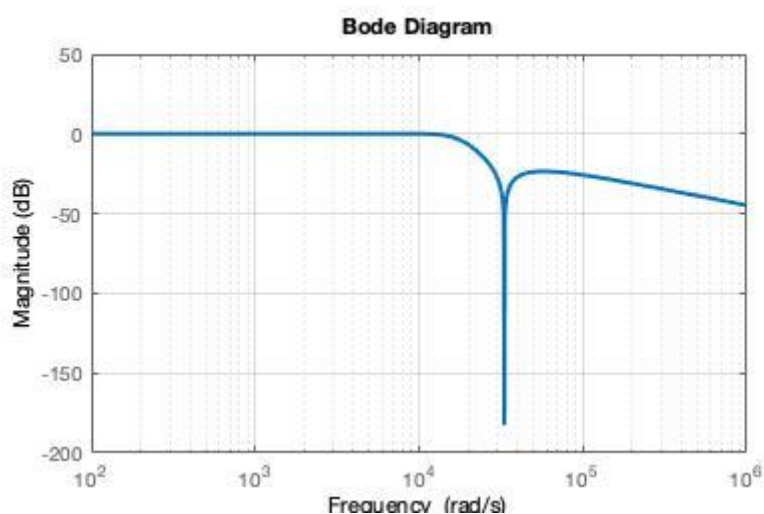
a prijenosna funkcija je

$$H_p(s) = \frac{K \cdot p_p(s)}{Q_p(s)} = \frac{0.23 (s^2 + 1.74)}{s^3 + 1.41 s^2 + 0.95 s + 0.4}. \quad (67)$$

Nakon transformacije, dobivamo prijenosnu funkciju NP filtra

$$H(s) = \frac{5780.53 s^2 - 6.5 \cdot 10^{12}}{s^3 + 35437.17 s^2 + 600071947.6 s + 6.35 \cdot 10^{12}}, \quad (68)$$

čija je amplituda frekvencijske karakteristike dana na slici 15.



Slika 15. Amplitudna karakteristika NP filtra dobivena korištenjem inverzne Čebiševljeve aproksimacije

#### 4.4. Usporedba rezultata

Kao što vidimo iz Tablice 2, najuži prijelazni pojas pruža inverzni Čebiševljev filter ali ima i najmanji faktor valovitosti. Razlike Butterworthovog i Čebiševljevog filtra za sada su samo u redu filtra. Uz zadane specifikacije, Čebiševljev, kao i inverzni Čebiševljev su filteri trećeg reda, dok je Butterworthov filter četvrtog reda. Onaj filter koji je najmanjeg reda je najčešće najekonomičniji, odnosno najjeftinije ga je projektirati. Dakle, ukoliko je cijena filtra bitan faktor pri odabiru metode aproksimacije, najbolji izbor bila bi Čebiševljeva ili inverzna Čebiševljeva aproksimacija, dok bi Butterworthovom aproksimacijom dobili filter kojeg je skuplje realizirati.

Tablica 2. Usporedba vrijednosti filtra

	$\nu_p$	$\nu_s$	$\varepsilon$	$n$
Butterwerthova aproksimacija	1 rad/s	2 rad/s	0.998	4
Čebiševljeva aproksimacija	1 rad/s	2 rad/s	0.998	3
Inverzna Čebiševljeva aproksimacija	$\frac{1}{2}$ rad/s	1 rad/s	0.1	3

Tablica 3. Usporedba prijenosnih funkcija

	Prijenosna funkcija niskopropusnog filtra
Butterworthova aproksimacija	$H_p(s) = \frac{3.99 \cdot 10^{17}}{s^4 + 6.57 \cdot 10^4 s^3 + 2.158 \cdot 10^9 s^2 + 4.15 \cdot 10^{13} s + 3.99 \cdot 10^{17}}$
Čebiševljeva aproksimacija	$H_p(s) = \frac{3.937 \cdot 10^{12}}{s^3 + 14979.11 s^2 + 581753961.8 s + 3.937 \cdot 10^{12}}$
Inverzna Čebiševljeva aproksimacija	$H_p(s) = \frac{5780.53 s^2 - 6.5 \cdot 10^{12}}{s^3 + 35437.17 s^2 + 600071947.6 s + 6.35 \cdot 10^{12}}$

Što se tiče kompleksnosti računa, odnosno određivanja prijenosne funkcije, u ovom slučaju je najjednostavniji postupak Čebiševljeve aproksimacije, što možemo vidjeti i u Tablici 3. uspoređivanjem oblika prijenosnih funkcija. Ukoliko je jednostavnost jedan od glavnih uvjeta pri odabiru filtra, u ovom slučaju to bi bio Čebiševljev filter. Ako govorimo o jednostavnosti realizacije analognih filtera, najjednostavnije je realizirati one čija prijenosna funkcija ne sadržava nule, jer je potreban manji broj elemenata za njihovu realizaciju.



## 5. ZAKLJUČAK

U prvim poglavljima ovog rada opisali smo karakteristike idealnog filtra, zaključili da je on kao takav neostvariv te napravili uvod u realne filtre. Kasnije u radu zaključili smo kako realni filtri trebaju težiti karakteristikama idealnog te ponudili postupak projektiranja realnog filtra koristeći različite vrste aproksimacije. U praktičnom dijelu rada, ponudili smo 3 načina projektiranja realnog analognog filtra koristeći tri najkorištenije metode aproksimacije, no i dalje nismo dobili odgovor na pitanje : „Koja je od ovih aproksimacija najbolja?“. Na to pitanje teško je odgovoriti u nekoliko rečenica, a konkretan odgovor zapravo i ne postoji. Usporedbom rješenja dobivenih različitim metodama aproksimacije, uvidjeli smo neke razlike, ali one nisu nužno određivale prednosti ili mane jedna nad drugom. Da bi na prethodno pitanje korektno odgovorili, trebamo dobro razmisliti koji su nam prioriteti pri odabiru filtra, jer kao što smo već rekli, idealan filter ne postoji. To znači da moramo dozvoliti određenu grešku odnosno odstupanje, kako bi dobili što kvalitetniju prijenosnu karakteristiku. Kao zaključak možemo reći da najbolja, odnosno najtočnija aproksimacija ne postoji, ali ono što postoji je najbolji izbor metode aproksimacije s obzirom na to u kakvoj se situaciji nalazimo, odnosno koje karakteristike filtra želimo dobiti.

## LITERATURA

[1] Ambardar A.: *Analog and Digital Signal Processing*, Brooks/Cole Publishing Company (1995.), 053495409X

[2] Ambardar A.: *Analog and Digital Signal Processing*, Brooks/Cole Publishing Company (1995.), 053495409X

[3] Stensby J.: *Chebyshev Filters*, <http://www.ece.uah.edu/courses/ee426/Chebyshev.pdf>, pristupljeno, 15.6.2020.

[4] [http://dos.zesoi.fer.hr/predavanja/ppt/dos\\_2002\\_06.ppt](http://dos.zesoi.fer.hr/predavanja/ppt/dos_2002_06.ppt), pristupljeno, 15.6.2020.

[5] [https://www.electronics-tutorials.ws/filter/filter\\_8.html](https://www.electronics-tutorials.ws/filter/filter_8.html), pristupljeno, 15.6.2020.

[6] Thede L.: *Practical Analog and Digital Filter Design*, Artech House, Inc. (2004.)

[7] Vujović I.: *Obrada i analiza signala*, [http://brod.pfst.hr/~ivujovic/stare\\_stranice/pdf\\_zip\\_word/oas\\_ver\\_net.pdf](http://brod.pfst.hr/~ivujovic/stare_stranice/pdf_zip_word/oas_ver_net.pdf), pristupljeno 15.06.2020.

[8] Paarman, D. L.: *Design and Analysis of Analog Filters* : <https://link.springer.com/book/10.1007/b100752>, pristupljeno 17.6.2020.

[9] Singhal A.: *Filter Design: Analysis and Review*, <https://core.ac.uk/download/pdf/26024932.pdf>, pristupljeno, 17.6.2020.

[10] <http://dsp.etfbl.net/filtri/af/05%20Glava%20%20Metodi%20aproksimacije%20amplitudnih%20i%20faznih%20karakteristika%20analognih%20filtara.pdf>, pristupljeno 17.6.2020.

## POPIS SLIKA

Slika 1. Frekvencijski odziv niskopropusnog filtra .....	3
Slika 2. Frekvencijski odziv visokopropusnog filtra .....	4
Slika 3. Frekvencijski odziv pojasnopropusnog filtra .....	5
Slika 4. Frekvencijski odziv pojasne brane .....	6
Slika 5. Niskopropusni RC filter .....	7
Slika 6. Raspored polova i nula prijenosne funkcije .....	10
Slika 7. Karakteristična područja i frekvencije NP filtra .....	11
Slika 8. Odziv Butterworthove aproksimacije u usporedbi sa odzivom realnog filtra .....	13
Slika 9. Frekvencijski odziv Butterworthovog filtra ovisno o redu filtra [5].....	17
Slika 10. Frekvencijski odziv Čebiševljevog filtra .....	20
Slika 11. Usporedba frekvencijskog odziva Čebiševljevog i inverznog Čebiševljevog filtra ...	21
Slika 12. Odziv eliptičnog filtra .....	23

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Određivanje frekvencija ruba pojasa gušenja za NPP .....	12
Tablica 2. Usporedba vrijednosti filtra .....	29
Tablica 3. Usporedba prijenosnih funkcija .....	30