

# PROCJENA UTJECAJA OTPORA KOTRLJANJA NA VODILICI NA VIBRACIJSKI ODZIV

---

**Marinović, Luka**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:112972>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-23**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

# PROCJENA UTJECAJA OTPORA KOTRLJANJA NA VODILICI NA VIBRACIJSKI ODZIV

---

**Marinović, Luka**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:112972>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2023-02-15**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
Stručni studij Mehatronike

Luka Marinović

**Procjena utjecaja otpora kotrljanja na  
vodilici na vibracijski odziv**

**Assesment of influence of rolling  
resistance on a slider on the vibrational  
response**

Završni rad

Karlovac, 2020.



VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
*Stručni studij Mehatronike*

Luka Marinović  
**Procjena utjecaja otpora kotrljanja na  
vodilici na vibracijski odziv**

**Assesment of influence of rolling  
resistance on a slider on the vibrational  
response**

Završni rad

Mentor: dr.sc. Josip Hoster, v.p.

Karlovac, 2020.

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena u dosadašnjem dijelu studija te koristeći navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr.sc. Josip Hoster, v.p. na savjetima, konzultacijama i pomoći pri izradi ovog završnog rada. Hvala profesorima, kolegama i svima koji su mi pomogli za vrijeme studiranja.

## SADRŽAJ

SAŽETAK.....	1
SUMMARY .....	1
POPIS OZNAKA .....	2
POPIS SLIKA .....	3
1. UVOD U VIBRACIJE .....	5
2. VODILICA .....	7
2.1. Klizna vodilica.....	7
2.2. Valjna vodilica.....	11
2.3. Elastična vodilica .....	13
3. OPRUGA .....	14
3.1. Karakteristike i rad opruga.....	14
3.2. Materijali opruga .....	15
3.3. Dopuštena naprezanja na opruge .....	17
3.4. Podjela opruga .....	17
3.4.1. Torzijska opruge.....	18
3.4.2. Opruge opterećene na savijanje.....	19
3.4.3. Opruge opterećene na vlak i tlak.....	24
4. MJERNI UREĐAJ S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE .....	27
5. JEDNADŽBE GIBANJA .....	30
5.1. Runge – Kutta metoda.....	31
5.2. Adams - Bashforth / Adams – Moulton metode .....	33
5.3. Jednadžba gibanja i utjecaj otpora za opisani mjerni uređaj .....	34
6. NUMERIČKE METODE RJEŠAVANJA VIBRACIJE KRUTIH TIJELA.....	35
6.1. Eksplicitna integracija .....	35

6.2.	Metoda centralnih razlika.....	35
6.3.	Newtonova metoda.....	36
6.4.	Eulerova metoda .....	37
6.4.1.	Implicitna Eulerova metoda .....	37
6.4.2.	Eksplicitna Eulerova metoda .....	38
6.5.	Numerička metoda rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžba ....	38
6.6.	Metoda pretpostavljenog rješenja.....	39
6.7.	Konvergencija rješenja u svakom vremenskom koraku.....	39
7.	ZAKLJUČAK .....	42
	LITERATURA.....	43
	LITERATURA ZA SLIKE .....	44



## SAŽETAK

U završnom radu potrebno je opisati funkciju, glavne dijelove i područje mjerenja ispitnog postolja za mjerenje vibracija diskretnog sustava s jednim stupnjem slobode za akademsku primjenu. Postolje mora biti projektirano za mjerenje linearnih i nelinearnih vibracija utega različite mase na zadanom pravcu, određenim simetralom vodilice. Na vodilicu se mora moći postaviti proizvoljno utega unutar zadanog područja mase i veličine. Držać utega (inercijski član) mora biti vođen po vodilici pomoću valjnih ležaja, u dvije međusobno okomite ravnine. Opisati utjecaj otpora kotrljanja ležaja na gibanje utega, tj. utjecaj na jednadžbu gibanja. Opisati slobodne prigušene vibracije utega za slučajeve linearnog i nelinearnog odziva. Analizirati numeričkom metodom vibracijski odziv za slučaj idealnog vođenja i realnog, s parametarski postavljenom bočnom silom na vodilici. Prikazati konstrukciju u obliku sklopnog crteža.

## SUMMARY

In the final paper it is necessary to describe the function, main parts and measuring range of the test stand for measuring the vibrations of a discrete system with one degree of freedom for academic application. The stand must be designed to measure the linear and non-linear vibrations of weights of different masses in a given direction, determined by the guide bisector. It must be possible to place arbitrary weights on the guide within a given range of mass and size. The weight carrier (inertial member) must be guided by the roller bearings, in two perpendicular planes. Describe the influence of the rolling resistance of the bearing on the motion of the weights, i.e. the influence on the equation of motion. Describe free damped vibrations of weights for cases of linear and nonlinear response. Analyze by numerical method the vibrational response for the case of ideal guidance and real, with a parameter-determined lateral force on the guide. Show the construction in the form of an assembly drawing.

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\mu$	[-]	Koeficijent trenja
$\alpha$	[°]	Kut uvijanja
F	[N]	Sila
M	[Nm]	Moment
c	[N/mm]	Krutost
E	[N/mm <sup>2</sup> ]	Modul elastičnosti
G	[N/mm <sup>2</sup> ]	Smični modul elastičnosti
$\sigma_R$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Granica razvlačenja
D <sub>d</sub>	[mm]	Unutarnje vođenje
D <sub>h</sub>	[mm]	Vanjsko vođenje
D <sub>u</sub>	[mm]	Unutarnji promjer
D <sub>v</sub>	[mm]	Vanjski promjer
D <sub>z</sub>	[mm]	Vanjski promjer opruge
a	[m/s <sup>2</sup> ]	Ubrzanje
m	[kg]	Masa
k	[-]	Koeficijent elastičnosti opruge

## POPIS SLIKA

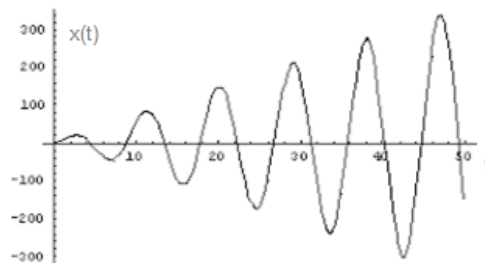
Slika 1. Vibracija mehaničkog sustava .....	5
Slika 2. Vibrometar .....	6
Slika 3. Klizni stol s dvije klizne vodilice .....	8
Slika 4. Klizni stol s četiri klizna ležaja i dvije cilindrične cijevne vodilice .....	8
Slika 5. Izgled otvorene tračne prizmatične profilirane klizne vodilice .....	10
Slika 6. Valjna vodilica s valjnim tijelima u obliku beskonačne vrpce .....	12
Slika 7. Primjer valjne vodilice s kotačićima .....	12
Slika 8. Karakteristike opruga: a) progresivna gumena opruga, b) ravna (cilindrična zavojna torzijska opruga), c) degresivna (tanjurasta opruga).....	15
Slika 9. Podjela opruga po vrsti opterećenja .....	18
Slika 10. Torzijske opruge .....	19
Slika 11. Lisnata opruga.....	21
Slika 12. Jednostavne lisnate opruge konstantne debljine: a), b) jednokraka pravokutna, odnosno trapezna, c), d) dvokraka pravokutna, odnosno trapezna.....	21
Slika 13. Zavojna opruga.....	22
Slika 14. Spiralna opruga .....	23
Slika 15. Tanjurasta opruga .....	24
Slika 16. Vlačna opruga .....	25
Slika 17. Tlačna opruga.....	25
Slika 18. Gumena opruga.....	26
Slika 19. Mjerni uređaj: detalj utega I spoja s oprugama .....	27
Slika 20. Pogled na cijeli mjerni uređaj.....	28
Slika 21. Uteg (korišteno u izradi praktičnog djela) .....	29
Slika 22. Grafičko objašnjenje RK 4 metode .....	32

Slika 23. Sile na utegu.....	34
Slika 24. Grafički prikaz Newtonove metode. ....	36
Slika 25. Konvergencija rješenja za položaj u vremenskom koraku $i+1$ .....	39
Slika 26. Parametri za dobivanje vibracijskog odziva .....	40
Slika 27. Utjecaj otpora na vodilici na vibracijski odziv .....	41

# 1. UVOD U VIBRACIJE

**Vibracije**, periodično ili ciklično gibanje mehaničkih sustava (strojevi, građevine i dr.) oko ravnotežnog položaja prouzročeno vanjskom periodičnom silom ili otklonom iz ravnotežnoga položaja. Za razliku od titranja, vibracije se javljaju s relativno malim otklonima od ravnotežnog položaja s obzirom na razmjere mehaničkog sustava. U svakom se titraju potencijalna energija sustava pretvara u kinetičku i obrnuto, uz djelomičan gubitak energije zbog otpora i trenja, koja u obliku topline napušta sustav.

Kada se sustav, pomaknut iz ravnotežnoga položaja, prepusti daljem gibanju, vibracije su slobodne prigušene ili su u idealnom slučaju neprigušene. Ako na sustav djeluje vremenski promjenljiva poremećajna (uzbudna) sila, vibracije su prisilne. Vibracije se proračunavaju s pomoću diferencijalnih jednadžba iz kojih se dobivaju amplitude te osobito važne vlastite frekvencije sustava, koje, ako su bliske frekvenciji poremećaja, dovode do znatnog povećanja amplituda tj. do rezonancije. Vibracije mogu djelovati štetno na ljudsko zdravlje, na udobnost vožnje i prouzročiti lomove konstrukcija. Namjerno izazvane koriste se kod mehaničkog sita, drobilica i dr. Smanjivanje ili povećavanje utjecaja vibracija postiže se različitim tehničkim zahvatima vezanima uz promjene krutosti ili ugradnjom dodatne mase. Torzijske vibracije pojavljuju se u rotorima strojeva, osovinama i drugim konstrukcijskim elementima opterećenima na uvijanje. Vibracije se mjere vibrometrima.



*Slika 1. Vibracija mehaničkog sustava*

**VIBROMETAR**, instrument za mjerenje vibracija strojeva, vozila, brodova, mostova, zgrada i dr. Mehanički vibrometar sastoji se od manje koncentrirane mase elastično ovješene u kućištu. Postavlja se tako da se kućište čvrsto oslanja na objekt kojemu se mjere vibracije. Zbog velike tromosti masa miruje s obzirom na kućište koje vibrira, pa relativni pomaci između mase i kućišta daju vrijednost vibracija.

Mehanooptički vibrometar optički povećava i projicira na ljestvicu pomake ticala prislonjenog uz objekt koji vibrira. Električni vibrometar pretvara mehaničke vibracije u električni napon promjenom električnog otpora, induktivnosti ili električnog kapaciteta mjernog elementa, pa se s pomoću promjena vrijednosti električnog napona mjere vibracije. Laserski Doppler vibrometar s pomoću lasera, zrcala i fotodiode omogućava mjerenje vibracija bez kontakta s površinom koja vibrira.



*Slika 2. Vibrometar*

## 2. VODILICA

**Vodilica** je strojni dio koji osigurava pravocrtno gibanje pomičnih dijelova prema nepomičnima. Vodilicama se, pri djelovanju vanjske sile, ostvaruje pravocrtno gibanje pomičnih dijelova u uređajima, aparatima, instrumentima i strojevima. Pomični i nepomični dio vodilice dijelovi su zglobova za pravocrtno gibanje. Mnogobrojne izvedbe vodilica posljedica su nastojanja konstruktora da se pri pravocrtnome gibanju postigne najmanji otpor, to jest trenje. Vodilice se prema načelu djelovanja dijele na:

- klizne vodilice,
- valjne vodilice,
- elastične vodilice.

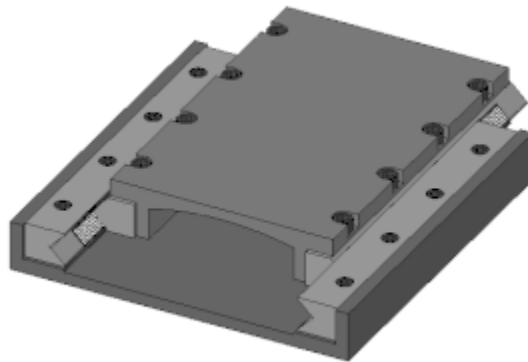
### 2.1. Klizna vodilica

Klizna vodilica ima neposredan dodir pomičnog dijela (klizača) i nepomičnog dijela (klizne staze) i zato pri vođenju nastaje trenje klizanja. Dodir klizača i klizne staze može biti površinski (niži zglob) ili na crti (viši zglob). Trenje je klizanja veće kod kliznih vodilica s površinskim dodirrom, no one zato podnose veća opterećenja.

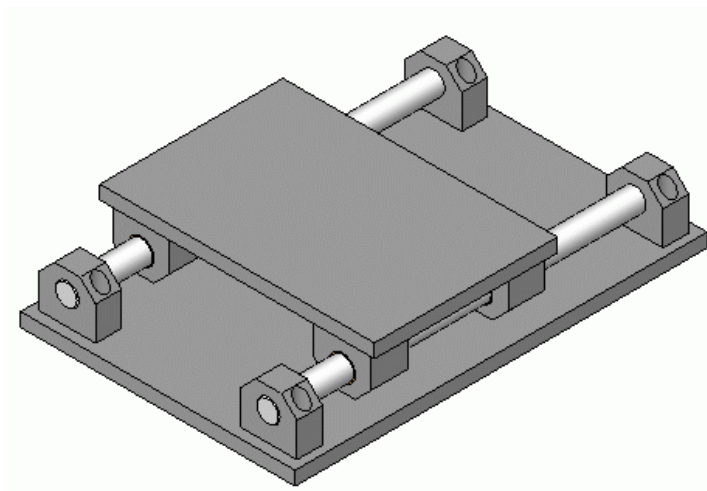
Da bi trenje klizanja bilo što manje, dijelovi kliznih vodilica se izrađuju od materijala s malim koeficijentom trenja ( $\mu$ ), dodirne površine se fino obrađuju i vodilice se podmazuju. Povrh malog koeficijenta trenja  $\mu$  važno je da su materijali otporni na trošenje i da imaju dobra adhezijska svojstva (prianjanje) prema mazivu. Najčešći materijali izrade jesu: čelik, aluminij i slitine aluminija, bronce, nodularni i sivi ljevovi, slitine titanija i polimerni materijali. Obično je klizna staza tvrđa od klizača.

Podmazivanje kliznih vodilica može biti hidrodinamično, hidrostatično i zračnostatično. Pri hidrodinamičnome podmazivanju između kliznih površina dovodi se mazivo pod atmosferskim tlakom. Na početku rada dolazi do takozvanog trzajnoga trenja koje je to izraženije što su brzine klizanja manje. Trzajno trenje prestaje nakon što klizač pri gibanju razmaže mazivo po kliznim površinama, to jest stvori jednolično tanak sloj

maziva. Pri hidrostatičnom ili zračnostatičnome podmazivanju neposredno prije i za vrijeme gibanja dovodi se mazivo ili zauljeni zrak pod većim tlakom pa nema trzajnoga trenja. Sredstva za podmazivanje vodilica ista su kao za klizne ležaje. Klizne vodilice dijele se prema obliku kliznoga tijela i prema međusobnom odnosu kliznoga tijela i klizne staze, to jest zatvaranju. Prema obliku klizača vodilice mogu biti: cilindrične, plosnate ili prizmatične, a prema zatvaranju: zatvorene i otvorene.



*Slika 3. Klizni stol s dvije klizne vodilice*



*Slika 4. Klizni stol s četiri klizna ležaja i dvije cilindrične cijevne vodilice*



## Zatvorene klizne vodilice

Kod zatvorenih kliznih vodilica klizač je učvršćen u svima smjerovima okomitim na pravac gibanja i može se izdvojiti samo po pravcu gibanja. Zato može doći do ukliještenosti klizača u kliznoj stazi. Ukliještenost nije moguća uz dovoljnu duljinu vođenja (duljina dodira klizača i klizne staze). Kada sila djeluje na pravcu uzdužne osi kliznoga tijela, do ukliještenosti ne može doći, jer je sila uvijek veća od sile trenja. No, kada sila djeluje ekscentrično na nekom kraku, ona stvara moment sile koji može izazvati ukliještenost. Za veću silu i veću duljinu vođenja, ukliještenost se može ukloniti. Ali kod većih duljina vođenja veće je trenje i zagrijavanje, a da bi se to spriječilo, konstruiraju se dvodirne klizne vodilice.

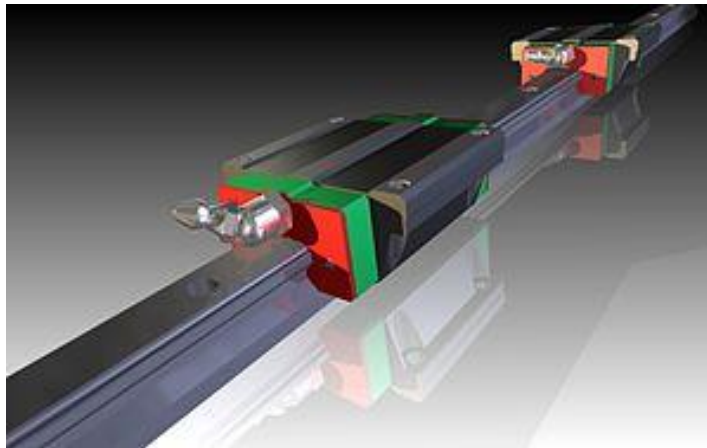
Kod cilindričnih zatvorenih kliznih vodilica, često treba onemogućiti okretanje kliznoga tijela u kliznoj stazi. To se postiže pogodnim konstrukcijskim rješenjima (na primjer pretvaranjem cilindričnog u translacijski zglob). Zatvorene klizne vodilice za točno vođenje moraju imati malu zračnost između kliznoga tijela i klizne staze. Zračnost manja od 0,5 mm omogućuje neprekidni sloj maziva i sprječava zaribavanja pri promjenama radne temperature. Zračnost se postiže izborom ovih labavih dosjeda:

- H7/g6, H7/h8, H7/h6 i H7/f7 iz sustava zajedničkoga provrta i
- h11/D11 i h9/D11 iz sustava zajedničke osovine.

Cilindrične klizne vodilice mogu imati puni i šuplji klizač. Vodilice sa šupljim klizačem (cijevne vodilice) česte su u preciznoj mehanici jer su lagane pa je sila vođenja mala.

## Otvorene klizne vodilice

Kod otvorenih kliznih vodilica može doći do prevrtanja kliznoga tijela jer je dodir s kliznom stazom osiguran samo u smjeru djelovanja sile teže. Kada je sila teža premala, na klizač treba djelovati dodatna sila (na primjer sila opruge). Prizmatičnim i plosnatim kliznim vodilicama treba se koristiti kada je potrebno dugotrajnije točno vođenje. Za te vodilice nisu potrebni fini dosjedi i stoga su jeftinije. Prizmatične i plosnate klizne vodilice mogu se koristiti s umetkom za ugađanje. Umetak omogućuje ugađanje zračnosti i zamjenjuje se novime kada se zbog trošenja zračnost poveća iznad dopuštene mjere.



*Slika 5. Izgled otvorene tračne prizmatične profilirane klizne vodilice*

## 2.2. Valjna vodilica

Valjna vodilica ima direktan dodir između klizača i klizne staze (pomičnog i nepomičnog dijela vodilice) jer su između umetnuta valjna tijela, koja mogu biti kuglice, valjčići, iglice i kotačići. Pri pravocrtnome gibanju pomičnoga dijela valjna se tijela okreću oko svoje osi, pa u valjnim vodilicama nastaje trenje valjanja ili kotrljanja. Materijali za valjne vodilice su isti kao za valjne ležaje. Mnogobrojne konstrukcijske izvedbe mogu se razvrstati u 3 skupine:

- cilindrične valjne vodilice:
  - cilindrična valjna vodilica s kavezom i
  - vodilica s kugličnim ležajima za pravocrtno vođenje,
- plosnate valjne vodilice:
  - slobodnovodeće valjne vodilice i
  - valjna vodilica s valjnim tijelima u obliku beskonačne vrpce,
- valjne vodilice s kotačićima.

Kod cilindrične valjne vodilice s kavezom između okrugloga pomičnoga dijela i staze valjna su tijela povezana kavezom, najčešće izrađenim od polimernoga materijala. Valjna vodilica s kugličnim ležajima za pravocrtno vođenje ima u tijelu kugličnoga ležaja nekoliko zatvorenih staza u kojima se pri vođenju gibaju kuglice povezane kavezom od poliamida.

Kod plosnatih valjnih vodilica su valjna tijela smještena između ravnih površina pomičnoga dijela i staze. Valjna tijela mogu biti povezana kavezom ili je vodilica bez kaveza. Valjna tijela mogu biti povezana u obliku beskonačne vrpce (poput gusjenice tenka). Kod vodilica bez kaveza (slobodnovodeće) valjna tijela se nalaze unutar žljebova između pomičnog i nepomičnoga dijela vodilice.

Valjne vodilice s kotačićima dobiju se ugradnjom dijelova koji se sastoje od nosača s osovinom na kojoj je kotačić. Potreban broj nosača s kotačićem pričvrsti se za kućište (ili postolje) konstrukcije. Ove su vodilice vrlo isplative jer se razmještaj i broj kotačića može prilagoditi zahtjevima konstrukcije. Umjesto kotačića mogu u nosaču biti poprječni kuglični ležaji. Takve vodilice imaju vrlo malo trenje.



*Slika 6. Valjna vodilica s valjnim tijelima u obliku beskonačne vrpce*



*Slika 7. Primjer valjne vodilice s kotačićima*

### 2.3. Elastična vodilica

Elastične vodilice imaju ugrađene opružne dijelove čijom se elastičnom deformacijom ostvaruje fino pravocrtno vođenje pomičnoga dijela. Dio koji se vodi veže se za opružne dijelove, a oni se pričvrste za nepomični dio vodilice. Pomični i nepomični dio nisu u dodiru pa nema trenja. Pomaci vođenoga dijela posljedica su djelovanja vanjskog opterećenja kojime se elastično deformira opružni dio. Reguliranjem vrijednosti opterećenja postiže se potreban pravocrtni pomak. Pravocrtno se vođenje može ostvariti sljedećim oprugama:

- ravna ili valovita membrana,
- valoviti cjevasti mijeh,
- tlačna ili vlačna zavojna valjkasta opruga,
- protusilnik stalne sile,
- konzolna opruga.

Pravocrtni pomaci elastičnih vodilica s membranama ili valovitim cjevastim mijehom najčešće se postižu djelovanjem fluida (tekućina ili plin) pod tlakom.

### 3. OPRUGA

Opruge su strojni dijelovi za elastično spajanje. Upotrebom prikladnog materijala i pogodnim oblikovanjem opruge se pod opterećenjem elastično deformiraju, a nakon prestanka djelovanja opterećenja poprimaju prvobitni oblik. Mehanički rad pretvaraju u potencijalnu energiju, a nju opet natrag u mehanički rad, tj. opruge akumuliraju rad.

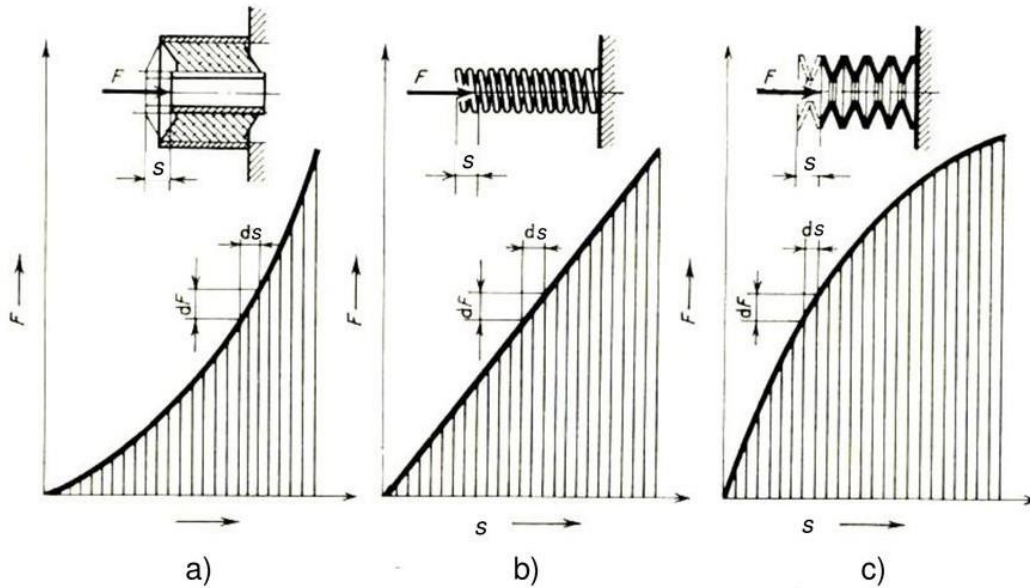
Glavna su područja upotrebe opruga: akumulacija rada (satni mehanizmi), ublažavanje udara (odbojnici željezničkih vozila, zavješene kotača, elastične spojke), ravnomjerna raspodjela opterećenja (željeznička i cestovna vozila), ograničenje sile (preše), mjerenje sile (dinamometri), regulacija (regulacijski ventili), elementi titranja ili ublaživanja titraja i dr. Prema vrsti opterećenja kojem su opruge izložene one se dijele na opterećene na savijanje, torziju, tlak ili vlak.

#### 3.1. Karakteristike i rad opruga

Pod karakteristikom opruge razumijeva se krivulja koja prikazuje međusobnu ovisnost njenog opterećenja i deformacije. Kako se opterećenje opruga mjeri silom  $F$ , a deformacija progibom, odnosno elongacijom ili kontrakcijom  $f$ , odnosno momentom  $M$  i kutom uvijanja  $\varphi$ , to je karakteristika opruge, ili tzv. njezina krutost  $c$  određena izrazom

$$c = \frac{dF}{df}, \quad \text{odnosno} \quad c = \frac{dM}{d\varphi}$$

Krutost se mjeri u  $\text{kp/mm}$ , odnosno u  $\text{kp mm/radian}$  i predstavlja silu, koja uzrokuje deformaciju opruge za jedinicu dužine, odnosno luka. Ta se vrijednost zove specifična ili jedinična sila. Već prema tome je li je  $c = \text{konst.}$ , raste ili opada s opterećenjem, karakteristika opruge je pravac, progresivna ili regresivna krivulja



Slika 8. Karakteristike opruga: a) progresivna gumena opruga, b) ravna (cilindrična zavojna torzijska opruga), c) degresivna (tanjurasta opruga).

Rad predan opruzi (prikazan na slici 8 šrafiranim površinama) za te dvije vrste opterećenja iznosi

$$A = \int_0^f Fdf, \quad A = \int_0^\varphi Md\varphi$$

a specijalno, kad su karakteristike opruga ravne, jednadžbama

$$A = \frac{1}{2} Ff, \quad A = \frac{1}{2} Md\varphi$$

### 3.2. Materijali opruga

Pri odabiru materijala za opruge mora se uzeti u obzir sposobnost oblikovanja i elastična svojstva materijala. Izbor materijala prvenstveno ovisi o uvjetima eksploatacije opruge:

- opruge za rad u normalnim uvjetima: ako se za ove opruge koristi nelegirani čelik, onda je to najčešće već patentirana žica sa 0,5 do 0,85 % ugljika. Patentiranje se izvodi tako da se austenitizirana žica provlači kroz olovnu kupku gdje se izotermno poboljša, a zatim se ohladi na zraku. Obično se nakon toga još hladno gnječi. Poslije izrade (motanja) izvodi se nisko popuštanje. Zbog slabe prokaljivosti nelegirani čelici se koriste samo za manje presjeke, a zbog slabe temperaturne postojanosti za rad na temperaturama samo do 80 °C. Za opruge koje se toplinski obrađuju poslije oblikovanja koriste se čelici legirani silicijem, manganom, kromom i manje vanadijem, uz srednji sadržaj ugljika (0,4 do 0,7 %). Legirni elementi povećavaju prokaljivost, postojanost popuštanju i mehanička svojstva materijala opruge. Silicij se rastvara u feritnoj rešetki, povećavajući čvrstoću materijala, a još više granicu tečenja, koja kod ovakvih materijala može dostići i 90 % vlačne čvrstoće. S druge strane, pri toplinskoj obradi na višim temperaturama, silicij povećava sklonost čelika jakom razugljčavanju i grubozrnatosti, pa se na površini dobije čisti ferit koji je neotporan na dinamička naprezanja. Karakteristika mangana je da osim što povećava svojstva čelika isto kao silicij, uzrokuje nejednoliki raspored uključina sulfida i oksida. Valjanjem one zauzmu vlaknasti raspored, pa čelik legiran manganom ima visoku žilavost u uzdužnom smjeru (lisnate opruge).
- opruge za rad na povišenim temperaturama: kod ovih opruga čelici su legirani prvenstveno kromom (do 1,5 %) koji sa željezom stvara složeni karbid, te sa drugim elementima (molibden, volfram i vanadij) koji stvaraju svoje temperaturno postojane karbide.
- opruge za rad u korozionoj sredini: problem korozije najjednostavnije i najjeftinije se rješava izradom opruga iz čelika iz prethodnih skupina, te njihovim oblaganjem antikorozijskim zaštitnim slojem. No, mnogo učinkovitije, ali zato i znatno skuplje, je izraditi opruge iz materijala otpornog na koroziju. To su prvenstveno nehrđajući čelici, te različite vrste bronci.

U praksi se za opruge najviše upotrebljavaju toplo valjani čelici koji se nakon kaljenja popuštaju, kako bi se povećala žilavost materijala. Najbolja svojstva čvrstoće postižu se upotrebom okrugle žice za opruge koja se izrađuje u različitim



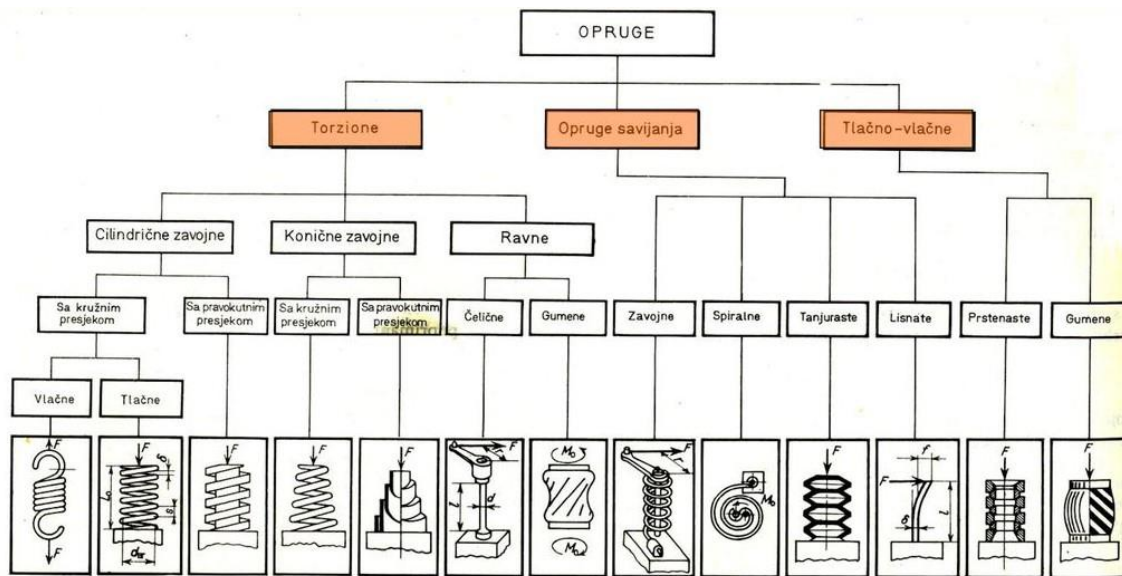
razredima kvalitete. Za hladnu izradu opruga postupcima rezanja, prešanja i namotavanja, koriste se hladno valjane čelične trake. Krutost opruge metalnih opruga ovisna je, kod vlačnih, tlačnih i savojnih opruga, o Youngovom modulu elastičnosti materijala opruge  $E$ , odnosno o smičnom modulu elastičnosti  $G$  kod torzijskih opruga.

### **3.3. Dopuštena naprezanja na opruge**

Dopušteno naprezanje za mirno (statičko) opterećenje opruge mora biti manje od granice razvlačenja  $\sigma_R$ , a dinamičko opterećenje opruge manje od dinamičke granice razvlačenja i ujedno manje od trajne dinamičke čvrstoće  $\sigma_{din}$ . Za torzijska naprezanja vrijede odgovarajuće vrijednosti čvrstoće pri torziji. Dopuštena su naprezanja opruga to manja od odgovarajućih čvrstoća njihovih materijala, što je eventualni lom opruge opasniji, što su veće nesigurnosti mehaničkih svojstava gotovih opruga i što su proračunom manje obuhvatljiva eventualna dopunska naprezanja. Kako je već spomenuto, podjela opruga obično se temelji na vrstama opterećenja i njima prilagođenim oblicima. Zbog svoje specifičnosti gumene su opruge u daljem izlaganju izdvojene u posebnu skupinu, bez obzira na to kakvom su opterećenju izložene.

### **3.4. Podjela opruga**

Podjela opruga obično se zasniva na vrstama opterećenja i njima prilagođenim oblicima. Gumene opruge se obično razmatraju kao posebne vrste opruga. Osnovna podjela opruga je prema vrsti glavnog naprezanja: dijele se na savojne (opruge opterećene na savijanje), vlačno-tlačne i torzijske opruge.



Slika 9. Podjela opruga po vrsti opterećenja

### 3.4.1. Torzijska opruge

Torzijska opruga je obično ravna opruga i u obliku okrugloga štapa upetoga na krajevima. Ravne torzijske opruge upotrebljavaju se kao prigušivači torzijskih vibracija (na primjer zglobna vratila na motornim vozilima), za mjerenje sile pritezanja kod momentnih ključeva, elastičnih spojki i slično.

**Ravne šipkaste (okrugle) torzijske opruge** - upotrebljavaju se kao prigušivači torzijskih vibracija (na primjer zglobna vratila na motornim vozilima), za mjerenje sile pritezanja kod momentnih ključeva, elastičnih spojki i slično. One djeluju opružno zakretanjem stanjenog struka opruge. Kod krajeva sa trokutastim ozubljenjem moguće je premještanje od zuba do zuba. Zbog zareznog djelovanja na mjestima učvršćenja krajevi opruge su pojačani, a prijelaz na struk pažljivo je zaobljen. Naknadno valjanje struka (sačmarenje pomoću čeličnih kuglica) ili fino brušenje povisuje dinamičku izdržljivost. Čvrstoća materijala se kreće i do  $1\ 500\ \text{N/mm}^2$ .

**Zavojna torzijska opruga** - nastaje kad se žica namotava u obliku zavojnice na valjak (valjkaste zavojne opruge) ili na stožac (stožaste zavojne opruge). Presjek žice obično je okrugao, iako se u praksi upotrebljavaju i zavojne torzijske opruge s

pravokutnim presjekom. Valjkaste zavojne torzijske opruge s okruglim presjekom se u praksi najviše upotrebljavaju. Obzirom na smjer opterećenja dijele se na tlačne i vlačne zavojne torzijske opruge.

**Tlačnim zavojnim torzijskim oprugama** - opterećenje djeluje u uzdužnom (aksijalnom) smjeru tako da se opruga tlači (njena dužina se prilikom opterećenja smanjuje). Obzirom da postoji opasnost od loma, prvenstveno kod dužih opruga, opruge su vođene sa svornjakom za vođenje promjera  $D_d$  (unutarnje vođenje) ili s čahurom za vođenje s promjerom  $D_h$  (vanjsko vođenje). Za opruge može se prilikom unutarnjeg vođenja uzeti  $D_d \approx (0,8 \dots 0,9) \cdot D_u$ , gdje je  $D_u$  unutarnji promjer opruge, a prilikom vanjskog vođenja  $D_h \approx (1,1 \dots 1,2) \cdot D_v$ , gdje je  $D_v$  vanjski promjer opruge. Tlačne zavojne torzijske opruge mogu se izrađivati u hladnom ili toplom stanju.

**Vlačnim zavojnim torzijskim oprugama** - sila djeluje u aksijalnom smjeru tako da se opruga pod utjecajem te sile rasteže (njena dužina se prilikom opterećenja povećava). Izrađuju se u hladnom ili toplom stanju.



*Slika 10. Torzijske opruge*

### **3.4.2. Opruge opterećene na savijanje**

Opruge opterećena na savijanje ili savojne opruge već prema svom obliku mogu preuzimati sile (lisnate i tanjuraste opruge) ili momente savijanja (spiralne i zavojne opruge).

**Lisnate opruge s konstantnim presjekom** - najjednostavniji primjer ovakve opruge je konzolno učvršćena lisnata opruga pravokutnog presjeka. Ako je opruga

opterećena silom  $F$  koja djeluje na kraju opruge, moment savijanja na proizvoljnom mjestu iznosi:

$$M_x = F \cdot x$$

Najveći moment savijanja nastaje na mjestu učvršćenja i ima odlučujući utjecaj pri dimenzioniranju opruge. Obzirom da su širina opruge i debljina po čitavoj dužini jednake, zbog promjenljivog momenta savijanja mijenja se i naprezanje, pa materijal nije optimalno iskorišten. Zbog toga se ovakve opruge u praksi koriste samo za mala opterećenja, prvenstveno u preciznoj mehanici kao dodirne opruge u raznim sklopkama ili pritisne opruge za ručke i slično. Za izradu ovakvih opruga prvenstveno se upotrebljavaju hladno valjane čelične trake prema DIN 17 222 i legure bakra prema DIN 17 670.

**Lisnate opruge jednake čvrstoće** - jako su opterećene opruge i opruge za cestovna i šinska vozila oblikovane su tako da je uzduž opruge naprezanje na savijanje približno konstantno. To znači da se moment otpora na savijanje presjeka opruge mijenja približno u istom odnosu kao i moment savijanja. Ako je poprečni presjek opruge pravokutnik s momentom otpora na savijanje:

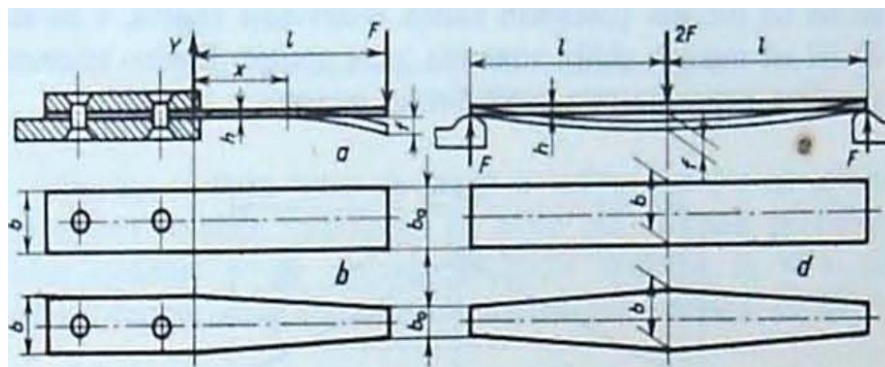
$$W_s = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

za postizanje gornje pretpostavke mora se uzduž opruge mijenjati širina ili debljina. Zbog jednostavnije izrade opruzi se obično u praksi mijenja širina, tako da se dobiva lisnata opruga "jednake čvrstoće". Ako se ova opruga razreže po širini na  $n$  jednakih listova koji se polože jedan na drugoga, dobiva se lisnata opruga jednake čvrstoće u sloju. Ako se upotrijebe dvije lisnate opruge i krajevi pojedinih listova odgovarajuće oblikuju dobiva se praktički oblik lisnate savojne opruge u sloju, takozvani gibanj, koji se često upotrebljava u cestovnim i šinskim vozilima. Njegovo dobro svojstvo je što ublažava udare zbog neravnog kolnika, što povoljno utječe na vožnju vozila. Lisnate opruge izrađuju se prvenstveno od toplo valjanih čelika za opruge prema DIN 17 221. Debljina listova i širina listova lisnatih opruga standardizirane su prema DIN 4 620.

Kako prilikom rada opruge ne bi došlo do poprečnog zamicanja, listovi su primjerno oblikovani i pričvršćeni posebnim prstenom. Osim toga, listovi su po sredini opruge međusobno povezani odgovarajućim dijelovima za pričvršćivanje, čime se osigurava jednakomjeran raspored opterećenja koje djeluje na pojedine listove. Gornji list je nešto produžen i oblikovan tako da se opruga može primjerno pričvrstiti.



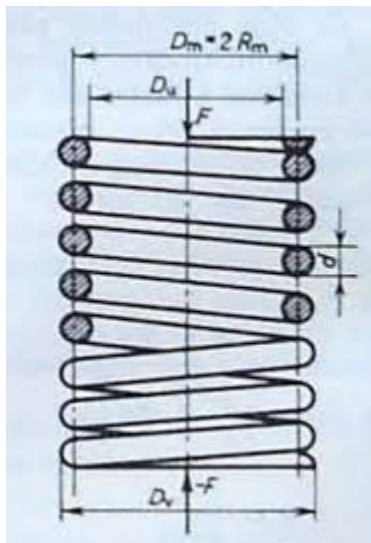
Slika 11. Lisnata opruga



Slika 12. Jednostavne lisnate opruge konstantne debljine: a), b) jednokraka pravokutna, odnosno trapezna, c), d) dvokraka pravokutna, odnosno trapezna.

**Zavojna opruga** - savijanja se upotrebljava prvenstveno kao povratna opruga u raznim ručicama i poklopcima. Jedan kraj opruge čvrsto je učvršćen na odgovarajuće

kućište ili konzolu, a drugi kraj je pokretan skupa s ručicom ili poklopcem. U osnovnom položaju opruga ima prednaprezanje silom  $F_p$ , koje pritišće ručicu ili poklopac na odgovarajući naslon. Prilikom aktiviranja opruge sila  $F_p$  se poveća na radnu silu  $F$ , koja osigurava okretanje ručice za željeni kut  $\alpha$  ili otvaranje poklopca. Nakon rasterećenja opruga je opet opterećena silom  $F_p$ .



Slika 13. Zavojna opruga

**Spiralne opruge** su savojne opruge (opterećene na savijanje) namotane u obliku Arhimedove spirale. Za izradu spiralnih opruga najčešće se upotrebljavaju okrugla žica za opruge prema DIN 17 223 i čelične trake od toplo valjanog čelika za opruge prema DIN 17 211. Općenito se ove opruge koriste kod satnih mehanizama, kazaljki mjernih instrumenata, elastičnih spojki i slično. Krajevi spiralnih opruga vođeni su s odgovarajućim nastavcima, pri čemu opterećenje djeluje samo na vanjskom ili samo na unutarnjem kraju. Pri opterećenju opruge pojedini navoji jednakomjerno se pomiču prema središtu opruge, tako da razmak između navoja ostaje čitavo vrijeme jednak za sve navoje. Ovisno o broju navoja i udaljenosti među njima, takva opruga može se okrenuti za vrlo velike kutove ( $i$  za više navoja). Pri tome među navojima mora još uvijek ostati određena zračnost jer bi u slučaju doticanja navoja nastali preveliki gubici zbog trenja.



*Slika 14. Spiralna opruga*

**Tanjuraste opruge** su stožasto oblikovani metalni prstenovi koji prenose opterećenja u uzdužnom (aksijalnom) smjeru. Najčešće se upotrebljavaju kao pritiski dijelovi u valjnim ležajevima, kao dijelovi upravljanja ventilima, prigušivači vibracija u strojevima za obradu i svugdje tamo gdje su zahtijevani manji progibi opruge pri velikim pogonskim silama. Ako se želi postići veći progib opruge, naniže se više tanjura u stupac opruge, ali suprotno okrenutih. Pri tome tanjuri mogu u stupac biti razmješteni u različitim kombinacijama. U takvim slučajevima potrebno je razlikovati parametre stupca opruge od parametara pojedine opruge. Povećanjem broja suprotno okrenutih tanjura povećava ukupan progib opružnog stupca, uz nepromijenjeno opterećenje. S druge strane, s povećanjem broja tanjura u pojedinom paketu uz nepromijenjen ukupan progib, opteretivost opruge se proporcionalno povećava. Koja mogućnost će se odabrati ovisi o konstrukcijskim zahtjevima korištenog stupca opruga.

Prilikom ugrađivanja tanjurastih opruga u stupac opruga potrebno je uzimati u obzir kako se dopuštena odstupanja pojedinih opruga zbrajaju, što može kod većih dužina stupaca opruga dovesti do većih odstupanja, te time do problema prilikom ugradnje opruge. Zbog toga u praksi vrijedi preporuka prema kojoj je dužina neopterećenog opružnog stupca  $L_0 \leq 3 \cdot D_z$ , gdje je  $D_z$  vanjski promjer opruge. Pri ugrađivanju tanjurastih opruga u stupac opruga potrebno je osigurati dobro vođenje opruge, a to se postiže svornjakom za vođenje (unutarnje vođenje) ili tuljcem za vođenje (vanjsko

vođenje). U praksi se preporučuje unutarnje vođenje. Površine dijelova za vođenje (svornjaka ili čahure) i sve naliježne površine opruge trebaju po mogućnosti biti primjereno toplinski obrađene (preporučljivo je cementiranje do dubine  $\approx 0,8$  mm i kaljenje na tvrdoću najmanje 55 HRc). Također, površina dijelova za vođenje treba biti glatka (preporučeno je precizno brušenje), čime se smanjuje trenje u slučaju dodira prstena opruga i dijela za vođenje. U svakom slučaju, između dijelova za vođenje i prstena opruge mora biti osigurana određena zračnost.



*Slika 15. Tanjurasta opruga*

### **3.4.3. Opruge opterećene na vlak i tlak**

Od metalnih opruga u tu skupinu ubrajaju se samo prstenaste opruge koje služe za preuzimanje tlačnih vanjskih sila. Slično kao i tanjuraste i te opruge sastavljaju se od dijelova (elemenata). To su različito oblikovani vanjski i unutrašnji prstenovi s međusobnim dosjednim površinama zakošenim prema osi pod stanovitim kutom. Izrađuju se od ugljikovih čelika s naknadnim kaljenjem.

Te opruge pod opterećenjem dobivaju progib na taj način, što se vanjski prstenovi šire, a unutrašnji stežu, pri čemu dolazi do klizanja njihovih površina jednih po drugima. Pri tome se pojavljuju tangencijalna naprezanja na vlak u vanjskim, a na tlak u unutarnjim prstenovima. U procesu je važno i trenje. Zbog trenja pod opterećenjem, primljeni rad opruge sastoji se od mehaničkog rada utrošenog za elastično deformiranje i rada



utrošenog za svladavanje trenja, čiji rad opruga predaje kad se rastereti, manji je od rada kojega opruga proizvodi kod povratnog hoda opet za rad koji se pri tome utroši na trenje.

Bitno je provjeriti i minimalnu zračnost među susjednim vanjskim, odnosno unutrašnjim prstenovima, koja, da bi djelovanje opruge bilo osigurano, ne smije biti prekoračena u radu. Prigušni rad prstenastih opruga razmjerno je velik, a progib malen. Osim toga, kad su ispravno podmazane, mogu raditi i do 5 godina bez nadzora. Zbog tih svojstava mnogo se upotrebljavaju u odbojnicima željezničkih vozila a i za druge namjene, na primjer u prešama, valjaoničkim stanovima, rudarstvu, brodogradnji i gradnji zrakoplova.



*Slika 16. Vlačna opruga*



*Slika 17. Tlačna opruga*

**Gumene opruge** upotrebljavaju se uglavnom za prigušenje titranja i udara, kao na primjer opruge za temelje ili opruge uložaka elastičnih spojki. Vulkanizirana guma između metalnih ploča ili tuljaka, može se opteretiti na odrez ili smik, a i na tlak. Guma (kauču) se ne može stlačiti (komprimirati). Ona može promijeniti svoj oblik, ali ne i obujam. Kada bi gumu zatvorili sa svih strana, ona bi izgubila svoja elastična svojstva. Da se olakša vulkaniziranje gumene mješavine, dijelovi moraju biti približno jednake debljine, ali ne suviše debeli. Zbog zarezne osjetljivosti, treba izbjegavati oštre bridove (zaobljenja ili rebra su povoljna).

Kao materijal se koristi prirodna guma, buna-S, perbunan-guma i druge. Buna i perbunan su sintetičke gume (umjetna guma). Dugotrajnim djelovanjem svjetla, topline i kisika guma stari i to tako da umjetna guma otvrdne, a prirodna omekša, uz stvaranje napuklina. Vlačna naprezanja pospješuju starenje (vlačne opruge izbjegavati!). Sintetička guma je manje od prirodne gume osjetljiva na toplotu, ulje i benzin. Između  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$  i  $-70\text{ }^{\circ}\text{C}$  guma smrzava, postaje tvrda i krhka. Gume koje se koriste za opruge imaju tvrdoću od 40 do 70 Shore-A. Od različitih vrsta guma za opruge se upotrebljavaju one koje imaju najveću čvrstoću na vlak. Ti se materijali dijele u skupine prema tvrdoći po Shoreovoj skali; razlikuju se tvrde, srednje i meke gume (s odgovarajućim tvrdoćama po Shoreu od 80, 90, od 50 do 80 i manje od 50). O tvrdoći tih gumenih materijala ovisna je i veličina njihovih modula elastičnosti i klizanja.



*Slika 18. Gumena opruga*

## 4. MJERNI UREĐAJ S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE

Za izradu postolja koristila se željezna kvadratna cijev. Donji dio postolja dugačak je ~800mm u obliku velikog slova H, na njegovim krajevima okomito su postavljene dvije cijevi dužine ~400mm. Na njima se nalazi fini komad drveta valjkastog oblika prepolovljenom na pola zbog finijeg prelaska užeta pod utjecajem opterećenja od strane utega, užad su pričvršćena na vanjskoj strani.

Radi dodatne stabilnosti zavarene su dvije cijevi jedna sa svake strane. Zbog smanjena linearnih vibracija na dvije okomito postavljene cijevi dodatno su pričvršćene vijcima dvije cijevi dužine ~1000mm koje su na vrhu zavarene za manju cijev dužine od ~150mm do ~200mm. Na sredini donjeg dijela postolja okomito se smjestila valjkasta cijev dužine ~500mm na koju je smješteno sjedište za utege i ležajevi na koje je spojeno uže i pripadajuće opruge.

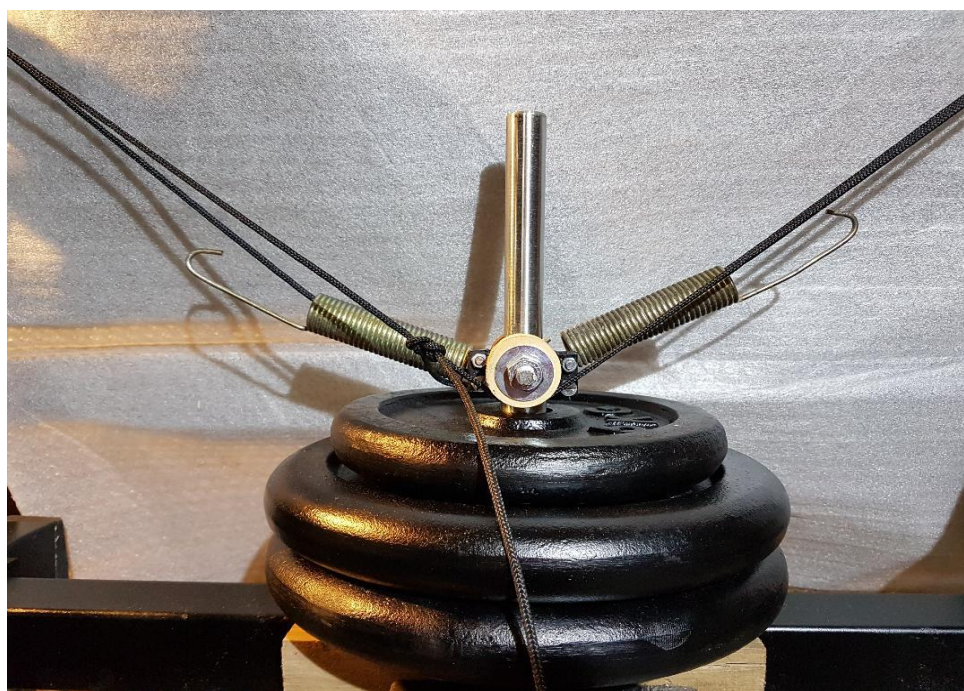


*Slika 19. Mjerni uređaj: detalj utega i spoja s oprugama*



*Slika 20. Pogled na cijeli mjerni uređaj*

Uteg je tijelo određene mase koje služi za uravnoteženje neke naprave ili kao mjera mase mjernoga uređaja. Materijal utega i oblik utega su dva najstroža tehnička propisa koje moraju zadovoljiti utezi kako bi bili standardizirani odnosno kako bi mogli biti svrstani u određeni razred točnosti utega. Utezi razreda E su utezi najveće kvalitete i točnosti i takvi utezi moraju biti napravljeni od posebnih materijala koji su dugotrajniji i otporniji. Tvrdoća materijala i njegova otpornost na habanje moraju biti najmanje jednake tvrdoći i otpornosti.



*Slika 21. Uteg (korišteno u izradi praktičnog djela)*

## 5. JEDNADŽBE GIBANJA

Jednadžba gibanja je svaka fizikalna jednadžba kojom se opisuje neko gibanje. Za materijalnu česticu ili množstvo čestica jednadžba gibanja temelji se na drugome Newtonovu zakonu gibanja:

$$F = m \cdot a$$

prema kojem se iz izračunanog ili izmjerenog ubrzanja  $a$  uvijek može odrediti sila  $F$  koja djeluje na česticu mase  $m$  (dinamički sustavi). Najjednostavniji je oblik jednadžbe gibanja:

$$m \cdot a = \sum_{i \neq j} F_{ij}$$

pri čemu se stvarne sile koje djeluju na tijelo u smjeru ubrzanja  $a$  uračunavaju s pozitivnim, a one suprotnoga smjera s negativnim predznakom. Za dva tijela jednadžbe gibanja glase:

$$m_1 \cdot a_1 = F_{12}$$

$$m_2 \cdot a_2 = F_{21}$$

gdje je iskorišten treći Newtonov aksiom sile  $F_{12}$  i protusile  $-F_{21}$ , koje su između dvaju tijela jednako velike, ali imaju suprotan smjer. Jednadžbe gibanja za sustav vezanih čestica pišu se na temelju D'Alembertova načela.

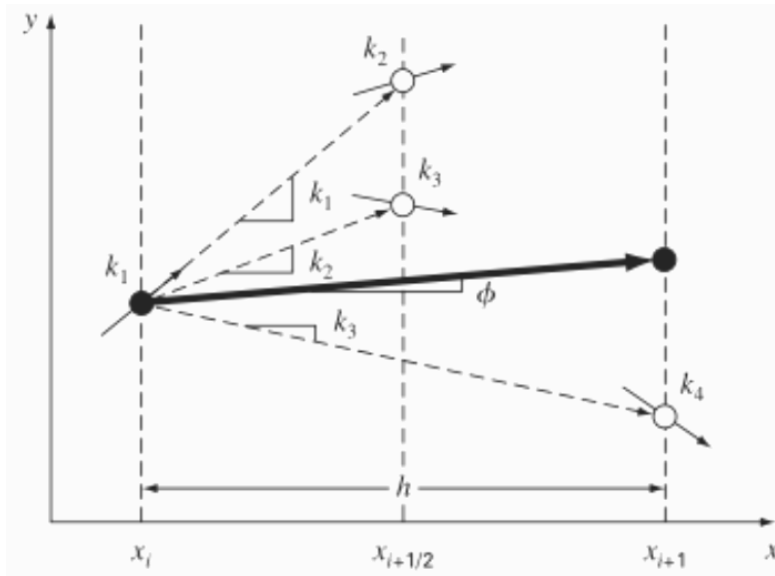
Newtonove jednadžbe gibanja jedne ili množstva čestica u općim koordinatama sustava  $i$  komponentama brzine Lagrangeove su generalizirane jednadžbe, odnosno Hamiltonove kanonske jednadžbe gibanja, ako se koristi Hamiltonova funkcija sustava (energetsko stanje) ovisna o općim impulsima i prostornim koordinatama. Prijelaz na kvantnu mehaniku provodi se tako da se opće koordinate impulsa i prostora zamijene matricama ili kvantnomehaničkim operatorima. Relativističke jednadžbe gibanja čestica pišu se s pomoću četverovektora brzine i akceleracije, kao invarijantne jednadžbe gibanja u četverodimenzionalnome prostoru.

## 5.1. Runge – Kutta metoda

Runge-Kutta metode su obitelj iterativnih metoda, koje se koriste za približavanje rješenja uobičajenih diferencijalnih jednažbi. Takve metode koriste diskretizaciju za izračunavanje rješenja u malim koracima. Aproksimacija "sljedećeg koraka" izračunava se iz prethodnog, zbrajanjem s izraza.

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

Metoda Runge-Kutta četvrtog reda, također poznata i kao "RK4" ili "metoda Runge-Kutta", jedna je od najpopularnijih metoda rješavanja. Omogućuje vrlo dobru ravnotežu između računskih troškova i točnosti. Koristi se kao način rješavanja u mnogim programima, uključujući SciPy, JuliaDiffEq, Matlab, Octave i Mathematica. Preko metoda četvrtog reda, dobitak u točnosti nadoknađuje se složenošću. Za RK1 do RK4 potreban je broj koraka (ili stupnjeva) isti kao i redoslijed, ali ne vrijedi za verzije višeg reda (npr. RK4: 4 koraka, RK5: 6 koraka). Kao što smo spomenuli Runge-Kutta je skup metoda. Slučaj n-reda zahtjeva slobodne parametre, po jedan za svaku fazu implementacije, također poznat kao Butcher tableau. RK1, s jednom fazom, jednak je Eulerovoj metodi. RK2, s dvije etape, može se implementirati kao Heunova metoda, Metoda srednjeg toka ili Ralstonova metoda, ovisno o tablici.



Slika 22. Grafičko objašnjenje RK 4 metode

Počinjemo od točke  $y = f(x_i)$  i želimo približiti  $f(x_i + h)$

Korak 1:

Počnite od  $y$ , s početnom aproksimacijom  $k_1$  iz Eulerove metode, pronalazeći  $k_2$ .

Korak 2:

Započnite s  $y$  od  $k_2$  i ponovno procijenite u sredini, pronalazeći  $k_3$ .

Korak 3:

Započnite s  $y$  od  $k_3$  i procijenite na krajnjoj točki pronalazeći  $k_4$ .

Korak 4:

Aproksimacija sljedećeg koraka dana je ponderiranim prosjekom ove četiri  $k$  vrijednosti

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4,$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$



## 5.2. Adams - Bashforth / Adams – Moulton metode

Adamove metode temelje se na ideji približavanja integrala polinomu u intervalu  $(t_n, t_{n+1})$ . Korištenje polinoma  $k$ th reda rezultira metodom  $k + 1$  reda. Postoje dvije vrste Adamovih metoda, eksplicitna i implicitna vrsta. Eksplicitni tip naziva se metodama Adams-Bashforth (AB), a implicitni tip naziva se metodama Adams-Moulton (AM).

Metode AB i AM prvog reda su jednostavno napredna i nazadna Eulerova metoda. Verzije drugog reda (dobivene korištenjem linearnog interpolanta) ovih metoda su prilično popularne. Adams-Bashforth (AB2) metoda drugog reda je dana pomoću

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f(y_n, t_n) - f(y_{n-1}, t_{n-1}))$$

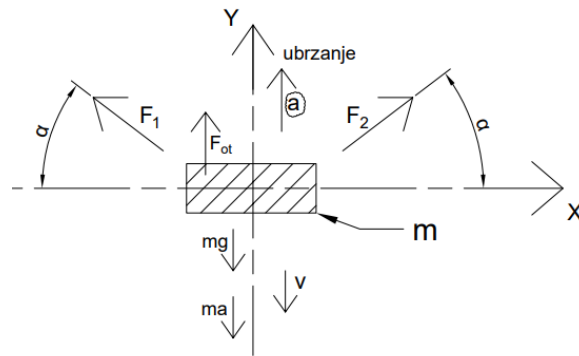
Imajte na umu da je metoda AB2 izričita i stoga samo uvjetno stabilna. Štoviše, metoda AB2 zahtijeva rješenje iz  $n-1$  i  $n$ -tog koraka da bi se pronašlo rješenje na  $n + 1$  koraku.

Adams-Moulton (AM2) drugog reda implicitna je tehnika koja se ponekad naziva i trapezoidnim pravilom. Vremenska jednačba za AM2 dana je s

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(y_{n+1}, t_{n+1}) + f(y_n, t_n))$$

Ovo je mnogo skuplje u usporedbi s eksplicitnom metodom AB2. Međutim, budući da je implicitna tehnika, AM2 ne trpi numeričku nestabilnost, AB2 je za relativno velike vrijednosti vremenskog koraka. Još jednom, riječ je o zamjeni između stabilnosti i računskih troškova, jer su i AM2 i AB2 drugog reda točni.

### 5.3. Jednadžba gibanja i utjecaj otpora za opisani mjerni uređaj



Slika 23. Sile na utegu

$$F_{ot} = \mu * F_n$$

$$F_1 = c_1 * \Delta l_1$$

$$F_2 = c_2 * \Delta l_2$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_n = (F_2 - F_1) \cos \alpha$$

$$\sum F_y = 0$$

$$(F_1 + F_2) * \sin \alpha + (F_2 - F_1) * \cos \alpha * \mu = ma + mg \text{ (Jednadžba gibanja)}$$

## 6. NUMERIČKE METODE RJEŠAVANJA VIBRACIJE KRUTIH TIJELA

### 6.1. Eksplicitna integracija

Jedna od numeričkih metoda integracije je eksplicitna metoda. Sastoji se o toga da se predvidi stanje u trenutku  $t+\Delta t$  na osnovu poznatog stanja u tom trenutku  $t$ . U metodi eksplicitne integracije nije potrebo računati matricu krutosti. Na prvu se to može činiti dobro, no upravo je to razlog samo uvjetne stabilnosti ove metode. Kako bi se zadovoljili uvjeti stabilnosti eksplicitne metode, korak integracije mora biti dovoljno mali što diktira veličina najmanjeg konačnog elementa. Najčešće se koristi za kratke analize (npr. udarac, sudar, nepravilnosti i slično). Kada se govori o integracijskoj jednadžbi gibanja za sustave diskretizirane konačnim elementima, među najpoznatijim eksplicitnim metodama integracije je metoda centralnih razlika. Aproksimacija prve i druge derivacije pomaka po vremenu se metodom središnjih razlika mogu pisati u obliku:

$$\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t} (\dot{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} - \dot{u}^{t-\frac{1}{2}\Delta t})$$

$$\dot{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (u^{t+\Delta t} - u^t)$$

### 6.2. Metoda centralnih razlika

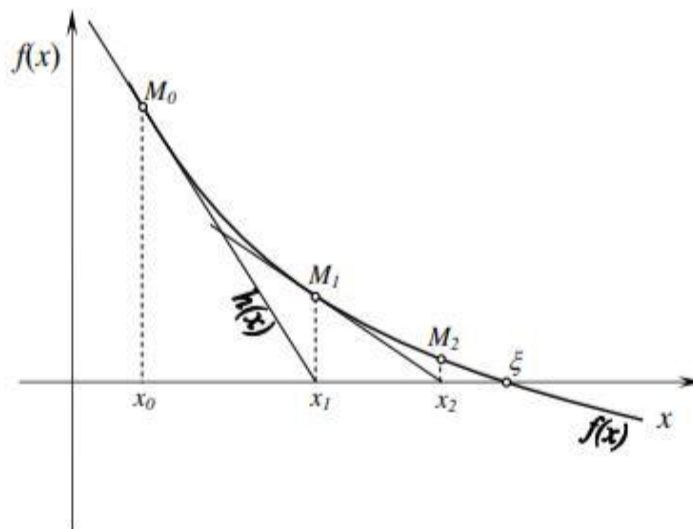
Ova metoda najčešće se koristi kada se može izraziti dijagonalna matrica masa i time efikasno, uz relativno mali korak diskretizacije provoditi integracija uz zanemarivanje prigušenja. Kod metode centralnih razlika ne treba računati matricu krutosti čitavog sklopa konačnih elemenata, jer se može rješavati na nivou elementa, čime se efektivno mogu rješavati sustavi velikog reda. Nedostatak eksplicitne metode je to, da bi se postigla stabilnost rješenja, korak integracije mora biti dovoljno malen, tj. mora biti zadovoljen određen uvjet gdje je  $T_n$  – najmanji period oscilacije sklopa konačnih elemenata, a  $n$  - broj stupnjeva slobode. Metoda centralnih razlika nema nikakvo numeričko prigušenje što pri odabiru jako malog može rezultirati velikim oscilacijama u

vremenskoj domeni zbog obuhvaćanja fenomena pojave jako visokih frekvencija. Prikaz jednačbe glasi:

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_n}{n}$$

### 6.3. Newtonova metoda

Newtonova metoda je jedna od najpoznatija metoda za numeričko rješavanje jednačba. Newtonova metoda je metoda drugog reda točnosti, što u praksi znači da se sa svakom integracijom udvostručava broj značajnih rješenja. Ipak, veoma je važno da početna aproksimacija bude što bliže rješenju, pošto se može dogoditi da procedura konvergira prema nekom drugom korijenu ili da divergira. Ipak, prilikom korištenja Newtonove metode treba imati na umu da je za neke funkcije vrlo teško analitički izračunati prvi izvod, a za neke funkcije to u opće nije moguće. Ova metoda je originalno predstavljena kao bezuvjetno stabilna integracijska shema s konstantnim prosječnim ubrzanjem i u tom slučaju je  $\alpha=1/4$  te  $\delta=1/2$ . Ukoliko nije moguć prvi izvod Newtonove metode, u takvim slučajevima koriste se neke druge metode, kao što je modifikovana Newtonova metoda.



Slika 24. Grafički prikaz Newtonove metode.

## 6.4. Eulerova metoda

Eulerova metoda predstavlja najjednostavniju metodu za rješavanje inicijalnog problema oblika:

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$$

Eulerova metoda je metoda prvog reda, jer se u donjoj jednadžbi pojavljuje prva potencija od  $h$ . To u ujedino znači da je Eulerova metoda nije jako točna i sporo kovengira prema rješenju, a oblik jednadžbe je:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - f(x, y(x)) = 0(h)$$

Razlikujemo dvije metode implicitnu i eksplicitnu Eulerovu metodu.

### 6.4.1. Implicitna Eulerova metoda

Formula za implicitnu Eulerovu metodu se dobiva ako se promatra točka sa indeksom  $(n+1)$  i u njoj primijeni formula za diferenciranje unazad, pa se dobije konačan gotovi oblik implicitne Eulerove metode:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Osnovne karakteristike implicitne Eulerove metode su:

- Potrebna je samo jedna poznata točka, pa metoda spada u jednokoračne metode
- Potrebo je sam jedno izračunavanje izvoda funkcije po koraku
- Vrijednost  $y_{n+1}$  zavisi od vrijednosti  $f_{n+1}$ , pa je metoda implicitna
- Može se pokazati da je greška izračunavanja vrijednosti  $y_{n+1}$  drugog reda, pa je greška koja se akumulira nakon  $n$  koraka, prvog reda

### 6.4.2. Eksplicitna Eulerova metoda

Formula za eksplicitnu Eulerovu metodu se može dobiti iz jednadžbe Cauchyjevog problema, ako se prvi izvod aproksimira pomoću formule za diferenciranje unaprijed, dobije se konačni gotovi oblik eksplicitne Eulerove metode:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

Osnovne karakteristike eksplicitne Eulerove metode

- potrebna je samo jedna poznata točka, pa metoda spada u jednokoračne metode (metode jedne poznate točke)
- potrebno je samo jedno izračunavanje izvoda funkcije po koraku
- metoda je eksplicitna, jer  $f_n = f(t_n, y_n)$  ne zavise od  $y_{n+1}$
- može se pokazati da je greška izračunavanja vrijednosti  $y_{n+1}$  drugog reda (ova greška se pravi u svakom iterativnom koraku i naziva se lokalna greška), pa je greška koja se akumulira nakon  $n$  koraka, (tzv. globalna greška) prvog reda

### 6.5. Numerička metoda rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžba

Diferencijalne jednadžbe višeg reda mogu se svesti u sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Na taj način, obje vrste problema se mogu numerički riješiti na isti način, tj. korištenjem istih metoda. Svaka od diferencijalnih jednadžbi u sustavu jednadžba se može riješiti kao pojedinačna diferencijalna jednažtba koristeći različite numeričke metode. Jedina razlika je u tome što se mora voditi posebna pažnja o redosljedu računanja. Također, veličina koraka mora biti jednaka za sve jednadžbe.

$$y' = f(t, y, z)$$

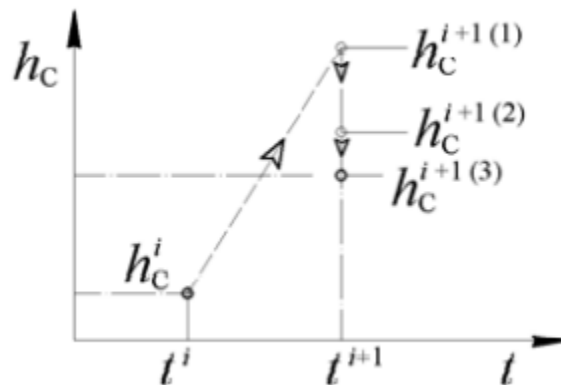
$$z' = f(t, y, z)$$

## 6.6. Metoda pretpostavljenog rješenja

Jedna od najstarijih metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi je metoda pretpostavljenog rješenja. U toj metodi pretpostavlja se oblik rješenja diferencijalne jednadžbe prema očekivanom obliku, parametrima jednadžbe i fizici problema. U jednokoračnim metodama je cilj pronaći dovoljno dobro rješenje, za primjerice pomak, nakon jednog vremenskog koraka koristeći podatke iz trenutnog, dok se u višekoračnim metodama koriste podaci iz nekoliko prethodnih koraka, što doprinosi točnosti i stabilnosti metode. Višekoračne metode imaju značajnu prednost u slučaju računanja vibracijskog odziva sustava u mnogo ciklusa, jer se greška u svakom koraku može pribrajati grešci prethodnog koraka, ako metoda nema dobro postavljenu kontrolu greške.

## 6.7. Konvergencija rješenja u svakom vremenskom koraku

Za rješavanje vibracijskog odziva je kao najjednostavnija metoda odabrana eksplicitna Eulerova metoda. U svakom vremenskom koraku proračun je proveden iterativno, po principu prediktor – korektor.



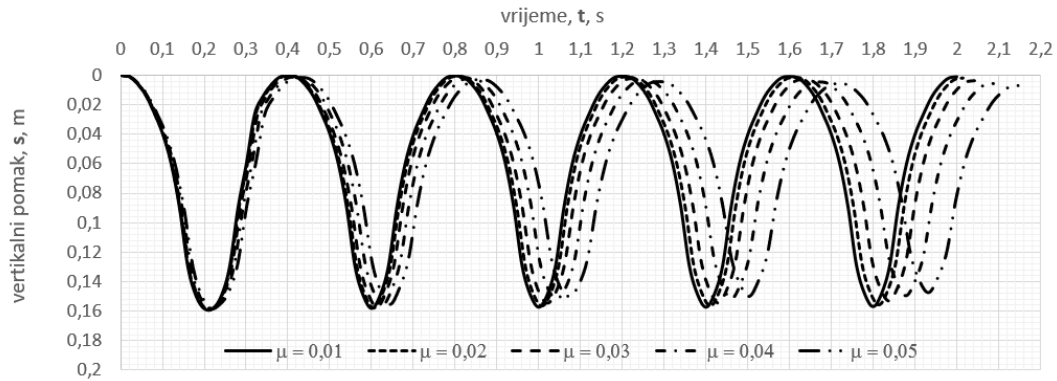
Slika 25. Konvergencija rješenja za položaj u vremenskom koraku  $i+1$

m=0,05 k=1,028

Vremenski pomak	Vrijeme	Vremenski pomak	Vrijeme	Vremenski pomak	Vrijeme	Vremenski pomak	Vrijeme
0	0	0,536391	0,040395	1,072782	0,150231	1,609173	0,041516
0,021456	0,001	0,557847	0,05985	1,094238	0,142407	1,652084	0,018235
0,042911	0,006	0,579302	0,089033	1,115693	0,123997	1,67354	0,011072
0,064367	0,014	0,600758	0,127944	1,137149	0,087178	1,694995	0,006595
0,085823	0,026	0,622213	0,147399	1,158604	0,059563	1,716451	0,0057
0,107278	0,04	0,643669	0,155667	1,18006	0,041153	1,737907	0,006595
0,128734	0,06	0,665125	0,144869	1,201516	0,028266	1,759362	0,011072
0,150189	0,09	0,68658	0,125943	1,222971	0,01722	1,780818	0,018235
0,171645	0,13	0,708036	0,088092	1,244427	0,009856	1,802274	0,02898
0,193101	0,15	0,729492	0,059704	1,265883	0,005254	1,823729	0,041516
0,214556	0,1585	0,750947	0,040779	1,287338	0,004333	1,845185	0,059425
0,236012	0,155667	0,772403	0,027531	1,308794	0,005254	1,86664	0,086287
0,257468	0,147399	0,793859	0,016176	1,33025	0,009856	1,888096	0,122104
0,278923	0,127944	0,815314	0,008606	1,351705	0,01722	1,909552	0,140013
0,300379	0,089033	0,83677	0,003875	1,373161	0,028266	1,931007	0,147624
0,321835	0,05985	0,858226	0,002928	1,394616	0,041153	1,952463	0,137684
0,34329	0,026776	0,879681	0,003875	1,416072	0,059563	1,973919	0,120263
0,364746	0,015103	0,901137	0,008606	1,437528	0,087178	1,995374	0,085422
0,386201	0,007321	0,922592	0,016176	1,458983	0,123997	2,01683	0,059291
0,407657	0,002457	0,944048	0,027531	1,480439	0,142407	2,038286	0,04187
0,429113	0,001484	0,965504	0,040779	1,501895	0,150231	2,059741	0,029676
0,450568	0,002457	0,986959	0,059704	1,52335	0,140013	2,081197	0,019223
0,472024	0,007321	1,008415	0,088092	1,544806	0,122104	2,102653	0,012255
0,49348	0,015103	1,029871	0,125943	1,566262	0,086287	2,124108	0,0079
0,514935	0,026776	1,051326	0,144869	1,587717	0,059425	2,145564	0,007029

Slika 26. Parametri za dobivanje vibracijskog odziva





Slika 27. Utjecaj otpora na vodilici na vibracijski odziv

Rezultat u dijagramu je dobiven primjenom jednokoračne prediktor – korektor metode temeljene na Eulerovoj eksplicitnoj metodi kao prediktor izračunu. Konvergencija je provjerena smanjenjem vremenskog koraka do vrijednosti za koju rješenje nije mijenjalo više od 1% prema prethodnom vremenskom koraku. Vrijednost faktora otpora je odaberen prema podacima o suhom trenju čelika na čeliku s određenim parametrima stanja površine i podmazanom stanju površine.

## 7. ZAKLJUČAK

Zadatka ovog rada je procjena utjecaja otpora kotrljanja na vodilici na vibracijski odziv. U ovom završnom radu opisana je funkcija, glavni dijelovi i područje mjerenja ispitnog postolja. Opisani su dijelovi samog sklopa korištenog u praktičnom djelu rada. Također je prikazan utjecaj otpora kotrljanja na gibanje utega odnosno jednadžbu gibanja, te numeričkom metodom analiziran odziv za slučaj idealnog i realnog vođenja s parametreski postavljenom bočnom silom na vodilici. Očekivano je da je s povećanjem faktora otpora na vodilici smanjuju se amplitude i produljuje period. Rezultat je dobiven pomoću korištenja Eulerove eksplicitne metode. Plan je provesti mjerenje na stvarnom uređaju.

## LITERATURA

vibracije. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020. <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=64462>>.

Pristupljeno 29. 4. 2020.

<https://hr.wikipedia.org/wiki/Vodilica>

Pristupljeno 30. 4. 2020.

vibrometar. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020. <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=64469>>.

Pristupljeno 3. 5. 2020.

[https://tehnika.lzmk.hr/tehnickaenciklopedija/elementi\\_strojeva\\_4\\_opruge.pdf](https://tehnika.lzmk.hr/tehnickaenciklopedija/elementi_strojeva_4_opruge.pdf)

Pristupljeno 7. 5. 2020.

[https://hr.wikipedia.org/wiki/Jednad%C5%BEba\\_gibanja](https://hr.wikipedia.org/wiki/Jednad%C5%BEba_gibanja)

Pristupljeno 17. 5. 2020.

<https://tpaschalis.github.io/rk4-explained/>

Pristupljeno 21. 5. 2020.

[http://web.mit.edu/10.001/Web/Course\\_Notes/Differential\\_Equations\\_Notes/node6.html](http://web.mit.edu/10.001/Web/Course_Notes/Differential_Equations_Notes/node6.html)

Pristupljeno 24. 5. 2020.

<https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:128:109670>

Pristupljeno 26. 8. 2020.

## LITERATURA ZA SLIKE

Slika 1. <http://e.math.hr/old/vibracije/index.html>

Pristupljeno 29. 4. 2020.

Slika 2. <https://www.batterfly.com/shop/en/extech-vb500>

Pristupljeno 30. 4. 2020.

Slika3. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/41/Linear\\_table\\_rail\\_guide\\_animated.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/41/Linear_table_rail_guide_animated.gif)

Pristupljeno 3. 5. 2020.

Slika 4. [https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Linear-table\\_animated.gif](https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Linear-table_animated.gif)

Pristupljeno 3. 5. 2020.

Slika5. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linear\\_Bearing\\_Guide\\_way.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linear_Bearing_Guide_way.jpg)

Pristupljeno 3. 5. 2020.

Slika 6. <https://hr.wikipedia.org/wiki/Vodilica#/media/Datoteka:KugUmLau.jpg>

Pristupljeno 3. 5. 2020.

Slika 7. <https://hr.m.wikipedia.org/wiki/Datoteka:Ecoline.jpg>

Pristupljeno 7. 5. 2020.

Slika 8. [https://hr.wikipedia.org/wiki/Datoteka:Opruge\\_1.png](https://hr.wikipedia.org/wiki/Datoteka:Opruge_1.png)

Pristupljeno 7. 5. 2020.

Slika 9. Podjela opruga po vrsti opterećenja <https://bib.irb.hr/datoteka/321780.ES-skripta-760-kon.pdf>

Pristupljeno 17. 5. 2020.

Slika 10. <https://www.imenik-podjetij.si/firma/56961405/vrc-podjetje-za-proizvodnjo-vzmeti-in-zicnih-izdelkov-doo>

Pristupljeno 17. 5. 2020.

Slika 11. [https://www.wikiwand.com/hr/Lisnata\\_opruga](https://www.wikiwand.com/hr/Lisnata_opruga)

Pristupljeno 17. 5. 2020.

Slika 12. <https://www.wikiwand.com/hr/Opruga>

Pristupljeno 21. 5. 2020.

Slika 13. [https://www.wikiwand.com/hr/Zavojna\\_opruga](https://www.wikiwand.com/hr/Zavojna_opruga)

Pristupljeno 21. 5. 2020.

Slika 15. <https://www.hoffmann-group.com/HR/hr/rotometal/Modularno-narezivanje/Rezervni-dijelovi/Tanjurasta-opruga/p/237524->

Pristupljeno 24. 5. 2020.

Slika 16. <https://eshop.wuerth.com.hr/A/hr-HR/Artikal/Sifra/50621060/vlacna-opruga-2-us-din2097-a2k-d10-ad100-lod6>

Pristupljeno 24. 5. 2020.

Slika 17. <https://www.fruugo.ie/17441-5-pressure-springs-stainless-steel-content-5-pcs/p-5789746-12819073>

Pristupljeno 24. 5. 2020.

Slika 18. <http://ba.dcvibration.com/rubber-spring/rubber-springs/shock-absorber-rubber-spring.html>

Pristupljeno 24. 5. 2020.

Slika 22. <https://tpaschalis.github.io/rk4-explained/>

Pristupljeno 26. 8. 2020.

Slika 25. i Slika 26. <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:128:109670>

Pristupljeno 26. 8. 2020.