PRIMJENA MJERA SREDNJIH VRIJEDNOSTI KOD IZRAČUNA PLAĆA

Zovko, Sara

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

POSLOVNI ODJEL

STRUČNI STUDIJ UGOSTITELJSTVA

Sara Zovko

Primjena mjera srednjih vrijednosti kod izračuna plaća

ZAVRŠNI RAD

Karlovac, 2020.

Sara Zovko

PRIMJENA MJERA SREDNJIH VRIJEDNOSTI KOD IZRAČUNA PLAĆA

ZAVRŠNI RAD

Veleučilište u Karlovcu

Poslovni odjel

Stručni studij Ugostiteljstva

Kolegij: Poslovna statistika

Mentor: Marin Maras, dipl.ing.math.

Komentor: Lahorka Halmi, dipl.oec.

Karlovac, 2020.

ZAHVALA

Veliku zahvalnost dugujem, prije svega, mojoj obitelji, posebice baki i djedu koji su mi bili neizmjerna podrška tijekom cijelog školovanja i koji su uvijek vjerovali u mene. Hvala mami i tati koji su me usmjerili na pravi put. Također, zahvaljujem se i mom mentoru, profesoru Marasu, na pomoći i savjetima tijekom pisanja ovog rada. Naravno, hvala i ostalim nastavnicima na pruženom znanju u ove tri godine. Na kraju, najviše hvala mojoj kolegici i divnoj prijateljici Ivoni koja me gurala kada je to bilo najviše potrebno, i bez čije pomoći ne bih bila tu gdje jesam. Hvala vam!

SAŽETAK

Statistika je znanstvena disciplina koja za realizaciju ciljeva prikuplja, selektira, prezentira, grupira, analizira informacije i interpretira rezultate provedene analize. Realizacija ciljeva statistike vrši se raznim statističkim metodama i tehnikama.

Dijeli se na deskriptivnu (opisnu statistiku) i inferencijalnu statistiku. Srednja vrijednost je konstanta kojom se predstavlja niz varijabilnih podataka. Zove se i mjera centralne tendencije jer se oko nje gomilaju podaci numeričkog niza.

U ovom završnom radu dan je pregled svih srednjih vrijednosti. Na primjerima je objašnjena primjena srednjih vrijednosti te su prikazani rezultati statističke obrade. Na temelju dobivenih rezultata moguće je detaljno analizirati podatke te ih međusobno usporediti. Prikazan je i konkretan primjer na izračunu plaća iz kojeg se vidi važnost poznavanja statistike u svakodnevnom životu.

Ključne riječi : statistika, statističke metode, srednja vrijednost

SUMMARY

Statistics is a scientific discipline that collects, selects, presents, groups, analyzes information and interpret the results of the analysis. The realization of statistical goals is done by various statistical methods and techniques.

We divide it into descriptive statistics and into inferential statistics. The mean value is a constant that represents a series of variable data. It is also called the measure of the central tendency because the data of the numerical sequence accumulate around it.

In this final paper, an overview of all mean values is given. The application of mean values is explained on the examples and the results of statistical processing are presented. Based on the obtained results, it is possible to analyze the data in detail and compare them with each other. A concrete example on the calculation of salaries is presented, which shows the importance of knowing statistics in everyday life.

Keywords: statistics, statistical methods, mean value

SADRŽAJ

1. UVOD......1

1.1. Predmet i cilj rada 1

1.2. Izvori podataka i metode prikupljanja 1

1.3. Struktura rada......1

2. SREDNJE VRIJEDNOSTI 2

2.1. Aritmetička sredina 3

2.2. Geometrijska sredina......8

2.3. Harmonijska sredina......12

2.4. Mod 14

2.5. Medijan......18

2.6. Kvantili 22

3. ZAKLJUČAK......31

POPIS LITERATURE 32

POPIS TABLICA 33

POPIS SLIKA......33

1. UVOD

1.1. Predmet i cilj rada

Predmet ovog završnog rada je prikaz i izračun mjera srednjih vrijednosti. U radu su navedeni i objašnjeni pojmovi potpunih i položajnih srednjih vrijednosti, te njihovo izračunavanje na primjeru plaća. Cilj rada je izraditi pregled srednjih vrijednosti, te ih prikazati na konkretnim primjerima.

1.2. Izvori podataka i metode prikupljanja

Izvori podataka za mjere srednje vrijednosti su stručne knjige i članci te internetske stranice. Podaci pri objašnjavanju mjera srednjih vrijednosti nemaju veze sa stvarnim događajima, već su akademski primjeri. Na kraju rada napravljena je primjena za plaće RH prema podacima s Državnog zavoda za statistiku.

1.3. Struktura rada

Rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju dan je uvod u rad, a u drugom su navedene i opisane srednje vrijednosti, te prikazane na primjeru plaća. Naposljetku slijedi zaključak i popis literature, slika i tablica.

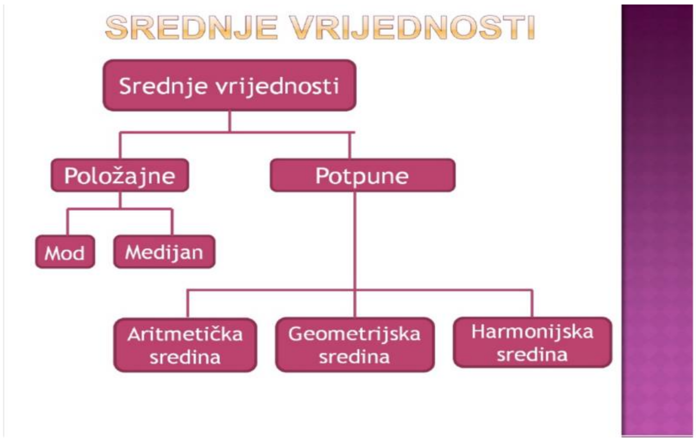
2. SREDNJE VRIJEDNOSTI

Srednja vrijednost je konstanta kojom se predstavlja niz varijabilnih podataka.[1] Zove se i mjera centralne tendencije jer se oko nje gomilaju podaci numeričkog niza. Centralna tendencija je težnja k okupljanju podataka oko jedne centralne vrijednosti, odnosno brojčana vrijednost koja reprezentira skupinu rezultata u slučajevima kada rezultati imaju tendenciju grupiranja oko neke vrijednosti.

Njihova uloga je da istaknu onu veličinu koja je za sve njih karakteristična i koja može služiti kao sredstvo za uspoređivanje raznih statističkih nizova. Postoji više vrsta srednjih vrijednosti. Dijele se na potpune i položajne. Potpune srednje vrijednosti su: harmonijska, geometrijska i aritmetička. Računaju se samo za numerička obilježja. Naziv su dobile zbog činjenice da njihov izračun uvažava sve pojedinačne vrijednosti varijable. Položajne srednje vrijednosti su mod i medijan, budući da je njihova vrijednost određena položajem unutar numeričkog niza.

Prema Šošiću i Serdaru (1995) "svaka je srednja vrijednost uopćavanje informacija, i trebala bi biti brojčani izraz tipičnih crta skupa podataka". Srednje vrijednosti ima smisla izračunavati samo za varijabilne podatke iste vrste.

Slika 1. Srednje vrijednosti



Izvor: Kurnoga Živadinović, N. Statistika: srednje vrijednosti,, https://pdfslide.net/documents/3-srednje-vrijednosti-za-nastavu.html (20.07.2020.)

[1] Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (20.07.2020.)

2.1. Aritmetička sredina

Aritmetička sredina je najčešće korištena i najvažnija potpuna srednja vrijednost. U pravilu odgovara pojmu prosjeka odnosno prosječne vrijednosti. Predstavlja jednaki dio vrijednosti numeričkog obilježja koji otpada na jednu jedinicu statističkog skupa. Zbroj vrijednosti numeričke varijable n elemenata skupa predstavlja total. Aritmetička sredina je omjer totala i opsega statističkog skupa.

Postoje dva važna svojstva aritmetičke sredine:

- zbroj odstupanja vrijednosti varijable X od njezine aritmetičke sredine je jednak nuli

- zbroj kvadrata odstupanja vrijednosti varijable X od aritmetičke sredine je minimalan

Razlikuje se nekoliko vrsta aritmetičkih sredina. Najpoznatija i najraširenija je jednostavna aritmetička sredina. Za njezino je izračunavanje potrebno zadati konačan niz negrupiranih numeričkih podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tada se jednostavna aritmetička sredina računa pomoću formule [2]:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (1)$$

Primjer 1.

Za 30 zaposlenih u poduzeću X prikupljeni su podaci o godinama starosti i uređeni su po veličini. Oni su iznosili: 19 19 20 20 20 21 22 24 24 25 25 25 28 30 36 36 41 45 53 60. Total iznosi: 19 + 19 + 20 + 20 + 20 + ... + 60 = 593 godine (ukupni broj navršenih godina starosti svih 20 radnika). Aritmetička sredina prema formuli (1), tj. prosječna starost radnika iznosi = $\frac{593}{20} = 29.65$ godina.

Ponderirana ili vagana aritmetička sredina koristi se kad utjecaj svake vrijednosti na aritmetičku sredinu nije jednak. Utjecaj pojedine vrijednosti se iskazuje dodijeljenom

[2] Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (21.07.2020.)

težinom tj. ponderom. Težine se obično označavaju slovom *w*. Veći ponder znači veći utjecaj pripadne vrijednosti na aritmetičku sredinu. Formula glasi:

$$\bar{X} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_k x_k}{w_1 + w_2 + \cdots + w_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i} \quad (2)$$

x_i su različiti modaliteti kvantitativnog obilježja, a w_i pripadajući ponderi.

Za grupirane podatke koristi se također ponderirana aritmetička sredina. Kada se računa složena aritmetička sredina postoje slučajevi kada su modaliteti kvantitativnoga obilježja grupirani u razrede i kada nisu. U slučaju kada su grupirani u razrede, javlja se problem reprezentativne vrijednosti obilježja koja se pojavljuju u jednom razredu, pa se u tom slučaju priklanja nužnoj aproksimaciji uz pomoć razredne sredine. Ona se dobije kao jednostavna aritmetička sredina gornje i donje granice razreda. Ako su x_1, x_2, ..., x_k međusobno različiti modaliteti kvantitativnoga obilježja, a f_1, f_2, ..., f_k njima odgovarajuće apsolutne frekvencije, onda se vagana aritmetička sredina računa pomoću izraza:

$$\bar{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{N}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_{ri} x_i \quad (3)$$

gdje je $f_{ri} = \frac{f_i}{N}$, $i = 1, \dots, k$ je izraz za relativnu frekvenciju, a N je opseg statističkog skupa.

Ako se raspolaže podacima o aritmetičkim sredinama nekoliko osnovnih skupova ($\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}$) kao i njihovim opsezima ($N_1, N_2, \dots, N_k$), aritmetička sredina aritmetičkih sredina računa se kao njihova vagana aritmetička sredina po formuli:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{N_1 \overline{x_1} + N_2 \overline{x_2} + \cdots + N_k \overline{x_k}}{N_1 + N_2 + \cdots + N_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \overline{x_i}}{\sum_{i=1}^{k} N_i} \quad (4)$$

Primjer 2.

Na kolegijima iz Statistike na Veleučilištu u Karlovcu svaki od dva kolokvija pridonose s 40% konačnoj ocjeni, a usmeni ispit 20%. Za pristupiti usmenom ispitu potrebno je barem pola na svakome kolokviju. Kako utvrditi konačnu ocjenu?

Pojedinačni udjeli iskazani u postocima su ponderi, stoga se koristi formula (2). Svaki dio ispita boduje se sa 100 bodova. Ako je na prvom kolokviju ostvareno 70 bodova, na drugom 80 bodova i na usmenom 60 bodova. Konačan broj bodova je:

$$\bar{x} = \frac{70 \cdot 0{,}4 + 80 \cdot 0{,}4 + 60 \cdot 0{,}2}{0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}2} = 72 \text{ boda}$$

Primjer 3.

Potrebno je odrediti prosječnu dob nezaposlenih osoba u RH s obzirom na **tablicu1.**

Tablica 1. Nezaposleni u Republici Hrvatskoj

Navršene godine starosti	**Nezaposleni (u 000) (f_i)**	**Razredna sredina (x_i)**	$x_i \cdot f_i$	**Relativne frekv.(f_{ri})**	$x_i \cdot f_{ri}$
15-24	65,8	20	1316	0,376	7,52
25-49	95,2	37,5	3570	0,544	20,4
50-64	13,2	57,5	759	0,07543	4,3371
65-(84)	0,8	75	60	0,00457	0,3429
UKUPNO	175		5705	1	32,6

Izvor: Rozga A., Grčić B. , Poslovna statistika, Veleučilište u Splitu, 2000., str.58 (28.08.2020.)

Koristeći formulu (3) prosječna dob nezaposlenih osoba u Republici Hrvatskoj približno je $\overline{X} = \frac{5705}{175} = 32{,}6$ godina. Kaže se približno zbog aproksimacije razreda njihovim prosjecima.

Primjer 4.

Zadani su podaci studenata 2. godine studija komunikologije na fakultetu Hrvatskih studija u Zagrebu (akademska godina 2018/2019.) prema broju položenih jednosemestralnih kolegija. Potrebno je izračunati prosječan broj položenih kolegija.

Tablica 2. Podaci studenata druge godine komunikologije

Broj položenih jednosemestralnih kolegija(x_i)	Broj studenata(f_i)
0	5
1	14
2	19
3	23
4	20
5	19
UKUPNO	100

Izvor: izračun autorice (21.07.2020.)

Tablica zamjenjuje niz od 100 numeričkih podataka koji se sastoji od 5 nula, 14 jedinica, 19 dvojki, 23 trojki, 20 četvorki i 19 petica. Budući da je lakše umjesto ukupno 99 operacija zbrajanja izvršiti 6 operacija množenja i 4 operacije zbrajanja, prosječan broj položenih jednosemestralnih ispita računa se kao vagana aritmetička sredina koristeći formulu (3):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{296}{100} = 2{,}96$$

Prosječan broj položenih jednosemestralnih kolegija po jednom studentu približno iznosi 3.

Primjer 5.

U tablici se nalaze podaci o prodaji garnitura namještaja u robnom centru evidentiranih u toku 80 dana. Potrebno je izračunati aritmetičku sredinu.

Tablica 3. Prodaja garnitura sobnog namještaja

Broj garnitura(x_i)	Broj dana(f_i)
1	1
2	5
3	8
4	26
5	19
6	12
7	5
8	4
UKUPNO	**80**

Izvor : Šošić I., Serdar V., , Uvod u statistiku. Školska knjiga – Zagreb, 1995., str. 31 (21.07.2020.)

S obzirom na to da su podaci grupirani, valja upotrijebiti izraz za vaganu sredinu iz formule(3)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{373}{80} = 4{,}6625 \text{ garniture}$$

Aritmetička sredina odnosno prosječna dnevna prodaja je u promatranom vremenu iznosila 4.6625 garnitura. Kao što se vidi, aritmetička sredina poprima ovdje vrijednost koja se ne podudara ni s jednom opaženom vrijednosti numeričke varijable. [3]

Ponekad je ekonomično izvorne vrijednosti numeričke varijable pojednostaviti. Pojednostavljuje se smanjenjem brojčanih vrijednosti, te se time sam postupak računanja ubrzava. To se naziva kodiranje ili transformacija. Postupak glasi:

$$d_i = \frac{x_i - a}{b}, b \neq 0, i = 1,2, \dots, N$$

$$\bar{x} = a + \frac{b}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i d_i \ (5)$$

gdje *a* obično predstavlja vrijednost varijable (razredne sredine) u okolini najvećih frekvencija, a kada su razredi jednakih veličina za *b*≠0 je prikladna veličina razreda: [4]

[3] Šošić I., Serdar V., Uvod u statistiku. Školska knjiga – Zagreb, 1995., str. 39
[4] Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (21.07.2020.)

Primjer 6.

Potrebno je izračunati prosječan promet poduzeća „X“ s obzirom na podatke iz **tablice 4**.

Tablica 4. Trgovačke radnje poduzeća "X" prema ostvarenom mjesečnom prometu

Promet u (000 kn)	**Broj radnji (f_i)**	**Razredne sredine (x_i)**	***di***	***fi ·di***
30-40	2	35	-3	-6
40-50	5	45	-2	-10
50-60	10	55	-1	-10
60-70	12	65	0	0
70-90	10	80	1.5	15
90-110	9	100	3.5	31.5
110-150	2	130	6.5	13
Ukupno	**50**			**33.5**

Izvor: Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (21.07.2020.)

Primjenom formule (5) prosječan promet iznosi približno:

$$\bar{X} = a + \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i d_i = 65 + \frac{10}{50}33{,}5 = 71700 \text{ kn.}$$

2.2. Geometrijska sredina

Pomoću geometrijske sredine izračunava se prosječna stopa promjene, te se primjenjuje u analizi vremenskih nizova. Geometrijska sredina niza brojeva je n-ti korijen iz umnoška njihovih članova. Upotrebljava se samo za pozitivne vrijednosti. Dobiva se tako da se iz umnoška vrijednosti obilježja danog niza izvadi korijen čiji je eksponent jednak broju svih članova niza. Nalazi se između najmanje i najveće vrijednosti niza za koji je izračunata, te je manja od aritmetičke sredine.

Geometrijska sredina negrupiranih numeričkih podataka, odnosno jednostavna geometrijska sredina računa se pomoću izraza:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad (6)$$

Može se zapisati i u logaritamskom obliku: [5]

$$logG = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} logx_i \quad (7)$$

Vagana ili ponderirana geometrijska sredina koristi se za izračunavanje grupiranih podataka. Definira se ovako :

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{f_n}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i}} \quad (8)$$

Pri čemu su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pojedinačne vrijednosti numeričke varijable X s pripadajućim frekvencijama $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Primjer 7.

U **tablici 5.** su prikazane pojedinačne vrijednosti numeričke varijable X. Potrebno je odrediti vrijednost geometrijske sredine.

Tablica 5. Vrijednost numeričke varijable X

X_i	115	120	98	117	134	100	101	95	125	130	116

Izvor: Šošić , I., Primijenjena statistika, Školska knjiga-Zagreb, 2006. (21.07.2020.)

Geometrijska sredina računa se korištenjem formule (6) jer su podaci negrupirani.

$$G = \sqrt[11]{115 \cdot 120 \cdot 98 \cdot 117 \cdot 134 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 95 \cdot 125 \cdot 130 \cdot 116} = 112{,}99$$

Geometrijska sredina danih vrijednosti jednaka je 112.99.[6]

Primjer 8.

Zadana je razdioba studenata 1. godine stručnoga studija računovodstva i financija na Veleučilištu u Piškorevcima dana 20.3.2008. prema broju članova domaćinstva u kojemu žive[8]. Izračunajte geometrijsku sredinu.

[5] Šošić , I., Primijenjena statistika, Školska knjiga-Zagreb, 2006.
[6] Šošić , I., Primijenjena statistika, Školska knjiga-Zagreb, 2006.

Tablica 6. Razdioba studenata prema broju članova domaćinstva

Broj članova domaćinstva(x_i)	**Broj studenata(f_i)**
2	25
3	20
4	30
5	15
6	10
UKUPNO	**100**

Izvor: Kovačić, B.: Poslovna statistika – interna skripta, Visoka poslovna škola PAR, https://bkovacic.weebly.com/uploads/7/4/0/7/7407552/skripta.pdf (25.07.2020.)

Primjenom formule (8) rezultat je: $G = \sqrt[100]{2^{25} \cdot 3^{20} \cdot 4^{30} \cdot 5^{15} \cdot 6^{10}} = 3{,}4194$ članova.

Za **tablicu 3.** u Primjeru 5. aritmetička sredina je 4.6625 garnitura dnevno. Geometrijska sredina iste distribucije određuje se pomoću formule (6) za vaganu sredinu, te iznosi $G = \sqrt[80]{1^1 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 8^4} = 4{,}394$.

Iz rezultata je vidljivo da je geometrijska sredina manja od aritmetičke. One su međusobno jednake samo ako su svi članovi niza međusobno jednaki.

Primjer 9.

Osoba A uložila je 1. siječnja 2001. godine 1.000,00 kn u XY investicijski fond i stanje na računu 1. siječnja pojedine godine izgleda kako je prikazano u tablici. Potrebno je izračunati prosječan kamatni faktor.

Tablica 7. Stanje na računu 1. siječnja pojedine godine

Godina	**Stanje na računu**	**Godina**	**Postotak prinosa (p)**	**Kamatni faktor (r)**
2001	1.000,00	1	7,5%	1,075
2002	1.075,00	2	10,1%	1,101
2003	1.183,58	3	9%	1,09
2004	1.290,10	4	2,30%	1,023
2005	1.319,77	5	8%	1,08
2006	1.425,35			

Izvor: Milun T., Srednje vrijednosti u svakodnevnom životu, https://bib.irb.hr/datoteka/931011.Srednje_vrijednosti_u_svakodnevnom_ivotu_-strucni_rad.pdf, (03.09.2020.)

Uloženih 1.000 kn uz konstantnu godišnju prosječnu stopu prinosa nakon 5 godina treba narasti na 1.425,35 kn. Je li prosječni godišnji prinos geometrijska sredina svih kamatnih prinosa ?

Geometrijska sredina kamatnog faktora r = 1,07345614=$\sqrt[5]{1{,}075 \cdot 1{,}101 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}08}$

.

Odgovarajući postotak faktora r = 7,345614%

$$C_n = C_0 r^n = 1000 \cdot 1{,}07345614^5 = 1425{,}35\ kn$$

Geometrijska sredina predstavlja realan prosječni godišnji prinos uloga od 1.000 kn kroz navedenih 5 godina.[7]

Primjer 10.

Potrebno je izračunati prosječnu godišnju promjenu plaće za podatke iz **tablice 8.**

Tablica 8. Promjena plaća u sektoru obrazovanja

Godina	Prosječna plaća(kn)	Stopa rasta	Kamatni faktor
2000.	3491		
2001.	3688	0.056430822	1.056430822
2002.	3771	0.022505423	1.022505423
2003.	4005	0.062052506	1.062052506
2004.	4224	0.054681648	1.054681648
2005.	4342	0.027935606	1.027935606
2006.	4510	0.038691847	1.038691847
2007.	4784	0.06075388	1.06075388
2008.	5156	0.077759197	1.077759197
2009.	5315	0.030837859	1.030837859
2010.	5356	0.007714017	1.007714017
2011.	5482	0.023525019	1.023525019
2012.	5498	0.002918643	1.002918643
2013.	5484	-0.002546381	0.997453619

Izvor: Državni zavod za statistiku - Republika Hrvatska, www.dzs.hr (22.09.2020.)

[7] Milun T., Srednje vrijednosti u svakodnevnom životu, https://bib.irb.hr/datoteka/931011.Srednje_vrijednosti_u_svakodnevnom_ivotu_-strucni_rad.pdf, (25.07.2020.)

Koristeći podatke DZS za prosječne godišnje plaće sektora obrazovanja za razdoblje 2000.-2013. izračunate su stope promjena s obzirom na prethodna razdoblja te pripadajući kamatni faktori. Primjenom geometrijske sredine na kamatne faktore prema formuli (6) prosječna stopa promjene za navedeno razdoblje je 1.035353, što znači da je u prosjeku plaća rasla 3,54% godišnje.

2.3. Harmonijska sredina

Harmonijska sredina je potpuna srednja vrijednost. Predstavlja recipročnu vrijednost aritmetičke sredine recipročnih vrijednosti numeričkog obilježja. Ona nalazi svoju primjenu u istraživanju prosjeka u slučajevima kada se radi o obrnuto proporcionalnim veličinama.

Uporaba harmonijske sredine više je ograničena od geometrijske sredine. Nju ima smisla izračunavati samo za ona obilježja čije su vrijednosti različite od nule. Za numeričke nizove kojima je barem jedan član jednak nuli harmonijska sredina se ne definira.

Za negrupirane numeričke podatke računa se jednostavna harmonijska sredina formulom:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \quad (9)$$

Složena ili vagana harmonijska sredina računa se za distribuciju frekvencija koristeći sljedeću formulu:

$$H = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \cdots + \frac{f_n}{x_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}} \quad (10)$$

$x_i \neq 0$, gdje je x_i pojedina vrijednost varijable, f_i broj pojavljivanja vrijednosti x_i, a n ukupni broj podataka.

Primjer 11.

Potrebno je odrediti aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu niza 2, 3, 6.

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 3 < \; G = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 6} = 3{,}301 < \; \bar{X} = \frac{2 + 3 + 6}{3} = 3{,}666$$

Općenito vrijedi: $H \leq G \leq \bar{X}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su svi elementi niza za koje računamo srednje vrijednosti jednaki.

Primjer 12.

Pretpostavit će se da je riječ o četiri radnika koji su u toku osmosatnog radnog vremena po proizvodu utrošili: radnik A 10 minuta, radnik B 6 minuta, radnik C 5 minuta radnik D 4 minute. Potrebno je odrediti prosječno utrošeno vrijeme po proizvodu za sva četiri radnika zajedno.

Primjeni li se za izračunavanje prosječnog utroška radnog vremena po jedinici jednostavna aritmetička sredina, dobit će se prosječno vrijeme po jedinici u iznosu od 6,25 minuta. Prosječno radno vrijeme dobiva se tako da se ukupno utrošeno vrijeme podijeli brojem proizvoda. Svaki je radnik radio 8 sati, pa je utrošeno vrijeme svakog od njih 480 minuta, ili ukupno 1920 minuta. Ako je prvi radnik po proizvodu utrošio 10 minuta, u toku osmosatnog radnog vremena (480 minuta), izradio je 48 proizvoda, radnik B 80, radnik C 96, a radnik D 120 proizvoda, ili ukupno 344 proizvoda. Prosječni utrošak po proizvodu za sva četiri radnika zajedno u minutama je: 1920/344, odnosno 5,58140 minuta. Taj je rezultat ispravan, jer umnožak broja proizvoda i prosjeka daje ukupno utrošeno vrijeme. Umnožak prosjeka 6.25 s 344 daje ukupno utrošeno vrijeme od 2150 minuta, što nije točno. Primjenom izraza za jednostavnu harmonijsku sredinu dobiva se ispravan rezultat. Budući da svaki radnik radi 8 sati, odnosno 480 minuta, utrošeno radno vrijeme po proizvodu radnika su razlomci s istim brojnicima.[8] Harmonijska sredina je po formuli (10):

$$H = \frac{480 + 480 + 480 + 480}{\frac{480}{10} + \frac{480}{6} + \frac{480}{5} + \frac{480}{4}} = 5{,}5814$$

Harmonijska sredina primjenjuje se kad je veličina kojoj se određuje prosječna vrijednost obrnuto razmjerna veličini kojom se određuje prosječna vrijednost, na primjer kad se

[8] Šošić I., Serdar V., Uvod u statistiku. Školska knjiga – Zagreb, 1995, str. 46

prosječna produktivnost određuje utrošenim vremenom za izradu nekog proizvoda. Mjerna jedinica harmonijske sredine jednaka je mjernoj jedinici varijable za koju se određuje.[9]

Primjer 13.

U tablici su prikazani podaci o prosječnoj prodajnoj cijeni udžbenika iz Poslovne statistike tijekom 2015. godine te struktura vrijednosti prodaje prema prodajnim područjima.[10] Potrebno je odrediti prosječnu prodajnu cijenu za sva tri područja zajedno.

Tablica 9. Podaci o prodanim udžbenicima

Prodajno područje	Prosječna prodajna cijena u kunama	Struktura vrijednosti prodaje u %
Sjever	300	25
Središnja regija	295	35
Jug	290	40

Izvor: Šošić , I., , Primijenjena statistika, Školska knjiga-Zagreb, 2006. (20.07.2020.)

Vrijednost prodaje jednaka je umnošku ukupnog broja prodanih proizvoda i cijene jednoga proizvoda, dok je prosječna prodajna cijena jednaka količniku vrijednosti prodaje i ukupnog broja prodanih proizvoda. Budući da su postoci vrijednosti prodaje upravno razmjerni vrijednostima prodaje svakoga pojedinoga područja, tražena prosječna prodajna cijena računa se kao ponderirana harmonijska sredina shvaćajući prosječne prodajne cijene kao modalitete, a strukture vrijednosti prodaje kao pondere (težine). Primjenom formule (10) dobiva se harmonijska sredina koja iznosi:

$$H = \frac{25 + 35 + 40}{\frac{25}{300} + \frac{35}{295} + \frac{40}{290}} = 294{,}20\ kn$$

Prosječna prodajna cijena za sva tri područja zajedno je (približno) 295 kuna.

2.4. Mod

Mod je najčešća vrijednost, odnosno modalitet s najvećom frekvencijom. Može se primijeniti za skoro sve vrste obilježja. Odredi se za negrupirane podatke, a za statističke nizove s

[9] Hrvatska enciklopedija, www.enciklopedija.hr (28.08.2020.)
[10] Šošić , I., Primijenjena statistika, Školska knjiga-Zagreb, 2006.

numeričkim obilježjem u razredima se računa. On se, osim za redoslijedne i numeričke nizove, može primijeniti i za nominalne nizove.

Primjer 14.

Potrebno je odrediti mod za matematičke kolegije koje su polagali studenti studija Ugostiteljstva na Veleučilištu u Karlovcu u ljetnom ispitnom roku 2020. Podaci su u **tablici 10**.

Tablica 10. Ljetni ispitni rok 2020.

Naziv kolegija	**Broj studenata**
Poslovna matematika 1	15
Poslovna matematika 2	20
Poslovna statistika 1	13
Poslovna statistika 2	11
Ukupno	59

Izvor: izračun autorice

Od svih srednjih vrijednosti jedino se može primijeniti mod jer se radi o nominalnom obilježju. Mod je Poslovna matematika 2 jer sadrži najveću frekvenciju 20.

Kada se određuje mod za distribuciju koja ima razrede različitih veličina, najprije se treba napraviti korekcija frekvencija. Modalni razred je onaj s najvećom korigiranom frekvencijom. Ako su razredi iste veličine nema potrebe za korekcijom frekvencija.

Prednost moda je to što ne ovisi o ekstremnim vrijednostima obilježja u numeričkom nizu, te što se može primijeniti kada postoje otvoreni razredi u distribuciji frekvencija. Nedostatak je što se ne može primijeniti u svim slučajevima, odnosno ako ne postoje barem dvije jednake vrijednosti varijable.

Mod se računa u slučaju razreda prema formuli:

$$M_o = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} i \quad (11)$$

gdje je b – najveća korigirana frekvencija, a – (korigirana) frekvencija razreda koji prethodi modalnom razredu, c – (korigirana) frekvencija razreda nakon modalnog razreda, L_1 – donja granica modalnog razreda, i – veličina modalnog razreda [11].

Primjer 15.

Zadani su podaci koji su grupirani u razrede jednakih veličina u **tablici 11**. Potrebno je izračunati mod koristeći formulu (11).

Tablica 11. Razredi jednake veličine

Razredi	**Frekvencije(*f*)**	**Veličine razreda(*i*)**
20-30	2	10
30-40	4	10
40-50	8	10
50-60	14	10
60-70	9	10
70-80	7	10
80-90	5	10
90-100	1	10

Izvor: Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr, (25.07.2020.)

$$M_o = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} i = 50 + \frac{(14-8)}{(14-8)+(14-9)} 10 = 55{,}45$$

Primjer 16.

Zadani su podaci koji su grupirani u razrede različitih veličina u **tablici 12**. Potrebno je izračunati mod koristeći formulu (11).

[11] Jurun E., Ratković N. , Poslovna statistika s primjerima u Microsoft Excelu, Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, 2017. , str. 75

Tablica 12. Različiti razredi

Razredi	**Frekvencije(*f*)**	**Veličine razreda(*i*)**	**Korigirane frekvencije(f_c)**
10-15	7	5	1,4
15-20	15	5	3
20-25	28	5	5,6
25-35	30	10	3
35-45	10	10	1
45-65	10	20	0,5

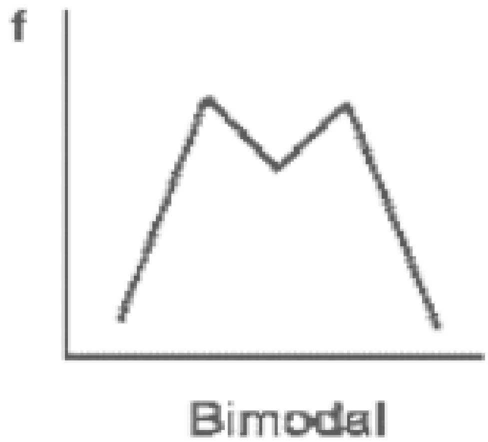
Izvor: izračun autorice

Budući da prema **tablici 12.** razredi nisu iste veličine primjenjuje se postupak korigiranja frekvencija, za svaki razred se dijeli pripadajuća frekvencija veličinom razreda. Rezultat se vidi u **tablici 12**. u zadnjem stupcu. Tek tada se koristi formula (11) tako da frekvencije zamijenimo korigiranim frekvencijama.

$$M_o = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} i = 20 + \frac{(5{,}6-3)}{(5{,}6-3)+(5{,}6-3)} 5 = 22{,}5$$

Dvije ili više vrijednosti mogu se pojavljivati češće u odnosu na preostale, odnosno postoje dva ili više moda. Tada tu distribuciju nazivamo bimodalnom ili višemodalnom.

Slika 2. Primjer bimodalne distribucije podataka



Izvor: Statistics Canada www.statcan.gc.ca (25.07.2020.)

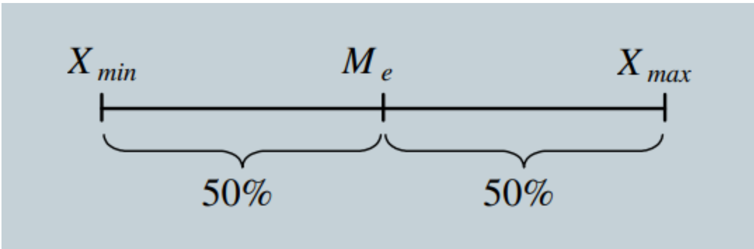
Primjer 16.

Zaposleni u poduzeću stari su 23, 28, 40, 40, 40, 40, 35, 50, 50, 50, 50 i 65 godina. Najčešće se pojavljuju dva obilježja, 40 i 50. Radi se, dakle, o bimodalnoj distribuciji.

2.5. Medijan

Medijan je položajna srednja vrijednost. Ona statistički niz dijeli na dva jednaka dijela. Polovica članova niza ima vrijednost varijable jednaku ili manju medijanu, a preostalih pola (50%) ima vrijednost veću ili jednaku od vrijednosti medijana.

Slika 3. Prikaz medijana



Izvor: Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (25.07.2020)

Može se izračunati kao srednja vrijednost numeričkih i redoslijednih statističkih nizova, a ne može za nominalne statističke nizove. Kod negrupiranih statističkih nizova, medijan se određuje tako da se sve vrijednosti niza poredaju od najmanje prema najvećoj. Ako je broj jedinica statističkog niza paran, medijan se određuje jednostavnom aritmetičkom sredinom vrijednosti obilježja dva središnja člana niza.[12] Ako je broj neparan, određuje se vrijednošću obilježja središnjeg člana niza.

$$M_e = \begin{cases} x_r\ , r = INT\left(\frac{N}{2}\right) + 1 \ \text{ ako je } N \text{ neparan} \\ \frac{x_r + x_{r+1}}{2}, r = \frac{N}{2} \ \text{ ako je } N \text{ paran} \end{cases} \qquad (12)$$

INT(N/2) znači cjelobrojni dio od N/2.

[12] Rozga A., Grčić B. , Poslovna statistika, Veleučilište u Splitu, 2000., str. 61

Primjer 14.

Dane su vrijednosti neke varijable X:

a)1, 2, 5, 6, 5, 1, 2, 7, 2, 2, 3;

b)1, 2, 5, 6, 5, 1, 2, 7, 2, 2, 3, 3. Za dane vrijednosti odredite medijan.

a) Da bi se on odredio, vrijednosti moramo poredati po veličini: 1, 1, 2, 2, 2, **2**, 3, 5, 5, 6, 7.

S obzirom na to da je u nizu ukupno jedanaest vrijednosti, po formuli (12) medijan je vrijednost koja se nalazi na šestoj(r=INT(11/2)+1=5+1=6) poziciji u tako dobivenom nizu, tj. broj 2.

b) Analognim postupkom dobije se niz 1, 1, 2, 2, 2, **2, 3**, 3, 5, 5, 6, 7 kome je N=12. Opet po formuli (12) r=12/2=6, $M_e = \frac{x_6+x_7}{2} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

Ako se radi o numeričkom nizu grupiranom prema diskontinuiranom obilježju gdje su modaliteti predstavljeni brojevima postupak je sličan kao malo prije. Medijan se određuje pomoću kumulativnog niza „manje od“. Za medijan se uzima vrijednost modaliteta obilježja koja pripada elementu na poziciji $\frac{N+1}{2}$, ako je ukupan broj podataka neparan. Ako je broj podataka paran, medijan je vrijednost modaliteta obilježja koja pripada elementima koji se nalaze na pozicijama $\frac{N+1}{2}$ i $\frac{N}{2}$. Ako te vrijednosti nisu u istim razredima, za medijan se uzima aritmetička sredina vrijednosti pripadnih modaliteta.[13]

Ako se radi o distribuciji frekvencija s razredima, za medijan se koristi formula :

$$M_e = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f}{f_{med}} i \quad (13)$$

gdje je L_1 donja granica medijalnog razreda, N je broj vrijednosti u nizu, $\sum f_1$ zbroj frekvencija do medijalnog razreda, f_{med} frekvencija medijalnog razreda, a i veličina medijalnog razreda.

Primjer 15.

Potrebno je odrediti medijan za podatke iz **tablice 13.**

[13] Štambuk LJ., Devčić K.,. Statistika priručnik i zbirka zadataka, Veleučilište Nikola Tesla u Gospiću, 2010., str. 47

Tablica 13. Broj pogrešnih odgovora 80 studenata na testu iz Statistike

Broj pogrešnih odgovora	Broj studenata	Kumulativni niz "manje od"
0	5	5
1	7	12
2	15	27
3	19	46
4	20	66
5	10	76
6	4	80
Σ	**80**	**-**

Izvor: Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (25.07.2020.)

Radi se o grupiranom nizu veličine 80 kome su modaliteti brojevi. Medijan je obilježje elemenata s rednim brojevima 40 i 41. Prva kumulativna frekvencija, jednaka ili veća od 40, jest četvrta po redu (46). Toj grupi pripadaju i 40. i 41. student s istim brojem pogrešnih odgovora pa je $M_e = 3$

Primjer 16.

Potrebno je odrediti medijan za podatke iz **tablice 14.**

Tablica 14. Studenti prema visini mjesečnih primanja

Mjesečna primanja u kunama	Broj studenata	Kumulativni niz "manje od"
0-100	25	25
100-200	109	134
200-400	95	229
400-600	120	349
600-800	21	370
800-1000	16	386

Izvor: Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (25.07.2020.)

Prije određivanja medijana potrebno je formirati kumulativni niz "manje od", a to je zadnji stupac **tablice 14.** Ukupno je 386 studenata obuhvaćeno ispitivanjem pa je polovica članova $\frac{386}{2} = 193$. 193. član po redu nalazi se u razredu 200-400 što se lako vidi iz kumulativnog niza pa je medijalni razred upravo taj. Iz toga se zaključuje primjenom formule (13) da je:

$$M_e = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f}{f_{med}} i = 200 + \frac{193 - 134}{95} 200 = 324{,}21 \text{ kn}$$

Primjer 17.

U poduzeću XY zaposlenici imaju mjesečnu neto plaću kako je navedeno u **tablici 15** Potrebno je izračunati medijan i aritmetičku sredinu te ih usporediti.

Tablica 15. Mjesečne plaće zaposlenika

Zanimanje	**Mjesečna plaća (kn)**
Direktor	20 000
Zamjenik	11 000
Inženjer	5 000
Tajnik	4 000
Fizički radnik	3 000
Fizički radnik	3 000
Fizički radnik	3 000

Izvor: Milun T., Srednje vrijednosti u svakodnevnom životu, https://bib.irb.hr/datoteka/931011.Srednje_vrijednosti_u_svakodnevnom_ivotu_-strucni_rad.pdf, (25.07.2020.)

Prosječna plaća zaposlenika u poduzeću XY dobivena izrazom (1) za aritmetičku sredinu iznosi 7000 kn. Plaće su posložene u redu od najveće do najmanje i poduzeće ima neparan broj zaposlenika *(N=7)*. U tom slučaju medijan je prema formuli (12) jednak $Me = x_4 = 4000$. Polovica zaposlenika imaju mjesečnu plaću manju ili jednaku 4000 kn, a druga polovica veću ili jednaku 4000 kn. Najčešće korištena vrijednost - aritmetička sredina u ovom primjeru nije prikladna jer u poduzeću XY zapravo ne postoji niti jedan zaposlenik s mjesečnom plaćom od 7000 kn ili približno jednakim iznosom. Iako je prosječna plaća pravilno izračunata, ona nije reprezentativan predstavnik mjesečnih plaća navedenih zaposlenika. Zbog dvije velike vrijednosti mjesečnih plaća koje narušavaju homogenost ostalih podataka (20.000 kn i 11.000 kn), medijan bolje opisuje prosječnog zaposlenika, pa je stoga primjerenija prosječna vrijednost.[14]

[14] Milun T., Srednje vrijednosti u svakodnevnom životu, https://bib.irb.hr/datoteka/931011.Srednje_vrijednosti_u_svakodnevnom_ivotu_-strucni_rad.pdf, (25.07.2020.)

2.6. Kvantili

Kvantili su vrijednosti koje statistički niz dijele na q jednakih dijelova. Broj kvantila *p* je za jedan manji od njegova reda q. Kvantili koji dijele niz na deset jednakih dijelova zovu se decili, te je njihov ukupni broj devet. Percentili dijele niz na sto jednakih dijelova i njih je ukupno devedeset i devet.[15] Kvartili ga dijele na četiri jednaka dijela.

Oni su značajni zbog njihove primjene pri mjerenju disperzije i asimetrije numeričkih nizova. Drugi kvartil je medijan, stoga će se ukratko u ovome dijelu pojasniti što su kvantili. Kako su kvartili ustvari kvantili četvrtog reda, postoje tri kvartila:

a) prvi ili donji kvartil (*Q*1)
b) drugi kvartil ili medijan (*Q*2=*Me*)
c) treći ili gornji kvartil (*Q*3)

Ako se radi o negrupiranom numeričkom nizu, članove niza treba urediti po veličini, te odrediti redni broj člana s vrijednošću obilježja koja će predstaviti donji, odnosno gornji kvartil. Kako donji kvartil (Q1) predstavlja vrijednost obilježja koja niz dijeli u omjeru 0,25:0,75 članova, u nizu od *N* članova vrijednost donjeg kvartila potrebno je odrediti na sljedeći način:[16]

$$Q_1 = \begin{cases} x_r, \quad \text{ako je } \frac{N}{4} \neq \text{cijeli broj}, \;\; r = INT\left(\frac{N}{4}\right) + 1 \\ \frac{x_r + x_{r+1}}{2}, \quad \text{ako je } \frac{N}{4} = \text{cijeli broj}, \;\; r = \left(\frac{N}{4}\right) \end{cases} \qquad (14)$$

INT(N/4) znači cjelobrojni dio od N/4.

[15] Šošić I., Serdar V., , Uvod u statistiku. Školska knjiga – Zagreb, 1995, str. 54

[16] Rozga A., Grčić B. , Poslovna statistika, Veleučilište u Splitu, 2000., str. 65

Analogno se definira gornji kvartil :

$$Q_3 = \begin{cases} x_r, \quad \text{ako je } \frac{3N}{4} \neq \text{cijeli broj}, \quad r = INT\left(\frac{3N}{4}\right) + 1 \\ \frac{x_r + x_{r+1}}{2}, \quad \text{ako je } \frac{3N}{4} = \text{cijeli broj}, \quad r = \left(\frac{3N}{4}\right) \end{cases} \qquad (15)$$

INT(3N/4) znači cjelobrojni dio od 3N/4.

Primjer 18.

Zadani su podaci o izdacima za prehranu 15 anketiranih kućanstva. Podaci uređeni po veličini su: x_i : 3 4 4 5 6 7 8 11 12 12 13 14 16 17 20. Potrebno je odrediti donji i gornji kvartil.

Elementi za određivanje donjeg kvartila su prema formuli (14):

N = 15 pa je N/4 ≠ INT, $Q_1 = x_r$, r = INT(15/4) + 1 = 3 + 1, $Q_1 = x_4$

Donji je kvartil Q_1=5.

Gornji kvartil:

(3N/4) ≠ INT ⇒ $Q_3 = x_r$, r = INT(3N/4) + 1, r=INT(15/4) + 1 = 11+1, $Q_3 = x_{12}$

Gornji kvartil iznosi Q_3=14.

Prvi kvartil pokazuje da prva četvrtina anketiranih kućanstava ima izdatke za prehranu manje ili jednake 5 tisuća kuna, a posljednje tri četvrtine su s većim ili jednakim izdacima za prehranu. Treći kvartil iznosi 14 tisuća kuna, a izdaci za prehranu posljednje četvrtine kućanstava veći su ili jednaki spomenutom iznosu. Pri tome se pretpostavlja da su vrijednosti izdataka za prehranu uređene po veličini.[17]

Kada su podaci grupirani u razrede izraz za određivanje donjeg kvartila distribucije frekvencija je:

[17] Šošić I., Serdar V., , Uvod u statistiku. Školska knjiga – Zagreb, 1995., str. 55

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - \sum f}{f_{kvar}} i \ (16)$$

Izraz za određivanje gornjeg kvartila distribucije frekvencija je:

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - \sum f}{f_{kvar}} i \ (17)$$

gdje je L_1- donja prava ili precizna granica kvartilnog razreda, N ukupan broj članova numeričkog niza, $\sum f$ zbroj frekvencija do kvartilnog razreda, ne uključujući frekvenciju kvartilnog razreda, f_{kvar} originalna frekvencija kvartilnog razreda, te i veličina kvartilnog razreda.

Primjer 19.

Potrebno je odrediti gornji i donji kvartil za podatke grupirane u razrede u **tablici 16.**

Tablica 16. Distribucija korisnika mirovina u RH prema visini mirovine u rujnu 1998.

Mirovina u kunama	Broj umirovljenika	Kumulativni niz "manje od"
do 500	38 618	38 618
500-1000	330 765	369 383
1000-1500	275 111	644 494
1500-2000	104 470	748 964
2000-4000	58 569	807 533
4000-6000	9 134	816 667
6000 i više	7936	824 603
UKUPNO	**824603**	

Izvor: Rozga A., Grčić B. , Poslovna statistika, Veleučilište u Splitu, 2000., str. 67

Donji kvartil: N/4=206150,75 pa će kvartilni razred biti 500-1000. Slijedi:

$$Q_1 = 500 + \frac{206150{,}75 - 38618}{330765} 500 = 753{,}25 \text{ kn}$$

Dakle, jedna četvrtina ili 25% umirovljenika u rujnu 1998. imalo je mirovinu manju ili jednaku 753,25 kn, a tri četvrtine ili 75% mirovinu veću ili jednaku 753,25 kn.

Gornji kvartil: 3N/4=618452,25 pa će kvartilni razred biti 1000-1500. Slijedi:

$$Q_3 = 1000 + \frac{618452,25 - 369383}{275111} 500 = 1452,67 \text{ kn}$$

Dakle, tri četvrtine ili 75% umirovljenika u rujnu 1998. imalo je mirovinu manju ili jednaku 1452,67 kn, a jedna četvrtina ili 25% mirovinu veću ili jednaku 1452,67 kn.[18]

Primjer 20. Na temelju podataka iz **tablice 17.** potrebno je analizirati prosječne mjesečne neto plaće u RH za 2000. i 2013.

Tablica 17. Plaće i zaposlenost u 2000. i 2013.

Djelatnosti	**Prosječne mjesečne neto plaće(kn) $(\overline{x_i})$**		**Zaposleni u pravnim osobama $(\overline{N_i})$**	
	2000	**2013**	**2000**	**2013**
	I-XII			
Poljoprivreda, šumarstvo i ribarstvo	3045	5050	30178	23163
Biljna i stočarska proizvodnja, lovstvo i uslužne djelatnosti povezane s njima	2543	4274	18954	13001
Šumarstvo i sječa drva	3710	5960	10087	8172
Ribarstvo	2168	4834	1137	1990
Rudarstvo i vađenje	3575	6711	8168	5356
Vađenje sirove nafte i prirodnog plina	4144	8552	2364	1320
Ostalo rudarstvo i vađenje	2576	4841	3118	1976
Pomoćne uslužne djelatnosti u rudarstvu	4018	7399	2687	2060
Prerađivačka industrija	2825	4899	249482	201950
Proizvodnja prehrambenih proizvoda	3174	4710	36553	35838
Proizvodnja pića	3677	6355	7106	4919
Proizvodnja duhanskih proizvoda	4213	6832	1316	706
Proizvodnja tekstila	1869	3418	9105	3719
Proizvodnja odjeće	1927	2902	31396	14244
Proizvodnja kože i srodnih proizvoda	1732	3052	10180	8752
Prerada drva i proizvoda od drva i pluta, osim namještaja; proizvodnja proizvoda od slame i pletarskih materijala	2001	3341	13076	11072
Proizvodnja papira i proizvoda od papira	2749	4590	5565	3255

[18]Rozga A., Grčić B. , Poslovna statistika, Veleučilište u Splitu, 2000. str. 67

Tiskanje i umnožavanje snimljenih zapisa	2902	5121	5897	6162
Proizvodnja koksa i rafiniranih naftnih proizvoda	4042	8102	4459	2825
Proizvodnja kemikalija i kemijskih proizvoda	3395	5263	10601	6403
Proizvodnja osnovnih farmaceutskih proizvoda i farmaceutskih pripravaka	5118	8450	5220	3939
Proizvodnja proizvoda od gume i plastike	2394	4226	7136	7140
Proizvodnja ostalih nemetalnih mineralnih proizvoda	3005	5621	14185	9507
Proizvodnja metala	2581	4578	8294	4149
Proizvodnja gotovih metalnih proizvoda, osim strojeva i opreme	2516	4714	16181	23961
Proizvodnja računala te elektroničkih i optičkih proizvoda	3484	6205	6929	4464
Proizvodnja električne opreme	3106	6178	6877	8234
Proizvodnja strojeva i uređaja, d. n.	2744	5423	11466	10619
Proizvodnja motornih vozila, prikolica i poluprikolica	3051	5261	3315	2077
Proizvodnja ostalih prijevoznih sredstava	3511	5454	10048	10282
Proizvodnja namještaja	2018	3450	11164	8447
Ostala prerađivačka industrija	2176	4017	1569	2010
Popravak i instaliranje strojeva i opreme	3405	6471	11845	9226
Opskrba električnom energijom, plinom, parom i klimatizacija	3954	7260	18206	15174
Opskrba vodom; uklanjanje otpadnih voda, gospodarenje otpadom te djelatnosti sanacije okoliša	3311	5446	16542	21673
Skupljanje, pročišćavanje i opskrba vodom	3374	5638	9229	8989
Uklanjanje otpadnih voda	0	4280	0	368
Skupljanje otpada, djelatnosti obrade i zbrinjavanja otpada; oporaba materijala	3217	5335	7078	10684
Djelatnosti sanacije okoliša te ostale djelatnosti gospodarenja otpadom	3246	5130	235	1632
Građevinarstvo	2599	4643	65465	73832
Gradnja zgrada	2253	3965	24943	27755
Gradnja građevina niskogradnje	2874	5198	22102	24214
Specijalizirane građevinske djelatnosti	2429	4431	18419	21863
Trgovina na veliko i na malo; popravak motornih vozila i motocikala	2691	4726	152503	178084
Trgovina na veliko i na malo motornim vozilima i motociklima; popravak motornih vozila i motocikala	3112	5691	9887	13056
Trgovina na veliko, osim trgovine motornim vozilima i motociklima	3024	5733	75262	70937
Trgovina na malo, osim trgovine motornim vozilima i motociklima	2482	4096	67353	94091
Prijevoz i skladištenje	3417	6303	67018	60581
Kopneni prijevoz i cjevovodni transport	3143	6018	26320	26656

Vodeni prijevoz	3300	6915	2835	2785
Zračni prijevoz	5632	9695	686	1069
Skladištenje i prateće djelatnosti u prijevozu	3386	7200	24871	18405
Poštanske i kurirske djelatnosti	3962	4997	12306	11666
Djelatnosti pružanja smještaja te pripreme i usluživanja hrane	2706	4819	41340	50707
Smještaj	2743	4941	29296	30868
Djelatnost pripreme i usluživanja hrane i pića	2396	4087	12044	19839
Informacije i komunikacije	4671	7759	26287	32317
Izdavačke djelatnosti	4268	6480	5657	5603
Proizvodnja filmova, videofilmova i televizijskog programa, djelatnosti snimanja zvučnih zapisa i izdavanja glazbenih	3162	5285	895	1013
Emitiranje programa	4240	6958	4533	5576
Telekomunikacije	5082	8699	11518	8441
Računalno programiranje, savjetovanje i djelatnosti povezane s njima	3460	8557	2546	9645
Informacijske uslužne djelatnosti	4442	6344	1139	2039
Financijske djelatnosti i djelatnosti osiguranja	4892	7870	29213	36894
Financijske uslužne djelatnosti, osim osiguranja i mirovinskih fondova	4797	8565	23852	23204
Osiguranje, reosiguranje i mirovinski fondovi, osim obveznoga socijalnog osiguranja	5647	7079	4068	8531
Pomoćne djelatnosti kod financijskih usluga i djelatnosti osiguranja	2851	5893	1294	5159
Poslovanje nekretninama	3735	5020	2195	7129
Stručne, znanstvene i tehničke djelatnosti	3834	7093	34646	51772
Pravne i računovodstvene djelatnosti	2572	6110	6702	10295
Upravljačke djelatnosti; savjetovanje u vezi s upravljanjem	3519	7767	2087	5717
Arhitektonske djelatnosti i inženjerstvo; tehničko ispitivanje i analiza	3966	6805	15001	20648
Znanstveno istraživanje i razvoj	4154	7923	5387	5406
Promidžba (reklama i propaganda) i istraživanje tržišta	2372	9776	1929	5292
Ostale stručne, znanstvene i tehničke djelatnosti	4191	4760	1549	2322
Veterinarske djelatnosti	4005	5491	1991	2092
Administrativne i pomoćne uslužne djelatnosti	2839	3510	15753	36057
Djelatnosti iznajmljivanja i davanja u zakup (leasing)	3163	4976	807	2783
Djelatnosti zapošljavanja	4106	4181	998	4939
Putničke agencije, organizatori putovanja (turoperatori) i ostale rezervacijske usluge te djelatnosti povezane s njima	3859	5546	3749	5221
Zaštitne i istražne djelatnosti	2118	3012	6133	12365

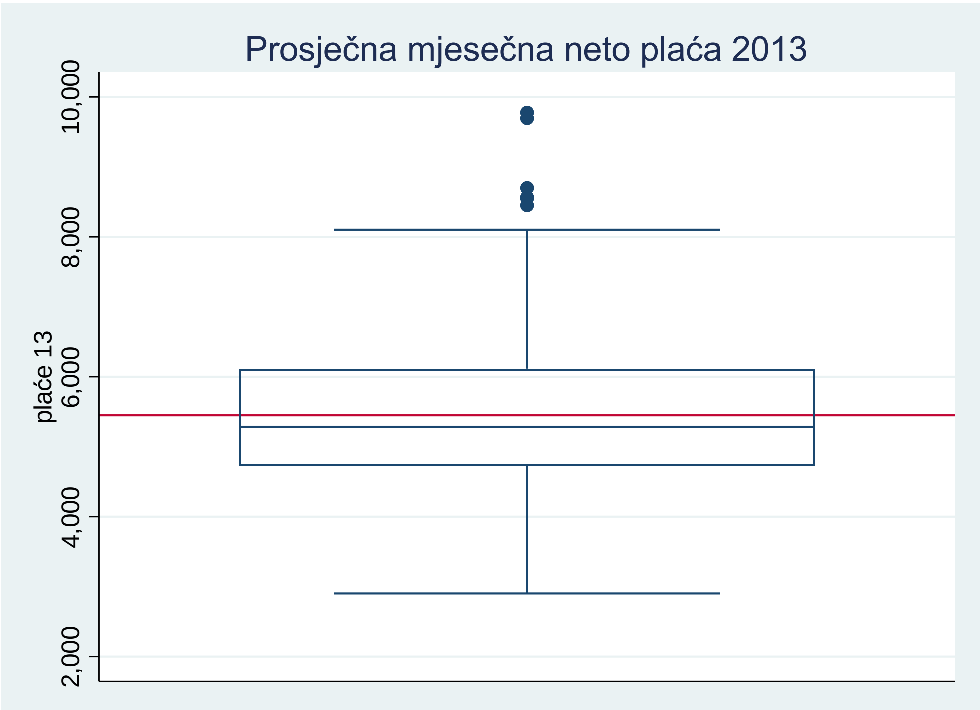
Usluge u vezi s upravljanjem i održavanjem zgrada te djelatnosti uređenja i održavanja krajolika	2763	3198	4026	9644
Uredske administrativne i pomoćne djelatnosti te ostale poslovne pomoćne djelatnosti	2597	5314	40	1105
Javna uprava i obrana; obvezno socijalno osiguranje	4214	6052	122326	106582
Obrazovanje	3491	5484	82442	109294
Djelatnosti zdravstvene zaštite i socijalne skrbi	4226	6115	69932	85298
Djelatnosti zdravstvene zaštite	4322	6366	58542	67654
Djelatnosti socijalne skrbi sa smještajem	3580	4660	7408	11512
Djelatnosti socijalne skrbi bez smještaja	3559	5413	3982	6132
Umjetnost, zabava i rekreacija	3494	5631	11196	20902
Kreativne, umjetničke i zabavne djelatnosti	3359	6294	2642	3242
Knjižnice, arhivi, muzeji i ostale kulturne djelatnosti	3476	5632	3886	5673
Djelatnosti kockanja i klađenja	3437	4681	1275	5584
Sportske djelatnosti te zabavne i rekreacijske djelatnosti	3771	6060	3394	6403
Ostale uslužne djelatnosti	3337	5676	10368	15481
Djelatnosti članskih organizacija	4041	6442	4233	7814
Popravak računala i predmeta za osobnu uporabu i kućanstvo	3985	5534	2502	1821
Ostale osobne uslužne djelatnosti	2428	4300	3633	5846
Ukupno			**1881354**	**2026313**

Izvor: Državni zavod za statistiku - Republika Hrvatska, www.dzs.hr (22.09.2020.)

Slika 4. Box-Plot dijagram za plaće iz 2000.

Izvor : izračun autorice (27.09.2020.)

Slika 5. Box-Plot dijagram za plaće iz 2013.



Izvor : izračun autorice (27.09.2020.)

Prilikom izračuna prosječnih mjesečnih plaća u RH u većini slučajeva ljudi nisu upoznati s metodologijom izračuna, koja je zapravo vrlo jednostavna i lako razumljiva.

Kada Državni zavod za statistiku objavi prosječnu plaću, većina ljudi ne vjeruje u navedenu informaciju. Od svih spomenutih mjera srednje vrijednosti koristi se aritmetička sredina koja je osjetljiva na ekstremne vrijednosti. Mnogo pravednija je upotreba medijana koji nema prethodno spomenuto svojstvo. Također korisno je koristiti dijagrame kao na slikama 4. i 5. koji sadrže aritmetičku sredinu, medijan, gornji i donji kvartil, najveću i najmanju moguću tipičnu vrijednost te netipične vrijednosti (eng. outliers).

Pravokutnici na slikama su odozgo omeđeni gornjim kvartilom, a odozdo donjim kvartilom. Unutar pravokutnika su aritmetička sredina (crvena crta) i (medijan plava crta). Neku vrijednost smatramo netipičnom(označene točkama) u slučaju kada je njezina vrijednost veća od Q_3+1,5 $\cdot I_Q$, odnosno manja od Q_1-1,5 $\cdot I_Q$, pri čemu je $I_Q = Q_3 - Q_1$ interkvartilni raspon. Vodoravna linija gore i dolje predstavlja brkove koji su maksimalna(odnosno minimalna) vrijednost koja se ne smatra netipičnom. Za sliku 4., odnosno plaće iz 2000. prvi kvartil iznosi 2691 kn, a treći kvartil 3834 kn. Aritmetička sredina je 3236,93 kn i medijan 3024 kn. Za sliku 5., odnosno plaće iz 2013. prvi kvartil iznosi 4726 kn, a treći kvartil 6115 kn. Aritmetička sredina je 5448,71 kn i medijan 5285 kn. Slike i prethodno izračunate vrijednosti dobivene su u programu Stata.

Prosječna plaća u RH za 2000 mjerena aritmetičkom sredinom je za oko 7% veća u odnosu na medijalnu. U 2013. godini ta razlika je oko 3,1%. Vjerojatno bi ta razlika bila nešto veća kada bi bilo pojedinačnih podataka, a ne prosječnih neto plaća po djelatnostima. Promatrajući samo srednje vrijednosti moglo bi se pogrešno zaključiti da su se nejednakosti smanjile zato što medijan nije osjetljiv na ekstremne vrijednosti za razliku od aritmetičke sredine. Upravo zato su važne slike 4. i 5. Iz slika se vidi da je povećanje gornjih kvartila veće od povećanja donjih kvartila. Isto tako mnogo je više netipičnih plaća u 2013. nego u 2000. Maksimalna tipična plaća (gornji brk) povećala se za 3000 kn, a donji brk(minimalna tipična plaća) povećala se za malo preko 1000 kn. Iz navedenog je očit utjecaj iznadprosječnih plaća koje su postale dominantnije u 2013 nego 2000. Može se zaključiti da srednje vrijednosti u ovom primjeru podjednako dobro opisuju porast prosječne plaće, ali problem nejednakosti u prosječnim plaćama postaje vidljiv tek primjenom dijagrama. Iz ovoga primjera može se zaključiti kako statistika može biti interpretirana na različite načine, ovisno o metodologiji koja se koristi.

3. ZAKLJUČAK

Srednja vrijednost je konstanta kojom se predstavlja niz varijabilnih podataka. Naziva se i mjerom centralne tendencije. Njihova uloga je da istaknu onu veličinu koja je za sve njih karakteristična i koja može služiti kao sredstvo za uspoređivanje raznih statističkih nizova. Postoji više vrsta srednjih vrijednosti. Dijele se na potpune i položajne. Potpune srednje vrijednosti su: harmonijska, geometrijska i aritmetička. Položajne srednje vrijednosti su mod i medijan.

U ovom završnom radu dan je pregled svih srednjih vrijednosti, te je na akademskim primjerima i primjerima s DZS-a objašnjena primjena srednjih vrijednosti. Prikazani su rezultati statističke obrade koristeći Excel i Statu. Na temelju primjera moguće je razlikovati prednosti i nedostatke srednjih vrijednosti. Posebice je zanimljiva primjena kod izračuna prosječnih plaća u RH koja pokazuje važnost poznavanja statistike za razumijevanje problema nejednakosti u plaćama.

POPIS LITERATURE

1. Bahovec V., Erjavec N. , Statistika, Element, Zagreb, 2016.
2. Milun T., Srednje vrijednosti u svakodnevnom životu, https://bib.irb.hr/datoteka/931011.Srednje_vrijednosti_u_svakodnevnom_ivotu_-strucni_rad.pdf, (25.07.2020.)
3. Državni zavod za statistiku - Republika Hrvatska, www.dzs.hr (22.09.2020.)
4. Hrvatska enciklopedija, www.enciklopedija.hr (28.08.2020.)
5. Jurun E., Ratković N. , Poslovna statistika s primjerima u Microsoft Excelu, Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, 2017.
6. Kovačić, B.: Poslovna statistika – interna skripta, Visoka poslovna škola PAR, https://bkovacic.weebly.com/uploads/7/4/0/7/7407552/skripta.pdf (21.07.2020.)
7. Kurnoga Živadinović, N. Statistika: srednje vrijednosti,, https://pdfslide.net/documents/3-srednje-vrijednosti-za-nastavu.html (20.07.2020.)
8. Osnove statistike, www.pmf.unizg.hr (29.08.2020.)
9. Rozga A., Grčić B. , Poslovna statistika, Veleučilište u Splitu, 2000.
10. Statistics Canada www.statcan.gc.ca, (25.07.2020.)
11. Sveučilište u Zadru, www.unizd.hr (20.07.2020.)
12. Šošić , I., Primjenjena statistika, Školska knjiga-Zagreb, 2006.
13. Šošić I., Serdar V., Uvod u statistiku. Školska knjiga – Zagreb, 1995.
14. Štambuk LJ., Devčić K. , Statistika priručnik i zbirka zadataka, Veleučilište Nikola Tesla u Gospiću, 2010.

POPIS TABLICA

Tablica 1. Nezaposleni u Republici Hrvatskoj 5
Tablica 2. Podaci studenata druge godine komunikologije 6
Tablica 3. Prodaja garnitura sobnog namještaja 6
Tablica 4. Trgovačke radnje poduzeća "X" prema ostvarenom mjesečnom prometu 8
Tablica 5. Vrijednost numeričke varijable X 9
Tablica 6. Razdioba studenata prema broju članova domaćinstva 10
Tablica 7. Stanje na računu 1. siječnja pojedine godine 10
Tablica 8. Promjena plaća u sektoru obrazovanja 11
Tablica 9. Podaci o prodanim udžbenicima 14
Tablica 10. Ljetni ispitni rok 2020. 15
Tablica 11. Razredi jednake veličine 16
Tablica 12. Različiti razredi 17
Tablica 13. Broj pogrešnih odgovora 80 studenata na testu iz Statistike 20
Tablica 14. Studenti prema visini mjesečnih primanja 20
Tablica 15. Mjesečne plaće zaposlenika 21
Tablica 16. Distribucija korisnika mirovina u RH prema visini mirovine u rujnu 1998. 24
Tablica 17. Plaće i zaposlenost u 2000. i 2013. 25

POPIS SLIKA

Slika 1. Srednje vrijednosti 2
Slika 2. Primjer bimodalne distribucije podataka 17
Slika 3. Prikaz medijana 18
Slika 4. Box-Plot dijagram za plaće iz 2000. 29
Slika 5. Box-Plot dijagram za plaće iz 2013. 29