

# PRIMJENA VEKTORA I MATRICA U STROJARSTVU

---

**Polovina, Adriana**

**Master's thesis / Specijalistički diplomski stručni**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:969974>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-14**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ STROJARSTVA

ADRIANA POLOVINA

**PRIMJENA VEKTORA I MATRICA U  
STROJARSTVU**

DIPLOMSKI RAD

KARLOVAC, 2023.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ STROJARSTVA

ADRIANA POLOVINA

**PRIMJENA VEKTORA I MATRICA U  
STROJARSTVU**

DIPLOMSKI RAD

Mentorica: mr. sc. Marina Tevčić, v. pred.

KARLOVAC, 2023.

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Karlovac,

## SAŽETAK

Cilj ovog diplomskog rada je istražiti i opisati primjenu vektora i matrica u području strojarstva. Vektori se koriste za opisivanje fizikalnih količina koje imaju veličinu i smjer, poput sile ili brzine. Kada vektor više nije dovoljan za opisivanje fizikalnog problema, koriste se matrice. U radu su prikazane osnovne definicije vektora i matrica, te njihova primjena u analizi sustava sile i krutosti u strojarstvu. Kroz primjere je prikazana praktična primjena vektora i matrica u strojarstvu, kao i njihova važnost u analizi i dizajnu mehaničkih sustava. Analizirani su primjeri iz područja statike, dinamike, kinematike, mehanike fluida, nauke o čvrstoći, metode konačnih elemenata, gdje se koriste vektori i matrice za postizanje preciznih i točnih rezultata. Rad je zaključen sažetkom dobivenih rezultata i mogućnostima daljnjeg istraživanja u ovom području.

Ključne riječi: vektor, matrica, strojarstvo, mehanika

## **SUMMARY**

The aim of this thesis is to investigate and describe the application of vectors and matrices in the field of mechanical engineering. Vectors are used to describe physical quantities that have a magnitude and direction, such as force or velocity. Matrices are used when a vector is no longer sufficient to describe a physical problem. The thesis presents the basic definitions of vectors and matrices as well as their application in the analysis of force and stiffness systems in mechanical engineering. The practical application of vectors and matrices in mechanical engineering, as well as their importance in the analysis and design of mechanical systems, is illustrated through examples. Examples from the fields of statics, dynamics, kinematics, fluid mechanics, strength of materials, finite element methods, where vectors and matrices are used to achieve precise and accurate results, are analyzed. The thesis was concluded by a summary of the results obtained and the possibilities for further research in this area.

Keywords: vector, matrix, mechanical engineering, mechanics

# SADRŽAJ

1. UVOD .....	1
2. VEKTOR.....	2
2.1. Pojam vektora i skalara .....	2
2.2. Vrste vektora i vektorske operacije .....	3
3. MATRICE I DETERMINANTE.....	8
3.1. Matrične operacije.....	11
3.2. Inverzna matrica .....	12
3.3. Determinante i svojstva determinanti.....	14
4. PRIMJENA VEKTORA U STROJARSTVU .....	18
4.1. Sile u ravnini .....	20
4.1.1. Sastavljanje i rastavljanje sila .....	20
4.1.2. Djelovanje sila u različitim točkama.....	23
4.1.3. Ravnoteža .....	25
4.1.4. Sile u prostoru .....	28
5. PRIMJENA MATRICA U STROJARSTVU .....	30
5.1. Mehanika.....	30
5.2. Statika.....	31
5.3. Nauka o čvrstoći.....	36
5.3.1. Tenzor naprezanja.....	36
5.3.2. Tenzor deformacije.....	39
5.4. Kinematika .....	42
5.5. Mehanika fluida.....	47
5.6. Metoda konačnih elemenata.....	48
6. ZAKLJUČAK .....	49
LITERATURA .....	50

## POPIS SLIKA

Slika 2.1 Prikaz dvije ekvivalentne dužine [2].....	2
Slika 2.2 Zbrajanje vektora pravilom trokuta [3].....	3
Slika 2.3 Zbrajanje vektora pravilom paralelograma [3] .....	3
Slika 2.4 Zbrajanje vektora pravilom poligona [3] .....	4
Slika 2.5 Zbrajanje i oduzimanje vektora [3].....	4
Slika 2.6 Množenje vektora skalarom [2] .....	5
Slika 2.7 Skalarni produkt vektora [2] .....	5
Slika 2.8 Vektorski umnožak dva vektora [2] .....	5
Slika 2.9 Prikaz vektora u Kartezijevom koordinatnom sustavu [2].....	6
Slika 4.1 Definiiranje sile [6] .....	18
Slika 4.2 Moment sile i spreg sila [6].....	19
Slika 4.3 Sustav sila [5].....	20
Slika 4.4 Paralelogram sila [6] .....	20
Slika 4.5 Trokut sila [6].....	21
Slika 4.6 Rastavljanje sile na dvije komponente [6] .....	21
Slika 4.7 Sastavljanje sila pomoću poligona sila [6].....	22
Slika 4.8 Rezultanta sila raznih hvatišta u ravnini [6].....	23
Slika 4.9 Metoda verižnog poligona [6].....	24
Slika 4.10 Pomični i nepomični oslonci [6] .....	26
Slika 4.11 Zaključnica verižnog poligona [6] .....	26
Slika 4.12 Određivanje reakcije oslonaca homogene grede [5].....	27
Slika 4.13 Rastavljanje sila na komponente [5] .....	27
Slika 4.14 Radijus vektor u prostoru [6] .....	28
Slika 5.1 Prostorni sustav sila, slika uz primjer 5.1 [5].....	32
Slika 5.2 Djelovanje sile $F$ na prostorni okvir [5].....	35
Slika 5.3 Moment sile $F$ za os $u$ .....	35
Slika 5.4 Stanja naprezanja [7].....	37
Slika 5.5 Sastavna stanja naprezanja [7] .....	38
Slika 5.6 Prijelaz iz Descartesovog koordinatnog sustava u cilindrični sustav [8].....	42
Slika 5.7 Slika uz primjer [8] .....	43
Slika 5.8 Slika uz primjer [8] .....	45
Slika 5.9 Slika uz primjer [10] .....	46
Slika 5.10 Slika uz primjer [8] .....	48



## **POPIS TABLICA**

Tablica 1. Vrijednosti glavnog vektora i glavnog momenta [5] .....	33
--	----

## 1. UVOD

Strojarstvo, kao jedno od značajnih tehničkih područja, koristi različite matematičke koncepte i alate u svrhu rješavanja složenih problema. Jedan od takvih ključnih pomagala su vektori i matrice, koji omogućuju analizu i manipulaciju velikim skupovima podataka, modeliranje geometrijskih oblika te rješavanje sustava jednadžbi. Primjena vektora i matrica u strojarstvu ima široki spektar primjena, uključujući konstrukciju i analizu mehanizama, proračun statičke i dinamičke opterećenosti, simulaciju konstrukcija, projektiranje i kontrolu naprednih robotskih sustava, izračun toplinske provodljivosti materijala i mnoge druge. Važno je napomenuti kako su vektori i matrice prvi korak, odnosno ključan dio u izradi proračuna u strojarstvu.

Cilj ovog diplomskog rada je istražiti različite primjene vektora i matrica u strojarstvu te njihovu ulogu u rješavanju složenih problematika u ovom području. Pregledom relevantne literature, bit će analizirane različite metode i tehnikalije koje se temelje na vektorima i matricama te će biti prikazani konkretni primjeri primjene u praktičnom kontekstu strojarstva. Nadalje, diplomski rad će se fokusirati na važnost razumijevanja matematičkih koncepta vezanih uz vektore i matrice za strojarske inženjere te će se razmotriti i potrebne matematičke vještine koje bi studenti strojarstva trebali steći tijekom svog obrazovanja.

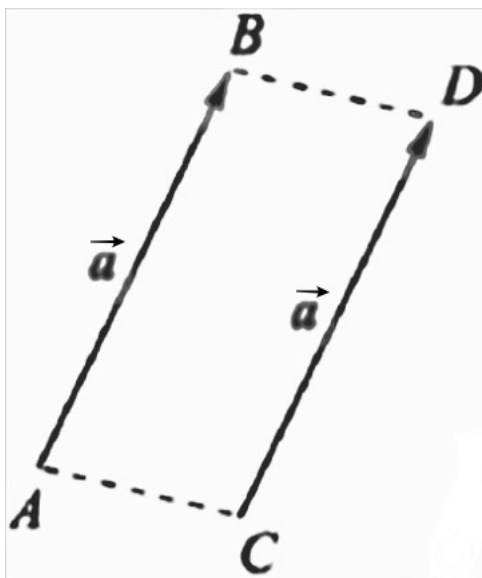
Kroz ovaj diplomski rad čitatelji će imati mogućnost upoznati se s različitim primjerima primjene vektora i matrica u strojarstvu te sagledati njihovu važnost u rješavanju složenih i praktičnih problema. Razumijevanje ovih matematičkih koncepta osigurava inženjerima strojarstva snažan alat koji će im pomoći u razvoju inovativnih projekata i rješavanju izazovnih problema u svom stručnom području.

## 2. VEKTOR

### 2.1. Pojam vektora i skalara

Sve fizičke veličine možemo podijeliti u dvije kategorije, skalare i vektore. Skalar je veličina koja se može izraziti brojem. Na primjer, duljina neke linije ili ploština neke površine su skalarne veličine. U fizici, skalar je broj koji ima i mjerne jedinice. Primjeri skalarne veličine su energija, vrijeme, masa i temperatura.

Kada za opisivanje određene veličine nije dovoljan broj i mjerna jedinica okrećemo se upotrebi vektora. Vektori su matematički alati koji se koriste za opisivanje veličina kao što su brzina ili sila. Vektor ili vektorska fizikalna veličina određena je, kao i skalar, brojem, mjernom jedinicom, ali također smjerom i orijentacijom. Vektor je matematički pojam koji se razvio iz teorije usmjerenih dužina. U vektorskom prostoru, vektor je element. Orijetirana dužina  $\overrightarrow{AB}$  je dužina koja ima početnu točku (hvatište) A i završnu točku B, pri čemu se grafički označuje strelicom od A prema B. Dvije orijetirane dužine  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$  su ekvivalentne ako se jedna može dobiti paralelnim pomakom iz druge. Skup svih ekvivalentnih orijetiranih dužina naziva se vektor ( $\vec{a}$ ), a svaka od tih orijetiranih dužina  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ , ... je reprezentant vektora [1].

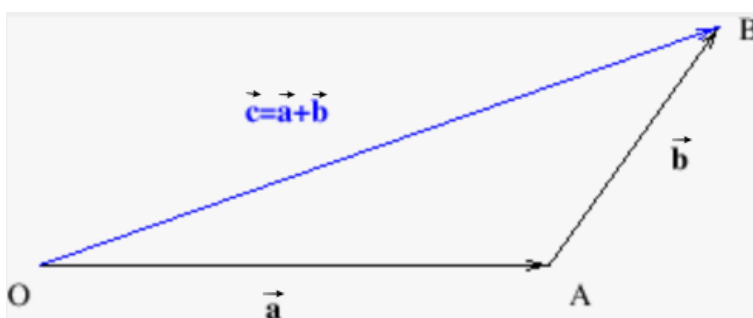


Slika 2.1 Prikaz dvije ekvivalentne dužine [2]

## 2.2. Vrste vektora i vektorske operacije

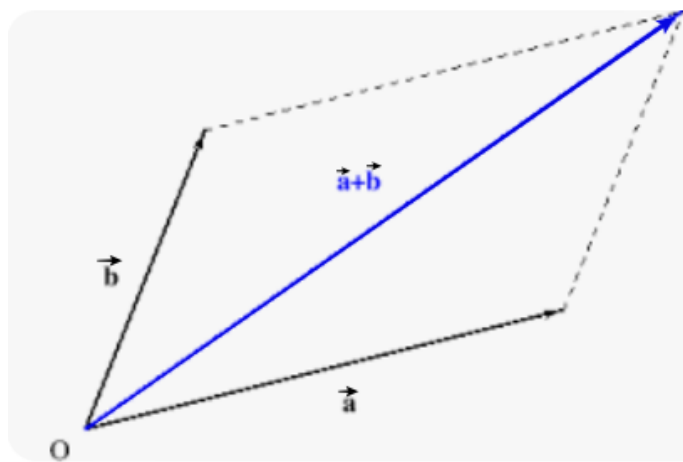
Jedinični vektor je vektor čija je duljina jednaka 1. Nul-vektor, s druge strane, nema duljinu i predstavlja točku. Radij vektor ima početak u nepomičnoj točki, obično u ishodištu koordinatnog sustava, i završetak u promatranoj točki. Kolinearni vektori su paralelni i leže na istom pravcu, dok su komplanarni vektori paralelni s istom ravninom. Međusobno suprotni vektori imaju istu duljinu, ali su suprotne orijentacije [1].

Zbrajanje vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  daje vektor  $\vec{c}$ , koji se dobiva pravilom paralelograma ili pravilom trokuta. Kod pravila trokuta krajnju točku vektora  $\vec{a}$  nanosi se vektor  $\vec{b}$ . Kada spojimo početnu i krajnju točku dobivamo vektor  $\vec{c}$  koji je jedan vektoru  $\overrightarrow{OB}$ , a postupak je prikazan na slici 2.2. Zbrajanje vektora je komutativno i asocijativno.



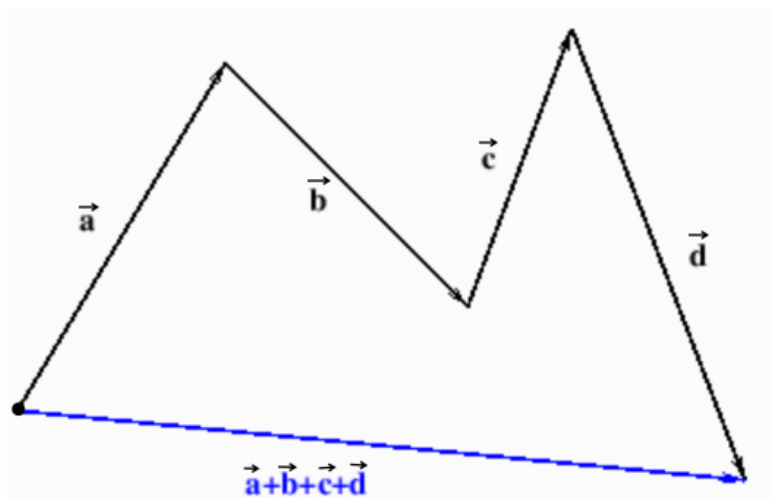
Slika 2.2 Zbrajanje vektora pravilom trokuta [3]

Pravilo paralelograma je način kako zbrajamo vektore koji leže u istoj ravnini. Ako imamo dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , možemo ih predstaviti kao usmjerene dužine koje se susreću na istom mjestu. Kada zbrajamo ove vektore, rezultat  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  možemo predstaviti kao dijagonalu paralelograma. U tom paralelogramu,  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  su dvije stranice, dok su druge dvije stranice paralelne s  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i povučene iz njihovih krajeva.



Slika 2.3 Zbrajanje vektora pravilom paralelograma [3]

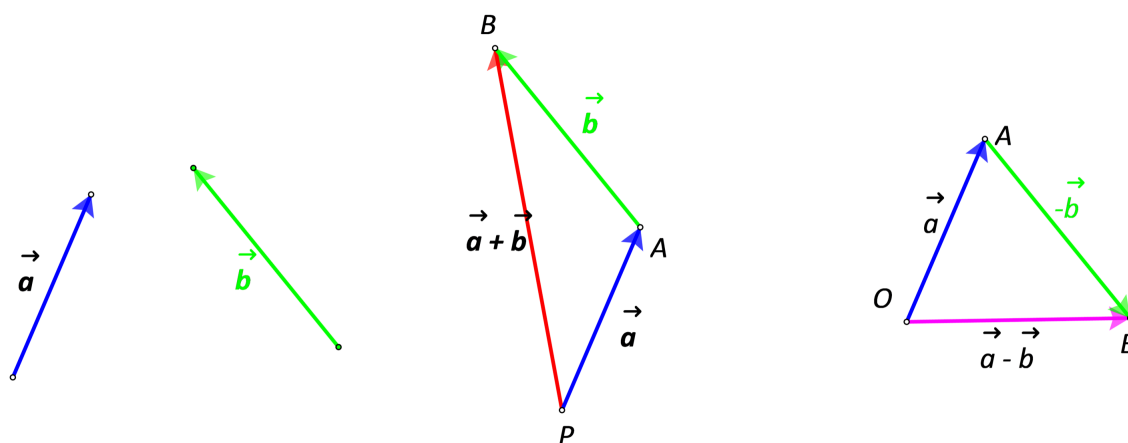
Više vektora zbrajamo prema pravilu poligona gdje se svaki sljedeći vektor nanosi na vrh prethodnog, a početna i krajnja točka tvore novi vektor (zbroj). Pravilo poligona prikazano je na slici 2.4.



Slika 2.4 Zbrajanje vektora pravilom poligona [3]

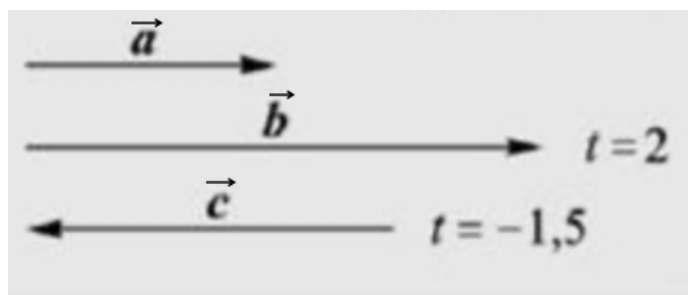
Dva vektora možemo oduzeti tako da vektoru  $\vec{b}$  promijenimo orijentaciju, nakon čega mijenja predznak i postaje  $-\vec{b}$ . Dalje je postupak isti kao kod zbrajanja vektora pa vrijedi:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (2.1)$$



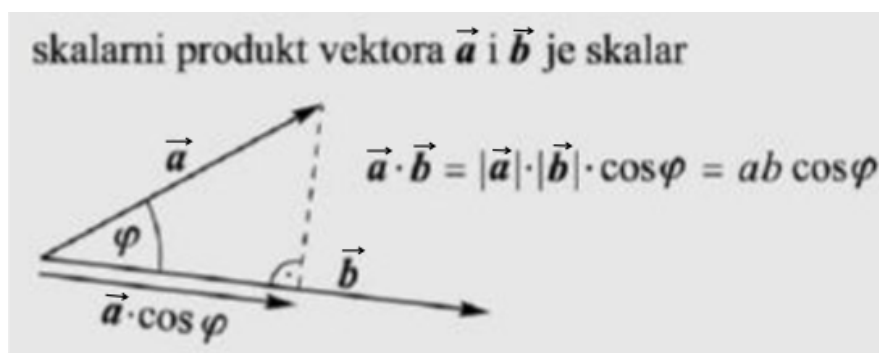
Slika 2.5 Zbrajanje i oduzimanje vektora [3]

Umnožak vektora  $\vec{a}$  sa skalarnim brojem  $t$  daje vektor  $t\vec{a}$ , koji je paralelan s  $\vec{a}$  i ima istu ili suprotnu orijentaciju ovisno o tome je li  $t > 0$  ili  $t < 0$ . Duljina vektora  $t\vec{a}$  je  $|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$ . Ova operacija ima svojstva:  $(st)\vec{a} = s(t\vec{a})$ ;  $(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$ ;  $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$  [3].



Slika 2.6 Množenje vektora skalarom [2]

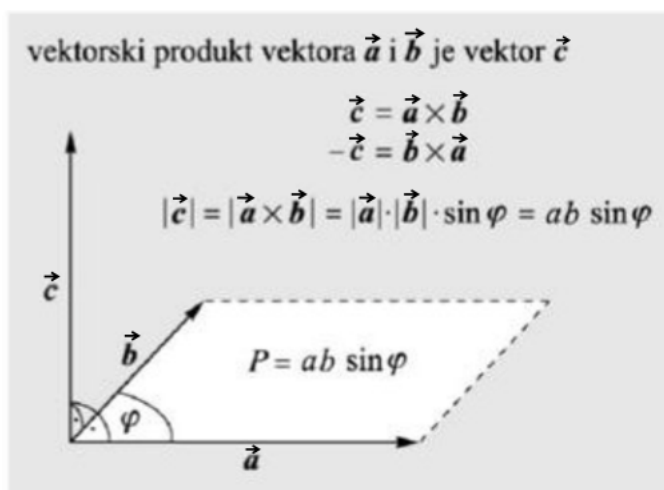
Skalarni umnožak vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je njihov produkt s kosinusom kuta  $\varphi$  između njih. Ova operacija je komutativna, distributivna i ima svojstvo  $t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (t\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (t\vec{b})$ .



Slika 2.7 Skalarni produkt vektora [2]

Vektorski umnožak vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je vektor  $\vec{c}$  koji je okomit na  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Njegova duljina je

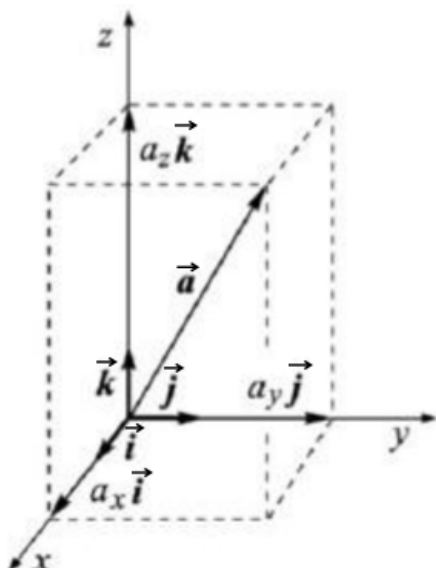
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi. \quad (2.2)$$



Slika 2.8 Vektorski umnožak dva vektora [2]

Mješoviti vektorski umnožak  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  jednak je  $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$  i  $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ , dok je dvostruki vektorski umnožak  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  jednak  $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ .

U Kartezijevom koordinatnom sustavu, vektori se predstavljaju pomoću koordinata i jediničnih vektora  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  koji pokazuju smjerove koordinatnih osi  $x, y$  i  $z$ . Na primjer, ako vektor  $\vec{a}$  počinje u ishodištu sustava i završava u točki  $A(a_x, a_y, a_z)$ , tada se taj vektor može zapisati kao  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ . Slično, vektor  $\vec{b}$  koji počinje u ishodištu i završava u točki  $B(b_x, b_y, b_z)$ , može se zapisati kao  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  [3].



**Slika 2.9 Prikaz vektora u Kartezijevom koordinatnom sustavu [2]**

U nastavku su navedene vektorske operacije u Kartezijevom koordinatnom sustavu [2].

1. zbrajanje

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k},$$

2. umnožak vektora sa skalarom

$$t\vec{a} = ta_x \vec{i} + ta_y \vec{j} + ta_z \vec{k},$$

3. skalarni umnožak

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

4. vektorski umnožak

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Duljina vektora  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  dana je izrazom:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (2.3)$$

gdje je apsolutna vrijednost (modul) vektora jednaka:

$$a = |\vec{a}|. \quad (2.4)$$

Kut između vektora  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  može se odrediti iz izraza:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad (2.5)$$

što je jednako:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.6)$$



### 3. MATRICE I DETERMINANTE

Matrica je funkcija

$$\mathbf{A}: \begin{cases} \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) \rightarrow \mathbf{A}(i, j) = a_{ij} \end{cases}$$

iz Kartezijevog produkta  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  u skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ili kraće zapisano:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} \quad (3.2)$$

Broj  $a_{ij}$  je element matrice u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu. Red matrice je horizontalni niz brojeva, a stupac matrice je vertikalni niz brojeva. Matrica s  $m$  redaka i  $n$  stupaca je tipa  $(m \times n)$  ili formata  $(m \times n)$ . Elementi matrice mogu biti realni brojevi, kompleksni brojevi ili drugi matematički objekti. Matrice se označavaju velikim slovima [4].

*Primjer 3.1.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ -2 & 0 \\ \sqrt{2}i & -1 \end{bmatrix}.$$

U primjeru kaže se da je matrica  $\mathbf{A}$  ( $2 \times 2$ ) tipa. Prvi broj označava broj redaka, a drugi broj označava broj stupaca. Matrica  $\mathbf{B}$  je ( $3 \times 2$ ) tipa, što znači da matrica  $\mathbf{B}$  ima 3 retka i 2 stupca. Matrica  $\mathbf{C}$  je ( $2 \times 3$ ) tipa, dok je matrica  $\mathbf{D}$  ( $3 \times 2$ ) tipa i njezini elementi su realni i kompleksni brojevi. U prvom retku i drugom stupcu matrice  $\mathbf{D}$  nalazi se element  $d_{12} = 2$ .

Matrica kojoj su svi elementi jednaki nuli naziva se nul-matrica, a množenje bilo koje ulančane matrice nul-matricom rezultirati će nul-matricom [4].

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dvije matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$  i  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{p \times r}$  jednake su ako, i samo ako, su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1.  $m = p$  i  $n = r$ ,
2.  $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ .

U prvom uvjetu vrijedi da redak matrice  $\mathbf{A}$  i redak matrice  $\mathbf{B}$  moraju biti isti, a isto vrijedi i za stupce matrica kako bismo mogli reći da su te dvije matrice jednake. Kako bi se osiguralo jednostavno razumijevanje, može se reći da dvije matrice jednakog formata ostvaruju jednakost kada su elementi na odgovarajućim pozicijama isti.

Matrica s jednim retkom specifično se naziva retčana matrica, dok matricu s jednim stupcem nazivamo stupčana matrica. Ove matrice nazivaju se još i vektorima [4].

*Primjer 3.2.*

$$\mathbf{A} = [2 \quad 7 \quad 3], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [6].$$

Matrica  $\mathbf{A}$  je retčana matrica ( $1 \times 3$ ) tipa, matrica  $\mathbf{B}$  je stupčana matrica ( $3 \times 1$ ) tipa, a matrica  $\mathbf{C}$  je i retčana i stupčana matrica tipa ( $1 \times 1$ ).

Za neku proizvoljnu matricu  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$  pripadna inverzna matrica u odnosu na zbrajanje je matrica  $[-a_{ij}]_{m \times n}$  koja se označava s  $-\mathbf{A}$ .

Transponirana matrica  $\mathbf{A}^T$  matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$  je matrica koja se od izvorne matrice dobije na način da se redcima i stupcima zamijene mjesta:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ukoliko matrica ima isti broj redaka i stupaca ( $m = n$ ), tada se takva matrica naziva kvadratna matrica reda  $n$ . Kod kvadratnih matrica razlikuju se glavna i sporedna dijagonala. Glavna dijagonala kvadratne matrice je dijagonala koja ide od gornjeg lijevog do donjeg desnog kuta, dok je sporedna dijagonala dijagonala koja ide od gornjeg desnog do donjeg lijevog kuta matrice. Glavna i sporedna dijagonala su označene podebljanim linijama u nastavku.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1,n-1} & \mathbf{a}_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & \mathbf{a}_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \mathbf{a}_{ii} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{n,n-1} & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Za kvadratnu matricu  $\mathbf{A}$  kažemo da je simetrična ukoliko vrijedi  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , a antisimetrična ukoliko vrijedi  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ .

Primjer 3.3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz primjera matrica  $\mathbf{A}$  je simetrična, a matrica  $\mathbf{B}$  je antisimetrična matrica.

U nastavku su navedena svojstva transponiranja matrica:

1.  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ ,
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ,
3.  $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$ ,
4.  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ .

Matrica u kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli zovemo dijagonalna matrica, a ako su uz to i svi elementi glavne dijagonale jednaki 1, takvu matricu nazivamo jedinična matrica i označavamo je slovom  $\mathbf{I}$ .

$$\mathbf{D} = \text{dijag} \{d_1, \dots, d_n\} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gornja trokutasta matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Za gornju trokutastu matricu vrijedi  $a_{ij} = 0$  za  $i > j$  te  $a_{ij} \neq 0$  za  $i \leq j$ .

Primjer 3.4.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Donja trokutasta matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli. Za donju trokutastu matricu vrijedi  $a_{ij} = 0$  za  $i < j$  te  $a_{ij} \neq 0$  za  $i \geq j$  [1].

Primjer 3.5.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

### 3.1. Matrične operacije

Zbrajati, odnosno oduzimati, možemo isključivo matrice istog tipa, odnosno matrice koje imaju isti broj redaka i stupaca. Rezultat zbrajanja (oduzimanja) matrica je matrica:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Zbrajanje (oduzimanje) matrica je komutativna i asocijativna operacija, a neutralni element za zbrajanje (oduzimanje) matrica je nul-matrica.

Kod matrica postoji suprotni element. Zbrajanje (oduzimanje) matrica sa suprotnim elementom rezultirati će nul-matricom.

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O} = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A}.$$

Zbrajanje matrica i množenje matrice skalarom povezani su svojstvima distributivnosti:

$$\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}, \quad (\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$$

i svojstvom kvaziasocijativnosti:

$$\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}.$$

Nakon analize svojstava matrice, može se zaključiti da zbrajanje matrica ima ista svojstva kao i zbrajanje brojeva.

Matrica se množi skalarom (brojem) tako da se svaki njezin element pomnoži tim skalarom.

Rezultat množenja matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$  skalarom  $\lambda \in \mathbb{R}$  je

$$\lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Svojstva množenja matrica:

a) Množenje matrica nije komutativna operacija:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

b) Množenje matrica je asocijativna operacija pod uvjetom da su matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$  ulančane:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}).$$

c) Jedinična matrica  $\mathbf{I}$  neutralni je element za množenje matrica, ali pod uvjetom da je  $\mathbf{A}$  kvadratna matrica reda  $n$ , a  $\mathbf{I}$  je jedinična matrica istog reda. Jednostavnije rečeno, matrice moraju biti kvadratne i imati isti broj redaka i stupaca:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

d) Kod množenja matrica vrijedi svojstvo distributivnosti u odnosu prema zbrajanju:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}.$$

e) Kod množenja matrica vrijedi zabrana kraćenja:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \implies \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (\mathbf{A} \neq \mathbf{O}, \mathbf{A} \neq \mathbf{I}).$$

Kod matrica vrijedi oznaka  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ , odnosno  $\mathbf{A}^n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{n-1}$ , za  $n \in \mathbb{N}$  pri čemu uzimamo da je  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ . Isto vrijedi kod brojeva.

Ako je  $\mathbf{A}$  proizvoljna kvadratna matrica, razlikujemo:

- nilpotentna matrica ukoliko je  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ ,
- involutorna matrica ukoliko je  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ ,
- idempotentna matrica ukoliko je  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ ,

Matrica  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  je nilpotentna, a matrica  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  involutorna i idempotentna.

U sljedećem primjeru prikazane su gore navedene operacije nad matricama [1].

*Primjer 3.6.*

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 4 & 4 \cdot 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & -5 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 21 & 12 - 3 \\ 16 - 3 & 20 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 9 \\ 13 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2. Inverzna matrica

Inverzna matrica neke kvadratne matrice  $\mathbf{B}$  je matrica koja se označava s  $\mathbf{B}^{-1}$  i za koju vrijedi sljedeće:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}. \quad (3.8)$$

Iz gornje jednakosti slijedi:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}. \quad (3.9)$$

Ako za neku kvadratnu matricu vrijedi  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , tada ta matrica nema inverznu matricu i kaže se da je singularna, a ako vrijedi  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , matrica ima inverznu matricu i matrica  $\mathbf{A}$  je regularna (nesingularna).

Za regularnu matricu  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

vrijedi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \tilde{\mathbf{A}}^T \quad (3.10)$$

gdje je

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrica  $\tilde{\mathbf{A}}$  zove se adjungirana matrica matrice  $\mathbf{A}$  ili jednostavnije adjunkta. Njezini elementi  $A_{ij}$  algebarski su komplementi elemenata matrice  $\mathbf{A}$ . Algebarski komplement (kofaktor)  $A_{ij}$  elementa  $a_{ij}$  je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Pri tome je  $D_{ij}$  minora ili subdeterminanta elementa  $a_{ij}$ , odnosno determinanta koja se dobije kada se u polaznoj determinanti izostave  $i$  – ti redak i  $j$  – ti stupac [1].

*Primjer 3.7.*

Potrebno je odrediti inverznu matricu zadane matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Najprije se provjerava je li zadana matrica invertibilna tj. postoji li uopće njezina inverzna matrica.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \neq 0$$

Budući da je determinanta različita od 0 matrica je invertibilna, odnosno može se odrediti inverzna matrica. Računaju se algebarski komplementi svakog elementa polazne matrice

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

koji se zatim zapisuju se u adjungiranu matricu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

nakon čega se određuje inverzna matrica

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Množenjem zadane matrice s inverznom matricom (u bilo kojem poretku) rezultirati će jediničnom matricom, odnosno izvršiti će se provjera.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{3}{2} & 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} & -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3. Determinante i svojstva determinanti

Kako bi se bolje definirala inverzna funkcija potrebno je upoznati se s pojmom determinante. Neka je zadana općenita kvadratna matrica  $\mathbf{A}$  tipa ( $n \times n$ ):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kvadratnoj matrici može se pridružiti skalar, odnosno njezina determinanta. Taj skalar (broj) označava se s  $\det(\mathbf{A})$  ili  $|\mathbf{A}|$ . Koristimo i sljedeći zapis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Za  $n = 1$  definira se determinanta prvog reda

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}. \quad (3.11)$$

Za determinantu drugog reda definiran je izraz

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (3.12)$$

Za determinantu trećeg reda definiran je sljedeći izraz i takva determinanta može se riješiti npr. Sarrusovim pravilom:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{33}a_{22}a_{11} + a_{31}a_{23}a_{12} + a_{32}a_{21}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} \\ &\quad - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

*Primjer 3.8.*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Dana determinanta trećeg reda u primjeru riješena je Sarrusovim pravilom. Prvi korak je prepisivanje prva dva stupca desno od determinante. Zatim se zbrajaju umnošci elemenata na glavnoj dijagonali i na dvije dijagonale paralelne s glavnom dijagonalom na desnoj strani. Nakon

toga oduzimaju se umnošci elemenata na sporednoj dijagonali i na dvije dijagonale paralelne sa sporednom dijagonalom na desnoj strani.

Sarrusovo pravilo vrijedi samo kod rješavanja determinanti trećeg reda, a ukoliko se računaju determinante reda  $n \geq 2$  koristi se općenitiji postupak, Laplaceovo pravilo.

Kako bi se definirala determinanta koja vrijedi za općenitu kvadratnu matricu ( $n \times n$ ) tipa potrebno je upoznati se s dva nova pojma.

Svakom elementu  $a_{ij}$  kvadratne matrice pridružuju se:

- minora elementa  $a_{ij}$ , što je determinanta dobivena izostavljanjem  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca iz matrice  $\mathbf{A}$ , a označava se s  $D_{ij}$
- algebarski komplement  $A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$  elementa  $a_{ij}$  [1].

*Primjer 3.9.*

Neka je zadana proizvoljna matrica  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ , minora  $D_{21}$  elementa  $a_{21} = 4$  jednaka je

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 8 = -24.$$

Algebarski komplement  $A_{21}$  elementa  $a_{21} = 4$  je

$$A_{21} = (-1)^{2+1}D_{21} = 24.$$

Sada se može definirati determinanta matrice:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (3.14)$$

Taj postupak naziva se Laplaceov razvoj determinante ili po  $i$  – tom retku ili po  $j$  – tom stupcu.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (3.15)$$

Pomoću Laplaceovog razvoja računaju se determinante  $n$  – tog tako da ih svedemo na računanje determinanti reda  $(n - 1)$  [1].

*Primjer 3.10.*

Identičan primjer determinante matrice iz primjera 3.9. može se riješiti Laplaceovim razvojem po  $i$  – tom retku ili po  $j$  – tom stupcu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Laplaceov razvoj po trećem retku}\}$$



$$\begin{aligned}
&= (-1)^{3+1} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 7 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) + 0 \\
&= -21 + 48 = 27
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Laplaceov razvoj po drugom stupcu}\}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot (4 \cdot 0 - 7 \cdot 6) + 5 \cdot (1 \cdot 0 - 7 \cdot 3) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = 27
\end{aligned}$$

Iz primjera vidimo da se računanje determinanti komplicira što je red determinante veći. Kada bi se računala determinanta 5. reda u prvom koraku Laplaceovog razvoja pojavilo bi se 5 minora determinanti 4. reda. Ta determinanta rezultirala bi s 4 minore determinanti 3. reda. Kako bi se računanje ubrzalo koriste se svojstva determinanti [1].

1. Ukoliko se matrica **B** dobije zamjenom dva susjedna retka ili stupca iz matrice **A** tada je
$$\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B}).$$
2. Ako su dva retka ili stupca matrice **A** jednaka ili proporcionalna tada vrijedi
$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$
3. Ukoliko se proizvoljno odabere redak ili stupac i pomnoži se nekim faktorom, čitava determinanta se mora množiti tim faktorom.
4. Determinanta gornje ili donje (dijagonalne) trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata glavne dijagonale.
5. Ukoliko u determinanti postoji redak ili stupac koji ima sve elemente jednake nuli, tada je vrijednost te determinante jednaka nuli.
6. Ako se redak ili stupac matrice **A** dobije kao linearna kombinacija neka druga dva retka ili stupca, tada je determinanta matrice **A** jednaka nuli.
7. Ako se matrica **B** dobije iz matrice **A** množenjem jednog retka ili stupca konstantom *k*, tada vrijedi

$$\det(\mathbf{B}) = k \cdot \det(\mathbf{A}).$$

*Primjer 3.11.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{1. redak množi se s } (-4) \text{ i pribraja 2. retku,} \\ \text{vrijednost determinante ostaje ista} \end{array} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{1. redak množi se s } (-7) \text{ i pribraja 3. retku,} \\ \text{vrijednost determinante ostaje ista} \end{array} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{2. redak množi se s } (-2) \text{ i pribraja 3. retku,} \\ \text{vrijednost determinante ostaje ista} \end{array} \right\}$$

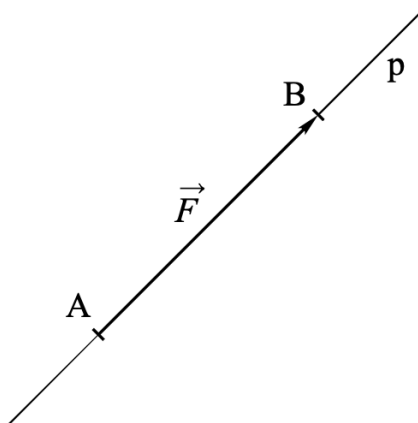
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{determinanta gornje trokutaste matrice jednaka} \\ \text{je umnošku elemenata glavne dijagonale} \end{array} \right\}$$
$$= 1 \cdot (-3) \cdot (-9) = 27$$

## 4. PRIMJENA VEKTORA U STROJARSTVU

Vektori se koriste u strojarstvu za opisivanje različitih fizičkih veličina i njihovih svojstava. Neki od primjera u kojima se koriste vektori u strojarstvu uključuju:

1. Sile i momenti: Sile i momenti su vektorske veličine jer imaju smjer i veličinu. Koriste se za proračunavanje opterećenja na konstrukcijama, odabir materijala i dizajniranje mehanizama.
2. Brzina i ubrzanje: Brzina i ubrzanje također su vektorske veličine koje se koriste za promatranje kretanja tijela. Kada se proučava kretanje stroja ili konstrukcija, vektori se koriste kako bi se odredio smjer, brzina i ubrzanje tijela.
3. Sila trenja: Sila trenja je vektor koji se koristi za opisivanje otpora koji se javlja između dviju površina koje se pomiču jedna o drugu. Vektor sile trenja koristi se u dizajnu ležajeva, spojeva i prijenosnika sustava.
4. Vektori napona: Vektori napona koriste se u analizi naprezanja i deformacija materijala. Oni opisuju smjer i intenzitet naprezanja unutar materijala i koriste se za dizajniranje konstrukcija i komponenata kako bi se osigurala željena trajnost i pouzdanost.
5. Momenti inercije: Momenti inercije također su vektorske veličine koje opisuju otpor tijela na promjene u rotaciji. Oni se koriste u proračunima dinamike strojeva, vibracija i ravnoteže.

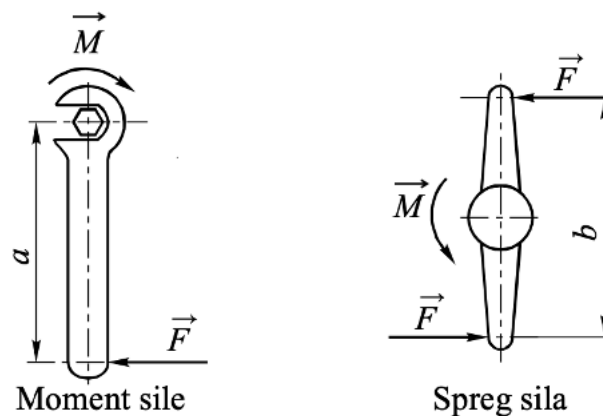
Ovo su samo neki od primjera u kojima se koriste vektori u strojarstvu. Vektori su ključni za pravilan dizajn, proračune, analizu i optimizaciju strojeva, konstrukcija i sustava [5].



**Slika 4.1 Definiranje sile [6]**

Na slici 4.1. dužina AB predstavlja intenzitet (veličinu) sile  $\vec{F}$  koja djeluje na pravcu  $p$  u smjeru od točke A prema točki B što je prikazano strelicom, a hvatište joj se nalazi u točki A. Kada sila djeluje na kruto tijelo moguće joj je pomicati hvatište duž pravca djelovanja, pa se tada sila naziva klizeći vektor ili vektor vezan za pravac.

Sila je vektorska veličina koja definira mehaničko djelovanje jednog tijela na drugo tijelo, a mjerna jedinica za veličinu sile je Newton [N]. Vanjske sile djeluju na neko tijelo izvana, a unutarnje sile djeluju unutar tijela i opiru se djelovanju vanjskih sila. Vanjska sila može biti raspoređena na površinu (npr. hidrostatski tlak), po volumenu (npr. gravitacijska, magnetska) ili može djelovati koncentrirano u jednoj točki. Vektorske ili usmjerene veličine su opisane intenzitetom, pravcem i smjerom, pa se u tom slučaju radi o slobodnom vektoru. Osim slobodnog vektora, poznajemo i vektor vezan za točku koji se javlja kada je potrebno znati točku hvatišta, odnosno točku u kojoj se djelovanje jednog tijela prenosi na drugo tijelo. To je važno kod deformabilnog tijela, budući da njegova deformacija ovisi o točki u kojoj se na njega prenosi mehaničko djelovanje [6].



**Slika 4.2 Moment sile i spreg sila [6]**

Statički moment sile je umnožak sile i udaljenosti pravca njezinog djelovanja od osi ili točke prema kojoj taj moment djeluje, a određen je veličinom i smjerom djelovanja. Moment se može prikazati vektorom, a najčešće se opisuje veličinom i zakrivljenom strelicom oko točke ili osi u smjeru djelovanja momenta.

Moment je određen

$$M = F \cdot a \quad (4.1)$$

gdje je  $a$  krak (udaljenost u metrima) sile  $\vec{F}$  u odnosu na točku ili os njezinog djelovanja.

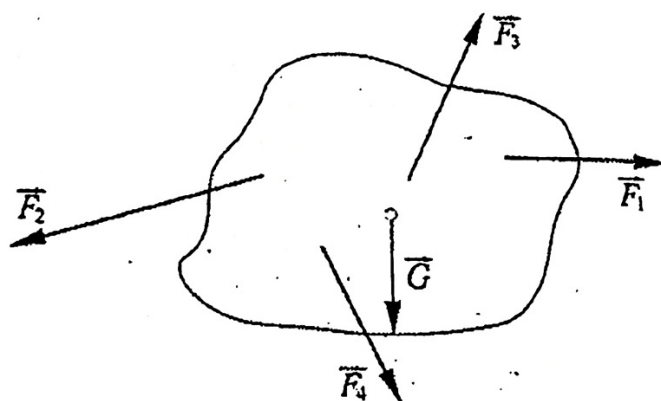
Spreg sila čini par, odnosno dvije sile koje su jednake po veličini s paralelnim pravcima djelovanja, ali imaju suprotan smjer.

Veličina momenta sprega sila je

$$M = F \cdot b \quad (4.2)$$

gdje je  $b$  udaljenost (krak sile) izražena u metrima. Krakovi sile  $a$  i  $b$  su skalari.

Mjerna jedinica za moment sile i moment sprega sila je **Nm** ili, zastupljenije u strojarstvu, **Nmm**.

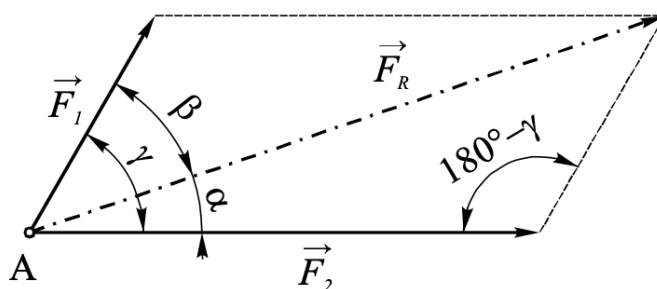


Slika 4.3 Sustav sila [5]

Sustav sila prikazan je na slici 4.3 i definira se kao skup svih sila koje djeluju na tijelo.

#### 4.1. Sile u ravnini

##### 4.1.1. Sastavljanje i rastavljanje sila



Slika 4.4 Paralelogram sila [6]

Ako dvije sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  djeluju u jednoj točki, po zakonu paralelograma te se sile sastavljaju u rezultatnu silu  $\vec{F}_R$ . Može se reći da je djelovanje rezultatne sile  $\vec{F}_R$  u početnoj točki A jednako zajedničkom djelovanju sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Kada se vektorski zbroje sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , one zajedno daju rezultantu  $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  [6].

Sile je moguće zbrajati analitički i grafički, a zbroj sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  dobiva se analitičkim postupkom kao veličina rezultante  $F_R$  uz pomoć kosinusovog poučka:

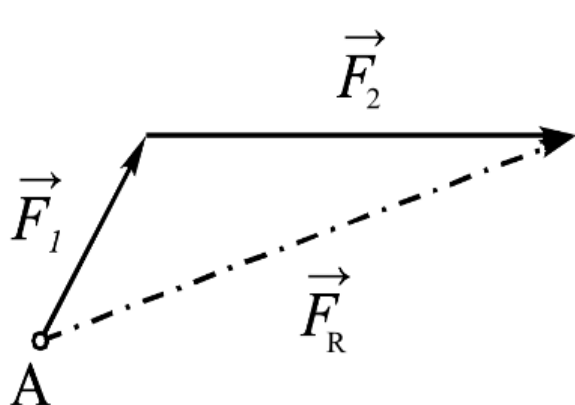
$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_R| = F_R &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \gamma)} \\
 &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \gamma}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Za računanje kutova  $\alpha$  i  $\beta$  koristi se sinusov poučak

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_R}{\sin(180^\circ - \gamma)}
 \tag{4.4}$$

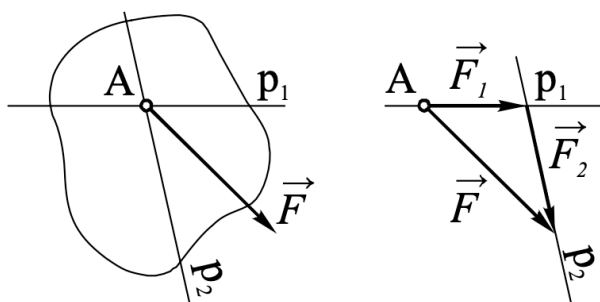
gdje je:

$$F_1 = |\vec{F}_1|, \quad F_2 = |\vec{F}_2|. \quad (4.5)$$



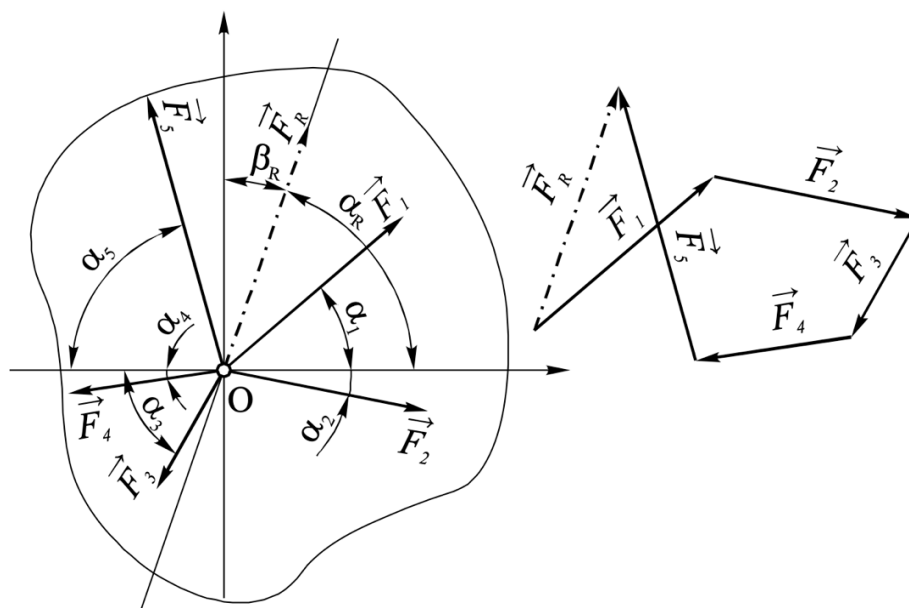
Slika 4.5 Trokut sila [6]

Drugi grafički način sastavljanja sila je pomoću trokuta sila. U odabranom mjerilu, po veličini smjeru i pravcu crta se sila  $\vec{F}_1$ , a na njezin vrh nadovezuje se sila  $\vec{F}_2$ . Kada se spoji početak prve sile i kraj druge dobiva se rezultanta  $\vec{F}_R$ , a njezin smjer je uvijek suprotan smjeru obilaženja komponentata (sila) [6].



Slika 4.6 Rastavljanje sile na dvije komponente [6]

Rastavljanje sile na dvije komponente odvija se suprotnim postupkom od prethodno prikazanog. Zadana je sila  $\vec{F}$  i dva pravca  $p_1$  i  $p_2$ . Sila se crta u izabranom mjerilu paralelno s njezinim pravcem i u zadanom smjeru djelovanja. Zatim se crtaju paralele sa zadanim pravcima  $p_1$  i  $p_2$ , i to tako da se prvi pravac provuče kroz početnu točku zadane sile čime se dobiva prva sila  $\vec{F}_1$ , a drugi pravac se povuče kroz vrh sile  $\vec{F}_1$ , te se na taj način dobije druga sila  $\vec{F}_2$ . Kao i kod postupka sastavljanja sile, dobivene komponente  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  imaju smjer obilaženja suprotan smjeru zadane sile [6].



**Slika 4.7 Sastavljanje sila pomoću poligona sila [6]**

Ukoliko u nekoj točki djeluju više od dvije sile, rezultantu je moguće dobiti crtanjem poligona sila. U proizvoljno izabranom mjerilu sile se nanose paralelno prema planu položaja na sljedeći način: nacrtava se prva sila, a na njezin vrh se nanosi sljedeća i tako sve dok se ne nacrtaju sve sile u poligonu sila. Tražena rezultanta  $\vec{F}_R$  dobije se spojnicom početka prve sile i kraja posljednje sile u poligonu sila, a njezin je smjer obrnut smjeru kojim obilaze zadane sile. Sile se ne moraju crtati redom, već je moguće potpuno proizvoljnim redoslijedom nanositi sile. Zajedničko hvatište zadanih sila ujedno je i hvatište rezultantne sile u planu položaja, a označeno je s 0 (ishodište). Pravac djelovanja  $p$  paralelan je s resultantnom iz plana sila [6].

Iste rezultate moguće je dobiti analitičkim postupkom, i to metodom projekcija. Kroz hvatište sila 0 nacrtava se pravokutni koordinatni sustav na koji se projiciraju sile. Suma svih projekcija zadanih sila na neku os jednaka je projekciji rezultante tih sila na istu os. Ukoliko neka sila  $\vec{F}$  zatvara s osima kut  $\alpha$ , tada su njezine komponente izražene sljedećim jednadžbama:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F \cdot \sin \alpha. \quad (4.6)$$

Veličina (projekcije) rezultante na osima dobiva se zbrajanjem projekcija zadanih sila:

$$F_{Rx} = \sum F_x, \quad F_{Ry} = \sum F_y. \quad (4.7)$$

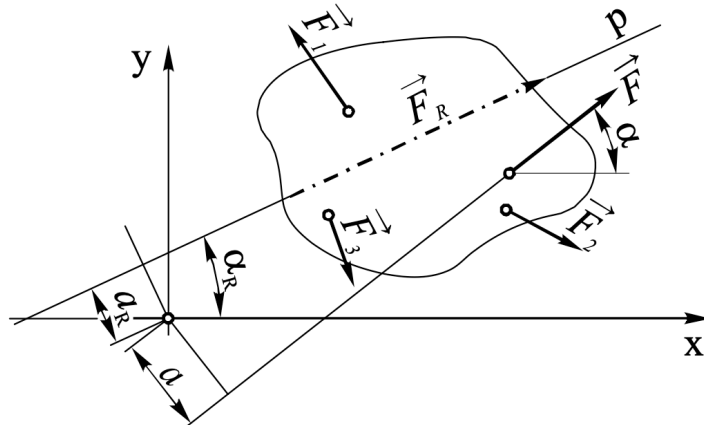
Za određivanje rezultante primjenjuje se Pitagorin poučak, i to na sljedeći način:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}. \quad (4.8)$$

Kako bi se odredili smjer i pravac na kojima djeluje rezultanta potrebno je odrediti kutove nagiba  $\alpha_R$  i  $\beta_R$  u odnosu na  $x$  i  $y$  os:

$$\cos \alpha_R = \frac{F_{Rx}}{F_R}, \quad \cos \beta_R = \frac{F_{Ry}}{F_R}. \quad (4.9)$$

#### 4.1.2. Djelovanje sila u različitim točkama



**Slika 4.8 Rezultanta sila raznih hvatišta u ravnini [6]**

Sile koje djeluju na jedno tijelo u različitim točkama u ravnini mogu se zamijeniti jednom rezultatnom silom. Postupak za sastavljanje ovih sila u rezultantu može biti analitički ili grafički. Prilikom analitičkog zbrajanja sila, treba paziti da se sile koje djeluju u istom smjeru treba sa silama koje djeluju u suprotnom smjeru zbrajati kao veličine sa suprotnim predznacima. Proizvoljno se odabire koji će smjer biti pozitivan i prema njemu se određuju predznaci svih ostalih sila. Kod analitičkog sastavljanja sila koristi se metoda projiciranja sila na odabrani koordinatni sustav, pa tako projekcije sila na  $x$  i  $y$  os iznose:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Komponente rezultante na pravcima osi  $x$  i  $y$ :

$$F_{Rx} = \sum F_x, \quad F_{Ry} = \sum F_y$$

Vrijednost rezultante:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Nagib pravca na kojem djeluje rezultanta prema  $x$  osi računa se:

$$\cos \alpha_R = \frac{F_{Rx}}{F_R}$$

Uz pomoć momentnog pravila određuje se položaj pravca na kojem djeluje rezultanta:

$$\alpha_R = \frac{\sum M_F}{F_R} \quad (4.10)$$

gdje je

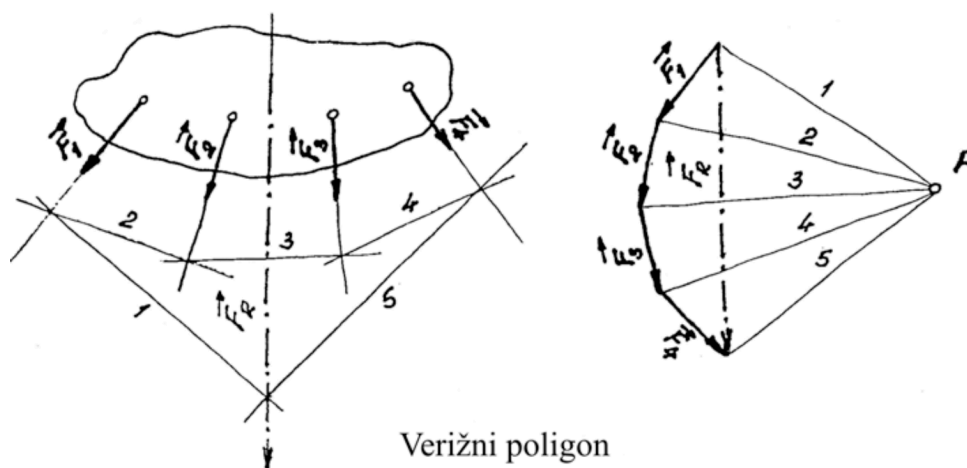


$\alpha_R$  – kut pravca na kojem djeluje rezultanta od ishodišta koordinatnog sustava,

$M_F$  – moment sile  $F$  prema ishodištu ( $M_F = F \cdot a$ ),

$F_R$  – vrijednost rezultante.

Grafički se sile koje djeluju na jedno tijelo u jednoj ravni s različitim hvatištima sastavljaju u rezultantu pomoću plana sila i verižnog poligona. Poligon sila, koji se crta prema planu položaja u proizvoljnom mjerilu, određuje veličinu i smjer rezultante. Crtanjem verižnog poligona u planu položaja određuje se pravac na kojem djeluje rezultanta [6].



**Slika 4.9 Metoda verižnog poligona [6]**

U planu (poligonu) sila proizvoljno se odabire položaj točke  $P$ , odnosno pola, od kojeg se crtaju polne zrake. Polne zrake su spojnice pola  $P$  sa svim počecima i krajevima sila, a označavaju se brojevima od 1 do  $n$ . U plan položaja na lijevoj strani pravci djelovanja sila se produže, a zatim se unose polne zrake paralelno s onima u planu sila s tim da se sjecište prve polne zrake sa silom  $\vec{F}_1$  odabire se proizvoljno. Prilikom unošenja polnih zraka potrebno je voditi računa da se polne zrake moraju sjeći točno na pravcu djelovanja sile s kojom te polne zrake čine trokut. Na slici 4.9 je vidljivo da polne zrake 1 i 5 zajedno s resultantnom silom u planu sila čine trokut, što znači da će u planu položaja resultantna sila prolaziti kroz njihovo sjecište. Pravac rezultante u planu položaja mora biti paralelan s pravcem rezultante iz plana sila. Na slici 4.9, s lijeve strane prikazan je plan položaja, a s desne strane plan sila [6].

Osim analitičke metode i metode verižnog poligona, za rastavljanje jedne sile na tri komponente poznatih pravaca koji se ne sijeku u jednoj točki, može se koristiti Culmannova (grafička) ili Ritterova (grafoanalitička) metoda.

### 4.1.3. Ravnoteža

Ako je tijelo u stanju mirovanja ili se giba jednoliko pravocrtno to znači da se sustav sila koje djeluju na to tijelo nalazi u ravnoteži. U općenitom slučaju sila u ravnini analitički uvjeti ravnoteže dani su sljedećim jednadžbama:

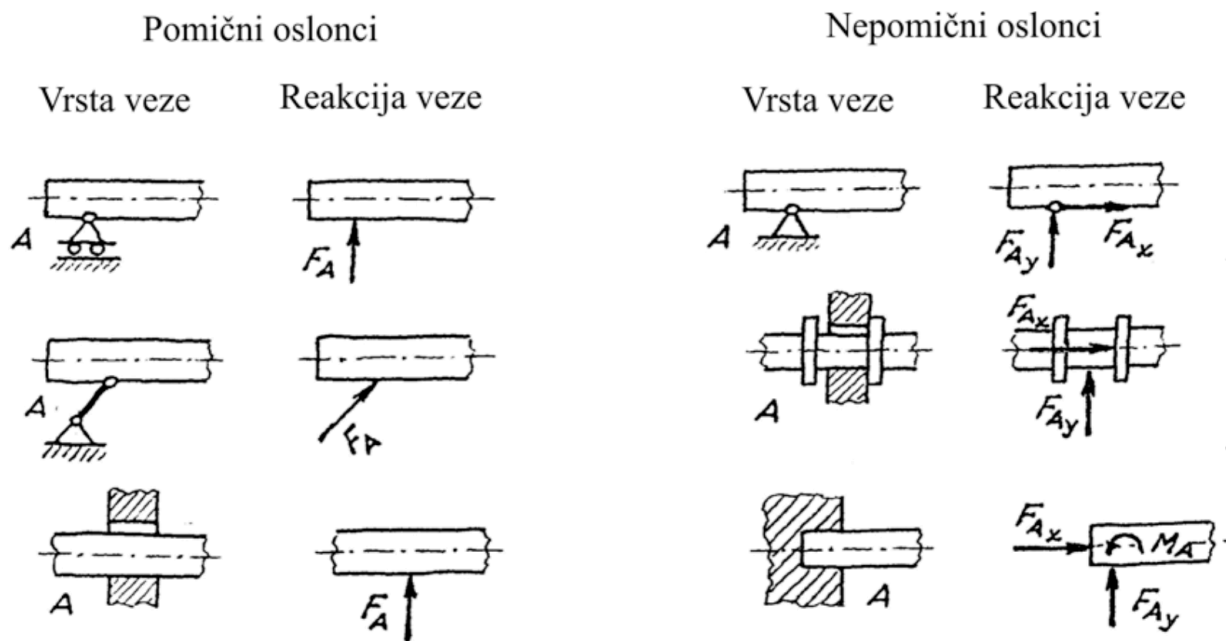
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R = \vec{0}, \quad \sum \vec{M} = \vec{M}_{rez} = \vec{0}. \quad (4.11)$$

Kako bi se ispunio grafički uvjeti ravnoteže potrebno je da verižni poligon i poligon sila budu zatvoreni. U poligonu sila sve sile moraju imati isti smjer obilaženja. Ukoliko postoje tri sile, s istim smjerom obilaženja, trokut sila mora biti zatvoren, a u planu položaja sve sile se moraju sjeći u jednoj točki. Iz postavljenih statičkih uvjeta ravnoteže mogu se određivati nepoznate veličine za svako tijelo u ravnoteži. Ukoliko broj nepoznanica ne premašuje broj uvjeta ravnoteže takav sustav se smatra statički određenim, a ukoliko je broj nepoznanica veći od broja postavljenih uvjeta ravnoteže takav sustav se smatra statički neodređenim i potrebno je postaviti dodatne uvjete kako bi se sustav mogao riješiti [6].

U nastavku su redom objašnjeni koraci analitičkog načina pronalaženja nepoznatih veličina kod statički određenih sustava:

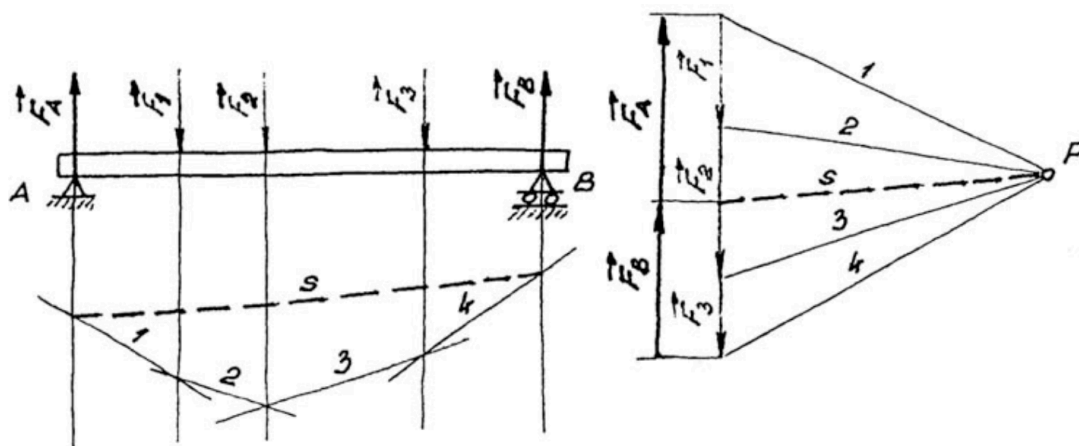
- oslobađanje tijela njegovih veza s okolinom;
- odabir koordinatnog sustava i ucrtavanje reakcija veza;
- postavljanje jednadžbi koje će na najjednostavniji način izraziti uvjete ravnoteže;
- rješavanje geometrijskih odnosa;
- rješavanje postavljenih jednadžbi ravnoteže, te izračunavanje nepoznatih veličina.

Kako bi se neko tijelo oslobodilo veza s okolinom, potrebno je zamisliti da su svi oslonci, odnosno veze, uklonjene i zamijenjene silama, takozvanim reakcijama veza. Te reakcije veza prenose se na tijelo i drže tijelo u ravnoteži umjesto uklonjenih oslonaca, a mogu biti pomični i nepomični. U nastavku su prikazani neki osnovni pomični i nepomični oslonci i načini kako su zamijenjeni s reakcijama veza [6].



Slika 4.10 Pomični i nepomični oslonci [6]

Kada se koristi grafičko određivanje nepoznatih reakcija veza upotrebljavaju se grafički uvjeti ravnoteže. Kada postoji sustav paralelnih sila koje djeluju na neko tijelo, za određivanje reakcija veza koristi se metoda verižnog poligona. S pravcima djelovanja reakcija  $\vec{F}_A$  i  $\vec{F}_B$  spajaju se presjecišta prve i posljednje polne zrake u planu položaja. Na taj način se dobiva zaključnica verižnog poligona. Da bi se odredile veličine reakcija  $F_A$  i  $F_B$  u poligonu (planu) sila vuče se paralela sa zaključnicom kroz polnu točku  $P$  [6].



Slika 4.11 Zaključnica verižnog poligona [6]

Primjer 4.1.

Homogena greda duljine  $AB$  postavljena je između oslonaca  $C$  i  $D$ . Oslonjena je na pod u točki  $B$ . Treba odrediti reakcije u osloncima.  $l$  je oznaka udaljenosti između krajeva grede i oslonaca [5].

Zadano:

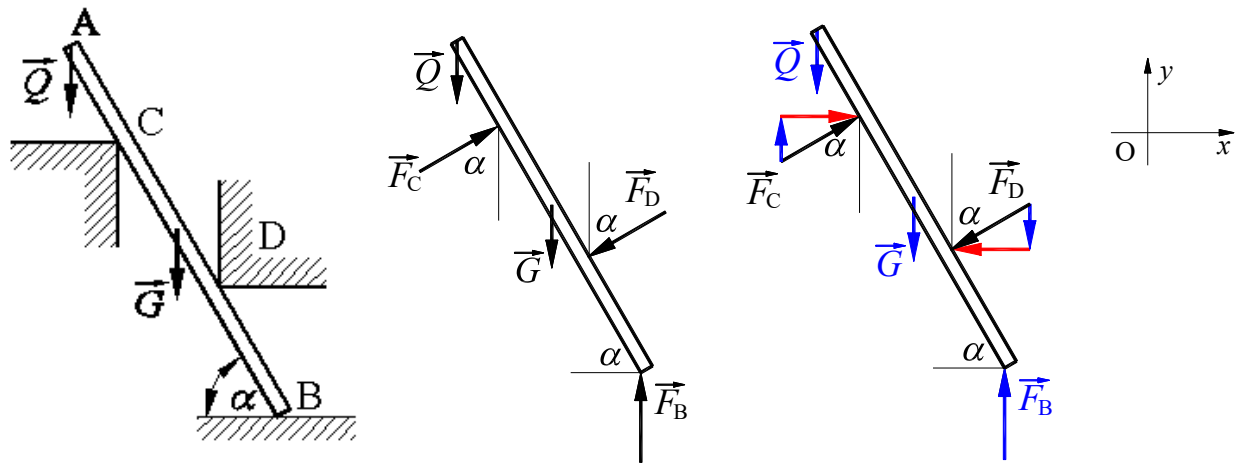
$$AC = l/4 \text{ m}$$

$$BD = l/3 \text{ m}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

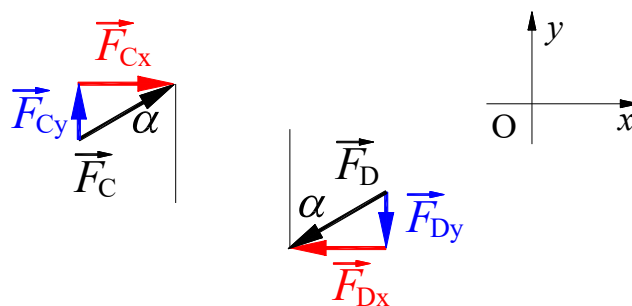
$$\vec{Q} = 200 \text{ N}$$

$$\vec{G} = 50 \text{ N}$$



Slika 4.12 Određivanje reakcije oslonaca homogene grede [5]

Na slici lijevo prikazana je greda postavljena između oslonaca C i D. Na slici u sredini oslonci su zamijenjeni silama, a na slici desno sile su rastavljene na komponente. Crveno označene sile paralelne su s x osi, a plavo označene sile paralelne su s y osi.



Slika 4.13 Rastavljanje sila na komponente [5]

Na osnovu ravnotežnih jednadžbi dobivamo sljedeće rezultate:

$$1. \sum X = 0$$

$$F_{Cx} \cdot \sin \alpha - F_{Dx} \cdot \sin \alpha = 0, \quad F_{Cx} = F_{Dx}$$

$$2. \sum Y = 0$$

$$F_{Cy} \cdot \cos \alpha - F_{Dy} \cdot \cos \alpha + \vec{F}_B - \vec{Q} - \vec{G} = 0 \rightarrow \vec{F}_B = \vec{Q} + \vec{G}$$

$$3. \sum M_B^{F_i} = 0$$

$$\vec{F}_D \cdot \frac{l}{3} + \vec{G} \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha + \vec{Q} \cdot l \cdot \cos \alpha - \vec{F}_C \cdot \frac{3}{4} l = 0$$

Ukoliko se jednadžba podijeli s  $l$  slijedi:

$$\vec{F}_D \cdot \frac{1}{3} + \vec{G} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha + \vec{Q} \cdot \cos \alpha - \vec{F}_C \cdot \frac{3}{4} = 0$$

Ako se dobiveni izraz iz prve jednačbe uvrsti u momentnu jednačbu, dobije se:

$$\left(\vec{Q} + \vec{G} \cdot \frac{1}{2}\right) \cos \alpha + \vec{F}_C \cdot \frac{1}{3} - \vec{F}_C \cdot \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\vec{Q} + \vec{G} \cdot \frac{1}{2}\right) \cos \alpha - \vec{F}_C \cdot \frac{5}{12} = 0$$

$$\vec{F}_C = \frac{12}{5} \left(\vec{Q} + \vec{G} \cdot \frac{1}{2}\right) \cos \alpha = \frac{12}{5} \left(200 + 50 \cdot \frac{1}{2}\right) \cos 60^\circ = 270 \text{ (N)}$$

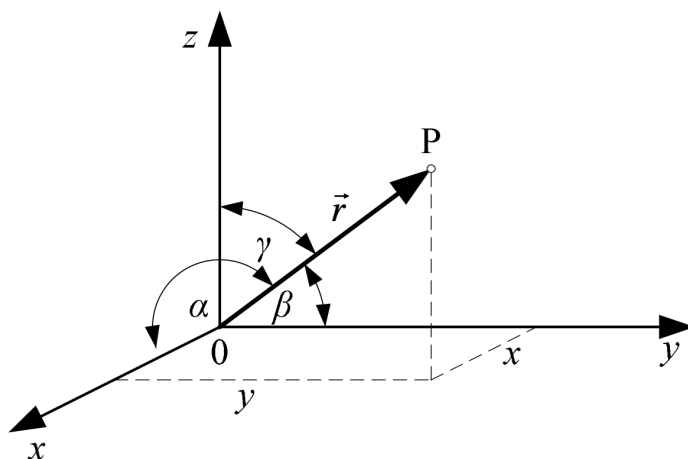
Sada se iz ravnotežne jednačbe po osi  $y$  dobije:

$$\vec{F}_B = \vec{Q} + \vec{G} = 200 + 50 = 250 \text{ (N)}$$

#### 4.1.4. Sile u prostoru

Silu je u prostoru moguće rastaviti na tri međusobno okomite komponente u odnosu na odabrani prostorni ortogonalni koordinatni sustav. Radijus vektor vodi od ishodišta koordinatnog sustava do točke  $P$  u prostoru i označava se s  $\vec{r}$ ,

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}. \quad (4.12)$$



Slika 4.14 Radijus vektor u prostoru [6]

Ako su kutovi nagiba radijus vektora  $\vec{r}$  prema osima  $x, y$  i  $z$  odabranog koordinatnog sustava  $\alpha, \beta, \gamma$ , onda se kutovi izračunavaju prema sljedećim izrazima:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}, \quad (4.13)$$

gdje je:

$$r = |\vec{r}|. \quad (4.14)$$

Ukoliko umjesto radijus vektora u koordinatnom sustavu zamislimo silu  $\vec{F}$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (4.15)$$

gdje je:

$$F = |\vec{F}|, \quad (4.16)$$

onda je njezine komponente moguće izračunati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos \alpha \\ F_y &= F \cdot \cos \beta \\ F_z &= F \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad (4.17)$$

Veličinu sile  $\vec{F}$  moguće je odrediti ukoliko su poznate sve tri njezine međusobno okomite komponente sljedećim izrazom

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (4.18)$$

Ako u prostoru djeluje više sila u jednoj točki, rezultantu je moguće odrediti pomoću komponenta na  $x, y$  i  $z$  osi:

$$F_{Rx} = \sum F_x, \quad F_{Ry} = \sum F_y, \quad F_{Rz} = \sum F_z, \quad (4.19)$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}. \quad (4.20)$$

Kod općeg slučaja sila u prostoru analitički uvjeti ravnoteže određeni su sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \\ \sum F_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

## 5. PRIMJENA MATRICA U STROJARSTVU

Matrice su matematički alat koji se često koristi u strojarstvu radi analize i rješavanja različitih problema. Primjene matrica u strojarstvu su širokog spektra i uključuju različite discipline kao što su statika i dinamika, termodinamika, mehanika fluida i mnoge druge. Koriste se za prikazivanje linearnih transformacija, sustava jednačbi i matematičkih modela koji se koriste u strojarstvu, te omogućavaju efikasno rješavanje složenih problema i analizu velikih skupova podataka.

Jedna od primjena matrica u strojarstvu je u analizi i rješavanju problema statike. Matrice se koriste za predstavljanje i rješavanje sustava različitih pomaka, sila i naprežanja u konstrukcijama. Na taj način inženjeri mogu izračunati opterećenja, izdržljivost i sigurnost građevinskih i strojarskih konstrukcija. Druga važna primjena matrica u strojarstvu je u dinamici sustava. Matrice se koriste za opisivanje i analizu ponašanja dinamičkih sustava kao što su mehanizmi, strojevi i vozila. Na temelju matematičkih modela u obliku matrica, inženjeri mogu predvidjeti kretanje, upravljivost i stabilnost tih sustava. Također, matrice se primjenjuju u termodinamici, mehanici fluida i drugim područjima strojarstva za opisivanje promjena energije, protoka fluida i drugih varijabli u sustavima. Sve to omogućava analiziranje efikasnosti, performanse i sigurnost različitih strojeva i sustava. Možemo reći da primjene matrica u strojarstvu su brojne i koriste se za rješavanje različitih problema i analizu kompleksnih sustava. Omogućavaju učinkovito modeliranje, rješavanje i optimiziranje sustava, što rezultira poboljšanim performansama, manjom potrošnjom energije i većom sigurnošću.

U nastavku biti će navedenih neki primjeri primjene matrica u rješavanju problema u strojarstvu.

### 5.1. Mehanika

Mehanika predstavlja temeljnu i najstariju granu fizike, kao i jednu od fundamentalnih znanstvenih disciplina, a bavi se proučavanjem gibanja materijalnih tijela i silama koje izazivaju to gibanje. Pojam materijalnog tijela se odnosi na prostor ispunjen materijom. Promjena položaja tijela se naziva gibanjem, dok se promjena oblika i volumena tijela naziva deformacijom. Temeljni cilj mehanike je proučavanje zakona gibanja materijalnih tijela i općih načela međudjelovanja tih tijela. Iako se mehanika temelji na opažanjima, iskustvu i eksperimentiranju, za rješavanje problema se ipak koriste egzaktne matematičke metode. Proučavanje gibanja se može provoditi isključivo iz teoretske perspektive primjenjujući samo matematičke metode, bez utvrđivanja njihovog praktičnog značaja. Ova vrsta proučavanja spada u područje teorijske ili racionalne mehanike, a kada se zakoni racionalne mehanike primjenjuju na tehničke probleme, to se onda naziva tehnička mehanika. Tehnička mehanika predstavlja prijelaz od teorijskih prema praktičnim

tehničkim znanostima, a njezina uobičajena podjela je na tri dijela: statika, kinematika i dinamika. Statika se fokusira na proučavanje ravnoteže i rasporeda sila unutar krutih tijela koje se ne deformiraju, odnosno ne mijenjaju oblik i volumen zbog vanjskog opterećenja. Kinematika proučava geometriju gibanja tijela, ne uzimajući u obzir izvore gibanja ili masu tijela. Dinamika se, s druge strane, bavi proučavanjem zakona gibanja materijalnih tijela pod utjecajem sila [5].

Osnovna načela statike su postavljena u djelima Aristotela i Arhimeda. Nakon perioda usporavanja znanstvenog razvoja tijekom feudalizma, mehanika se dalje razvijala od 15. stoljeća. Galileo Galilei i Isaac Newton su postavili temelje klasične mehanike, dok su Euler, D'Alambert i Lagrange razvili analitičke metode za rješavanje problemskih situacija u mehanici. Tijekom 19. stoljeća, analitičke metode su dalje razvijane uz primjenu varijacijskih principa mehanike, pri čemu su Hamilton i Gauss najviše pridonijeli tom razvoju [5].

Iz mehanike kao temeljne znanosti proizašle su specifične discipline poput mehanike fluida, teorije elastičnosti, plastičnosti i drugih. Teorija elastičnosti se bavi ovisnostima između opterećenja, oblika i materijala konstrukcija, dok nauka o čvrstoći predstavlja praktičnu primjenu tih ovisnosti na tehničke probleme. Teorija elastičnosti i nauka o čvrstoći su se razvile tijekom prvog dijela 19. stoljeća, a temelje su postavili Galileo Galilei, Edme Mariotte, Robert Hooke, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Augustin-Louis Cauchy, Claude-Louis Navier i drugi. Relativistička mehanika, čije je stvaranje pripisano Albertu Einsteinu, započela je početkom 20. stoljeća. Mehanika je, na određen način, uspostavila granice primjene zakona klasične mehanike koji su primjenjivi na gibanje tijela čije su brzine jako male u odnosu na brzinu svjetlosti [5].

## 5.2. Statika

Kada se u obzir uzmu Newtonovi zakoni i odnosi koji iz njih proizlaze, zaključuje se kako statika rješava dva osnovna zadatka. Prvi zadatak je slaganje sila i svođenje sustava sila na jednostavniji oblik, a drugi zadatak ogleda se u određivanju uvjeta ravnoteže sustava sila koje djeluju na kruto tijelo.

### *Primjer 5.1.*

Na slici 5.1 je prikazan prostorni sustav sila. Potrebno ga je reducirati u točku O (ishodište), a zatim odrediti [5]:

- a) glavni vektor,
- b) glavni moment,
- c) kut torzera,
- d) položaj Hamiltonova centra,



e) jednadžbu centralne osi prostornog sustava.

Zadano:

$$\vec{F}_1 = 4 \text{ kN},$$

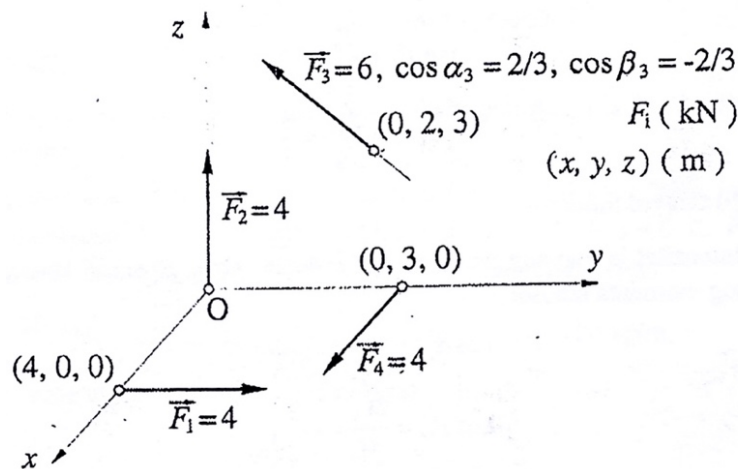
$$\vec{F}_2 = 4 \text{ kN},$$

$$\vec{F}_3 = 6 \text{ kN},$$

$$\vec{F}_4 = 4 \text{ kN},$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{2}{3},$$

$$\cos \beta_3 = -\frac{2}{3}.$$



Slika 5.1 Prostorni sustav sila, slika uz primjer 5.1 [5]

Redukcijom sustava u redukciju točku, dobiva se glavni vektor (redukcijaska rezultanta) kao geometrijski, odnosno vektorski zbroj svih sila i glavni moment sustava sila koji je vektorski zbroj svih vektora momenata sila. Na taj je način prostorni sustav sila sveden na dva vektora: glavni vektor  $\vec{F}_R$  i glavni moment  $\vec{M}_O$ . Za njih vrijedi:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_i = \vec{M}_O^{\vec{F}_i} \quad (5.1)$$

$$\vec{F}_R \neq 0, \quad \vec{M}_O \neq 0, \quad \theta \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}. \quad (5.2)$$

Ta dva vektora su različite vrste pa se ne mogu izravno zbrojiti, već tvore novi statički element torzer.

Kako je smjer sile  $\vec{F}_3$  u pozitivnom smjeru osi z, tada je:

$$\cos \gamma_3 = \sqrt{1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3}$$

Za glavni vektor vrijedi:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} \quad (5.3)$$

Skalarne komponente glavnog vektora računaju se prema:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum X_i = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i \\ F_{Ry} &= \sum Y_i = \sum F_i \cdot \cos \beta_i \\ F_{Rz} &= \sum Z_i = \sum F_i \cdot \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (5.4)$$

Za računanje vrijednosti glavnog momenta vrijedi:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (5.5)$$

Skalarne komponente glavnog vektora se računaju prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_{ix} = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) \\ M_y &= \sum M_{iy} = \sum (z_i X_i - x_i Z_i) \\ M_z &= \sum M_{iz} = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Na temelju izraza (5.3), (5.4), (5.5) i (5.6) izrađena je tablica 1.:

**Tablica 1. Vrijednosti glavnog vektora i glavnog momenta [5]**

$i$	$F_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$X_i$	$Y_i$	$Z_i$	$M_{ix}$	$M_{iy}$	$M_{iz}$
1	4	4	0	0	0	4	0	0	0	16
2	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0
3	6	0	2	3	4	-4	2	16	12	-8
4	4	0	3	0	4	0	0	0	0	-12
				$\Sigma$	8	0	6	16	12	-4
				$\vec{F}_R = 10$			$\vec{M} = 4\sqrt{26}$			

a) glavni vektor

Iz tablice je vidljivo da intenzitet glavnog vektora iznosi  $F_R = 10$  kN. Kosinusi kutova glavnog vektora iznose:

$$\cos \alpha_R = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta_R = \frac{F_{Ry}}{F_R} = 0$$

$$\cos \gamma_R = \frac{F_{Rz}}{F_R} = \frac{3}{5}$$

a) glavni moment

Intenzitet glavnog momenta iznosi  $M = 4\sqrt{26}$  kNm. Kosinusi kutova glavnog momenta su:

$$\cos \alpha_M = \frac{M_x}{M} = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

$$\cos \beta_M = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

$$\cos \gamma_M = \frac{M_z}{M} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

b) kut torzera

Kut torzera računa se prema izrazu:

$$\cos \theta = \frac{F_{Rx}M_x + F_{Ry}M_y + F_{Rz}M_z}{F_R M_O} \quad (5.7)$$

$$\cos \theta = 0.509, \quad \theta = 59,34^\circ$$

c) položaj Hamiltonova centra

Da bi se odredile koordinate Hamiltonova centra koristi se sljedeći izraz:

$$\vec{\rho}_C = \frac{1}{F_R^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_{Rx} & F_{Ry} & F_{Rz} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\vec{\rho}_C = \frac{1}{F_R^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_{Rx} & F_{Ry} & F_{Rz} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\rho}_C = \frac{1}{100} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 6 \\ 16 & 12 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{18}{25}\vec{i} + \frac{32}{25}\vec{j} + \frac{24}{25}\vec{k}.$$

Na taj način su dobivene koordinate:

$$x_C = -\frac{18}{25}, \quad y_C = \frac{32}{25}, \quad z_C = \frac{24}{25}.$$

d) jednadžba centralne osi

Jednadžba centralne osi dobiva se pomoću izraza:

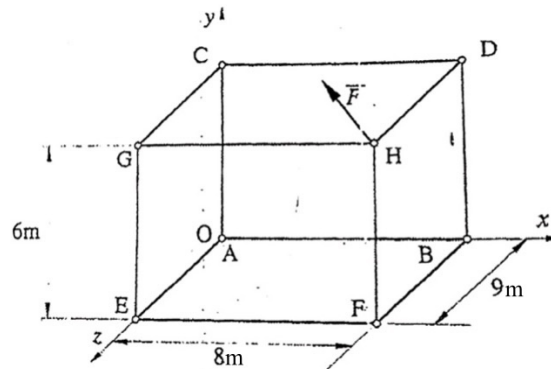
$$\frac{x - x_C}{F_{Rx}} = \frac{y - y_C}{F_{Ry}} = \frac{z - z_C}{F_{Rz}} \quad (5.9)$$

Kada se uvrste dobivene koordinate, slijedi:

$$\frac{x + \frac{18}{25}}{8} = \frac{y - \frac{32}{25}}{0} = \frac{z - \frac{24}{25}}{6}$$

*Primjer 5.2.*

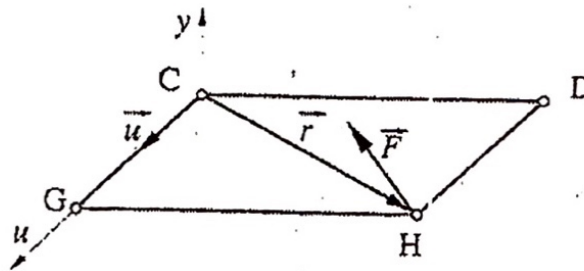
Zadana je sila  $\vec{F} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$  (kN) koja djeluje u točki H na prikazanom okviru. Potrebno je odrediti moment što ga sila  $\vec{F}$  ima za os CG [5].



**Slika 5.2 Djelovanje sile  $F$  na prostorni okvir [5]**

Na slici 5.2 vidljivo je kako se moment sile  $F$  za traženu os  $CG$  može napisati kao mješoviti produkt u obliku:

$$M_u^{\vec{F}} = M_{CG}^{\vec{F}} = M_u^{\vec{F}} = \vec{u} \cdot (\vec{r}_{CH} \times \vec{F}) = \vec{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (5.10)$$



**Slika 5.3 Moment sile  $F$  za os  $\vec{u}$**

Ako je  $\vec{u} = \vec{k}$ , onda je:

$$M_u^{\vec{F}} = \vec{k} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (5.11)$$

Budući da je  $\vec{r}_{CH} = \vec{r} = 8\vec{i} + 9\vec{k}$ , slijedi:

$$\begin{aligned} M_{CG}^{\vec{F}} &= M_u^{\vec{F}} = \vec{k} \cdot [(8\vec{i} + 9\vec{k}) \times (-5\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k})] \\ &= \vec{k} \cdot (-27\vec{i} + 11\vec{j} + 247\vec{k}) = 24 \text{ (kNm)} \end{aligned}$$

Isti rezultat može se dobiti računajući pomoću matrice:

$$M_u^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 9 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 24 \text{ (kNm)}$$

Rezultat se može zapisati i kao vektorska veličina u obliku:

$$M_{CG}^{\vec{F}} = M_u^{\vec{F}} = M_u \cdot \vec{u} = 24\vec{u} = 24\vec{k}$$

### 5.3. Nauka o čvrstoći

#### 5.3.1. Tenzor naprezanja

Kako bi se odredile dimenzije presjeka treba poznavati intenzitet unutrašnjih sila za svaku točku presjeka, a za poznavanje stanja naprezanja u jednoj točki potrebno je beskonačno mnogo podataka jer svakoj ravnini kroz tu točku odgovara jedan vektor naprezanja  $\vec{p}_n$ . To znači da za poznavanje naprezanja u jednoj točki tijela treba poznavati naprezanje za tri međusobno okomite ravnine kroz tu točku, uz uvjet da se te ravnine ne smiju sjeći duž istog pravca, čime dolazimo do ukupnog broja devet komponenata naprezanja kroz točku od čega je šest različitih. Kako je iz matematike poznato skup od  $3^2 = 9$  (matrica 3. reda) elemenata zove tenzorom drugog reda, a njegovi elementi se prema određenom pravilu transformiraju iz jednog u drugi Descartesov koordinatni sustav. Tih devet elemenata (kao devet skalara) može se složiti u kvadratnu formu, a stanje naprezanja im je potpuno određeno i definirano tenzorom naprezanja  $\sigma_{ij}$ . U matricnom obliku tenzor naprezanja piše se [7]:

$$\sigma_{ij} = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

U matrici tenzora naprezanja tangencijalne komponente su konjugirane, pa je tada tenzor naprezanja simetričan, a naziva se još i Cauchyjev tenzor naprezanja:

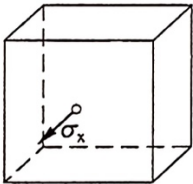
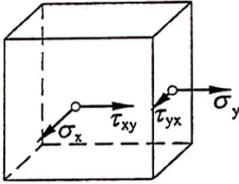
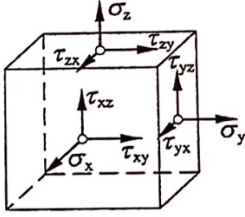
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^T = \sigma_{ji} \rightarrow [\sigma] = [\sigma]^T \quad (5.13)$$

Ovaj tenzor moguće je zapisati i u obliku jednostupčaste matrice ili vektora:

$$\sigma_{ij} = \{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\} \quad (5.14)$$

Osim tenzora drugog reda kojim se definira stanje naprezanja, deformacije itd., postoje i tenzori prvog reda. Ti tenzori predstavljaju vektorske veličine, a pomoću njih se može definirati npr. brzina i ubrzanje, sila, moment, te skalarni moment. Tenzori prvog reda označavaju se  $3^1$  (stupčasti vektor koji sadrži 3 elementa). Masa i temperatura definirane su tenzorima nultog reda,  $3^0$  (skalar, broj). Stanje naprezanja u ravnini moguće je prikazati uz pomoć četiri komponente naprezanja (tri različite), točnije na jednom pravcu uz pomoć jedne komponente naprezanja. Komponente naprezanja ovise o položaju koordinatnog sustava. Ako se osi koordinatnog sustava

poklope s osima glavnih napreznja (pravcima glavnih napreznja), odnosno ako se zarotira tako da na njegovim pravcima nema tangencijalnih napreznja, stanje napreznja za ravninu, prostor, odnosno pravac, može se prikazati tenzorom napreznja s jednim, dva, odnosno tri glavna napreznja. Glavna napreznja ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) su veličine koje ne ovise o izboru koordinatnog sustava, već predstavljaju vlastite vrijednosti tenzora napreznja. Na slici 5.4 prikazana su stanja napreznja i odgovarajući tenzori napreznja [7].

Stanja napreznja		
jednoosno (linearno)	dvoosno (ravninsko)	troosno (prostorno)
		
Tenzor napreznja $\sigma_{ij}$		
$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

Slika 5.4 Stanja napreznja [7]

Tenzor napreznja, kojim je stanje napreznja u točki napregnutog tijela potpuno određeno, može se rastaviti na dva dijela: sferni i devijatorski dio. Na isti se način zadano napreznje može rastaviti u dva sastavna manja stanja napreznja i to na sljedeći način:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^o + S_{ij} \text{ ili } [\sigma] = [\sigma^o] + [S], \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.15)$$

gdje je:

$\sigma_{ij} = [\sigma^o]$  – sferni dio tenzora napreznja

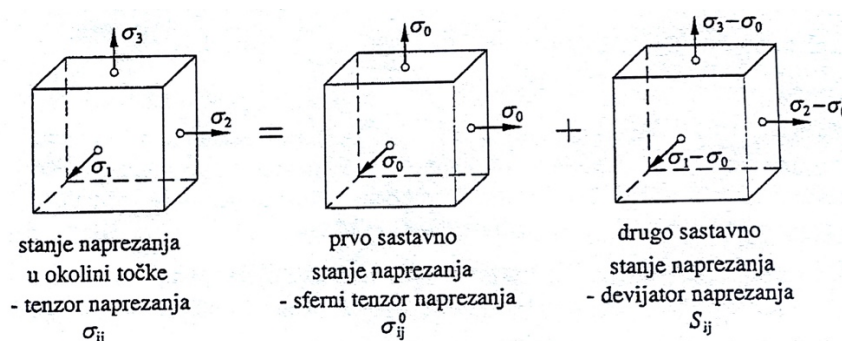
$S_{ij} = [S]$  – devijatorski dio tenzora napreznja.

Izraz je moguće napisati u matričnom obliku koristeći se glavnim napreznjima umjesto komponentama napreznja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\sigma = |\vec{\sigma}|.$$

Shematski prikaz matričnog oblika dan je na slici u nastavku.



Slika 5.5 Sastavna stanja naprezanja [7]

Pri čemu je  $\sigma_0$  srednje normalno naprezanje:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (5.17)$$

Na stranice elementarnog paralelopipeda u blizini neke točke napregnutog tijela djeluju samo glavna naprezanja  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$ , a prikazan je na lijevoj strani slike 5.5, te mu odgovara tenzor naprezanja prikazan s lijeve strane izraza (5.16). U sredini je prikazano prvo od sastavnih naprezanja kojem odgovara tenzor u sredini izraza. Kada bi naprezanja djelovala u suprotnom smjeru od onih prikazanih na slici, tada bi tenzor naprezanja predstavljao hidrostatski tlak. Ako je paralelopiped izrađen od izotropnog materijala neće mu se mijenjati oblik, već samo volumen. Ovim dijelom tenzora opisano je stanje naprezanja i on se naziva sferni dio tenzora naprezanja ili sferni tenzor naprezanja. Na desnoj strani slike 5.5 prikazano je drugo sastavno stanje naprezanja kojem odgovara izraz na desnoj strani izraza (5.16). U ovom slučaju, ukoliko se radi o izotropnom materijalu, tenzor predstavlja stanje naprezanja kada se ne mijenja volumen, već samo oblik paralelopipeda. Ako se u obzir uzme izraz (5.16), zbroj dijagonalnih članova biti će jednak nuli, a ovaj dio tenzora naziva se devijatorski dio tenzora naprezanja ili devijator naprezanja. Kada se govori o anizotropnom materijalu sferni dio tenzora naprezanja može uzrokovati i primjenu oblika, a devijatorski dio tenzora naprezanja može uzrokovati i promjenu volumena [7].

Pomoću komponenti naprezanja izraz (5.16) je moguće napisati:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

pri čemu će srednje normalno naprezanje iznositi:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \quad (5.19)$$

Izrazi (5.17) i (5.19) moraju dati istu vrijednost jer se vrijednost srednjeg normalnog napreznja ne mijenja pri rotaciji koordinatnog sustava.

### 5.3.2. Tenzor deformacije

Stanje deformacije u nekoj točki određeno je ako su poznate komponente deformacije za tri pravca kroz tu točku, uz uvjet da oni ne leže u istoj ravnini. Tenzor deformacije  $\varepsilon$ , odnosno matricu tenzora deformacije (devet komponenata deformacije, šest različitih) može se zapisati na sljedeći način [7]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Ako su pomaci ( $u, v, w$ ) i derivacije pomaka mali, komponente tenzora deformacije tada se mogu izraziti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx} = \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx}, \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & 2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} = \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy}, \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & 2\varepsilon_{zx} = 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

ili skraćeno Cauchyjev tenzor deformacije:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (5.22)$$

Izraz (5.22) može se napisati i pomoću glavnih dilatacija ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ) koje predstavljaju vlastite vrijednosti tenzora deformacije na sljedeći način:

$$\varepsilon_{ij} = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Analogno tenzoru napreznja, tenzor deformacije se također može rastaviti na sferni i devijatorski dio:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + e_{ij}, \quad \text{ili} \quad [\varepsilon] = [\varepsilon^0] + [e] \quad (5.24)$$

gdje je:



$\varepsilon_{ij}^0 = [\varepsilon^0]$  – sferni dio tenzora deformacije (sferni tenzor deformacije)

$e_{ij} = [e]$  – devijatorski dio tenzora deformacije (devijator deformacije).

Izraz je također moguće napisati pomoću glavnih dilatacija na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Izraz je moguće zapisati i pomoću komponenti:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

pri čemu srednja duljinska deformacija iznosi:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}. \quad (5.27)$$

Sferni dio tenzora deformacije, odnosno sferni tenzor deformacije uzrokuje deformaciju koja se odražava na promjenu volumena, dok oblik ostaje isti, a devijatorski tenzor deformacije, odnosno devijator deformacije uzrokuje promjenu oblika, dok volumen ostaje isti. Razlog tome je što su kod sfernog tenzora deformacije dilatacije na sva tri okomita pravca jednake, a kutne deformacije (klizanja) su jednake nuli (kutovi elemenata se ne mijenjaju), pa zbog toga postoji samo promjena volumena. Kod devijatora deformacije zbroj članova (koji daju volumensku deformaciju) na glavnoj dijagonali jednak je nuli, pa ne postoji promjena volumena, već samo promjena oblika [7]. Tenzor deformacije  $[\varepsilon]$ , koji je dan izrazom (5.20), definiran je sa šest međusobno različitih komponentata:

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xy},$$

koji ovise o tri poznate komponente pomaka:

$$u, v, w.$$

Sve navedene komponente deformacije, od koji su tri duljinske (normalne) deformacije, a šest kutne deformacije (tri različite), moguće je odrediti poznavajući tri komponente pomaka, uz uvjet da su komponente pomaka derivabilne funkcije koordinata  $x, y$  i  $z$  [7].

### Primjer 5.3.

Stanje naprezanja u točki zadano je tenzorom naprezanja [7]:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

Potrebno je izračunati naprežanje u ravnini ( $R$ ) koja prolazi tom točkom, ako je zadan jedinični vektor normale te ravnine:

$$\vec{n} = [n] = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1736 \\ r \end{bmatrix}.$$

Računa se komponenta jediničnog vektora normale  $\vec{r}$ :

$$r^2 = 1 - l^2 - m^2 = 1 - 0,5^2 - 0,1736^2 = 0,7199$$

$$r = 0,8484$$

S koordinatnim osima, ravnina ( $\mathbb{R}$ ) zatvara kutove:

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 80^\circ, \quad \gamma = 31,9^\circ.$$

Vrijednosti je moguće zapisati i u matričnom obliku:

$$[p_n] = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1736 \\ 0,8484 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,02 \\ 2,392 \\ 2,369 \end{bmatrix}.$$

Tada ukupno naprežanje iznosi:

$$p_n = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2} = \sqrt{2,02^2 + 2,392^2 + 2,369^2} = 3,926 \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

Na kraju su dobiveni kosinusi kutova koje pravac (na kojem leži vektor naprežanja) zatvara s koordinatnim osima:

$$\cos \alpha_p = \frac{p_{nx}}{p_n} = \frac{2,02}{3,926} = 0,515$$

$$\cos \beta_p = \frac{p_{ny}}{p_n} = \frac{2,392}{3,926} = 0,609$$

$$\cos \gamma_p = \frac{p_{nz}}{p_n} = \frac{2,369}{3,926} = 0,603.$$

#### Primjer 5.4

Potrebno je odrediti normalno i tangencijalno naprežanje na ravnini ( $\mathbb{R}$ ) iz primjera 5.3, a zatim sferni i devijatorski dio tenzora naprežanja [7].

Skalarna komponenta normalnog naprežanja  $\sigma_n$  moguće je dobiti sumom projekcija komponenata ukupnog naprežanja u toj ravnini jer ono leži na pravcu normale  $\vec{n}$  na promatranoj ravnini ( $\mathbb{R}$ ).

$$\sigma_n = \vec{p}_n \cdot \vec{n} = [p_n]^T \cdot [n] = [p_{nx} \ p_{ny} \ p_{nz}] \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ r \end{bmatrix}$$

$$= \{2,02 \quad 2,392 \quad 2,369\} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1736 \\ 0,8484 \end{bmatrix} = 3,435 \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

Na koordinatnim osima komponente normalnog napreznja iznose:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{bmatrix} = [n] \cdot \sigma_n = \vec{n} \cdot \sigma_n = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1736 \\ 0,8484 \end{bmatrix} \cdot 3,435 = \begin{bmatrix} 1,718 \\ 0,596 \\ 2,914 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

Tangencijalno napreznje iznosi:

$$\vec{\tau}_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} = 1,902 \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

Sada vrijednost srednjeg normalnog napreznja iznosi:

$$\vec{\sigma}_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1 + 2 + 1}{3} = \frac{4}{3} \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right),$$

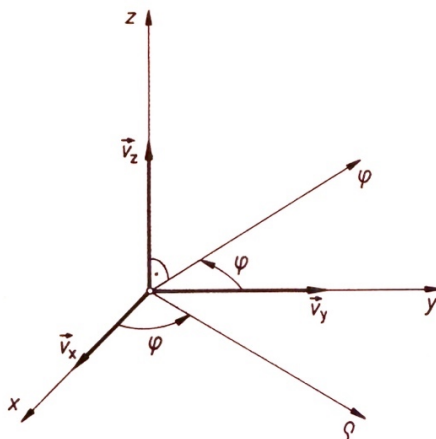
dok sferni i devijatorski dio tenzora napreznja iznose:

$$[\sigma^o] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1 & 2 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 2 & 3 & -1/3 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

## 5.4. Kinematika

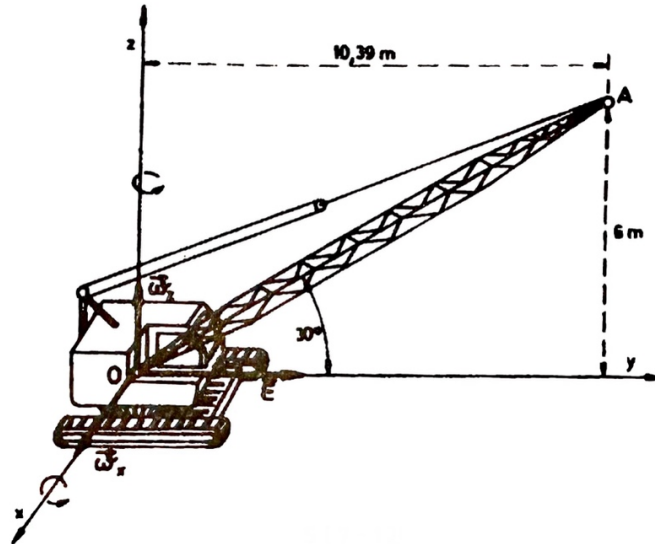
Između komponenata vektora brzine i ubrzanja u Descartesovom, cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu postoje veze pomoću kojih se komponente iz jednog sustava mogu transformirati u pripadne komponente u drugom koordinatnom sustavu [8].



Slika 5.6 Prijelaz iz Descartesovog koordinatnog sustava u cilindrični sustav [8]

Primjer 5.5.

Dizalica na slici rotira konstantnom kutnom brzinom  $w_z = 0,3 \frac{rad}{s}$  oko vertikalne osi. Istovremeno se greda  $\overline{OA}$  podiže konstantnom kutnom brzinom  $w_x = 0,5 \frac{rad}{s}$ . Duljina grede iznosi  $\overline{OA} = l = 12 \text{ m}$ . Treba naći rezultirajuću kutnu brzinu  $w$  grede, kutno ubrzanje  $\varepsilon$ , brzinu  $v_A$  i ubrzanje  $a_A$  vrha grede [8].



Slika 5.7 Slika uz primjer [8]

Rezultirajuća kutna brzina grede koja vrši gibanje oko nepomične točke 0 iznosi:

$$\vec{w} = \vec{w}_x + \vec{w}_z$$

$$\vec{w} = 0,5\vec{i} + 0,3\vec{k}$$

$$w = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2} = 0,58 \left( \frac{rad}{s} \right).$$

Os rotacije leži u ravnini 0z i zatvara osima kutove:

$$\cos \alpha_w = \frac{w_x}{w} = \frac{0,5}{0,58} = 0,8528 = 30^\circ 55',$$

$$\cos \gamma_w = \frac{w_z}{w} = \frac{0,3}{0,58} = 0,5146 = 59^\circ 5'.$$

Kutno ubrzanje grede iznosi:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{w}_x}{dt} + \frac{d\vec{w}_z}{dt} = \frac{d\vec{w}_x}{dt} + \vec{0}.$$

Naime,  $w_z$  je konstanta po veličini i po pravcu, jer se osi pomičnog i nepomičnog sustava poklapaju, pa je  $\frac{d\vec{w}_z}{dt} = \vec{0}$ . Kutna brzina  $\vec{w}_x$  konstantna je po veličini, ali nije po pravcu, jer se os  $\xi$

na kojoj leži pravac vektora trenutno poklapa s osi  $x$ , a inače se zakreće u smjeru djelovanja kutne brzine  $\vec{w}_z$ . Zbog toga je:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{w}_\xi}{dt} = \frac{d\vec{w}_x}{dt} + \vec{w}_z \times \vec{w}_x = \vec{0} + 0,3\vec{k} \times 0,5\vec{i}$$

$$\vec{\varepsilon} = 0,15\vec{j} \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right).$$

Kako je vektor položaja točke A:

$$\vec{r}_A = 10,39\vec{j} + 6\vec{k},$$

a kako je

$$\vec{w} = 0,5\vec{i} + 0,3\vec{k}$$

imamo:

$$\vec{v}_A = \vec{w} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0 & 10,39 & 6 \end{vmatrix} = -3,12\vec{i} - 3\vec{j} + 5,2\vec{k}.$$

Ubrzanje točke A:

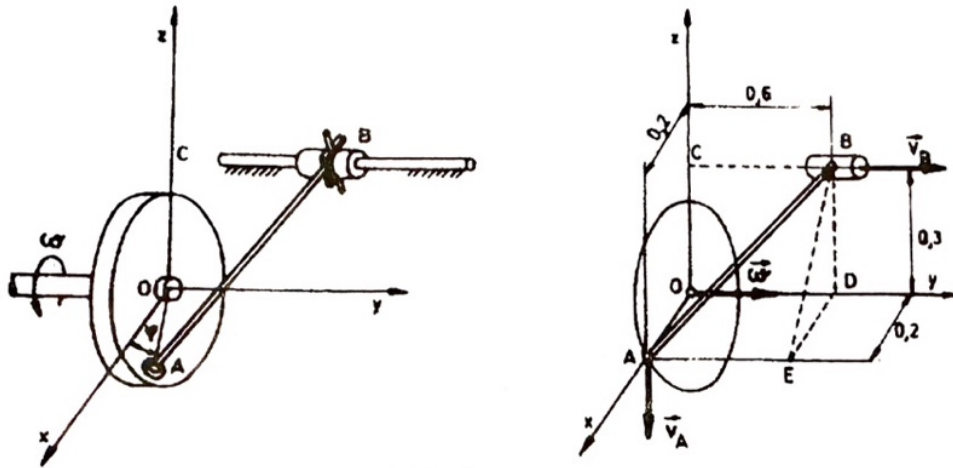
$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}_A) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A + \vec{w} \times \vec{v}_A. \quad (5.28)$$

$$\vec{a}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 10,39 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,5 & 0 & 0,3 \\ -3,12 & -3 & 5,2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_A = 1,8\vec{i} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - 3,54\vec{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - 1,5\vec{k} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right).$$

*Primjer 5.6.*

Poluga  $\overline{AB}$  duljine 0,7 m vezana je za disk sfernim zglobovom, a za osovinu BC pomoću viljuške i cilindričnog klizača. Disk rotira u ravnini  $Oxz$  konstantnom kutnom brzinom  $\vec{w}_y = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , dok klizač B slobodno klizi po osnovici BC. Za položaj  $\varphi = 0$  točke A na disku naći brzinu klizača B i kutnu brzinu poluge  $\overline{AB}$  [8].



Slika 5.8 Slika uz primjer [8]

Brzina točke A:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_y \times \vec{r}_A = 12\vec{j} \times 0,2\vec{i} = -2,4\vec{k} \left(\frac{m}{s}\right)$$

Ako se s  $w$  označi kutna brzina poluge  $\overline{AB}$ , onda se brzina točke B računa:

$$v_B \cdot \vec{j} = -2,4\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ -0,2 & 0,6 & 0,3 \end{vmatrix}$$

$$v_B \cdot \vec{j} = -2,4\vec{k} + (0,3w_y - 0,6w_z)\vec{i} + (-0,2w_z - 0,3w_x)\vec{j} + (0,6w_x + 0,2w_y)\vec{k}$$

Izjednačavanjem koeficijenata istih ortova dobiva se:

$$0 = 0,3w_y - 0,6w_z, | -0,2 |$$

$$2,4 = 0,6w_x + 0,2w_y, | 0,3 |$$

$$v_B = -0,2w_z - 0,3w_x, | 0,6 |$$

Nakon zbrajanja dobije se:

$$0,6\vec{v}_B = -7,2 \rightarrow \vec{v}_B = -1,2\vec{j} \left(\frac{m}{s}\right).$$

Zglob B može rotirati oko osovine  $\overline{BC}$  i oko osi okomite na ravninu ABC. Možemo se poslužiti potegom EB koji leži na navedenoj ravnini  $\overline{ABC}$  i okomit je na osovinu  $\overline{BC}$ . Zbog toga je projekcija kutne brzine  $\vec{w}$  poluge  $\overline{AB}$  na poteg  $\overline{BC}$  jednaka nuli.

$$\vec{w} \cdot \vec{r}_{EB} = (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) \cdot \vec{r}_{EB} = 0$$

$$-0,3w_z + 0,2w_x = 0,$$

$$-0,2w_z - 0,3w_x = v_B = -1,2.$$

$$w_x = 2,77 \left(\frac{rad}{s}\right), \quad w_y = 3,69 \left(\frac{rad}{s}\right), \quad w_z = 1,846 \left(\frac{rad}{s}\right).$$

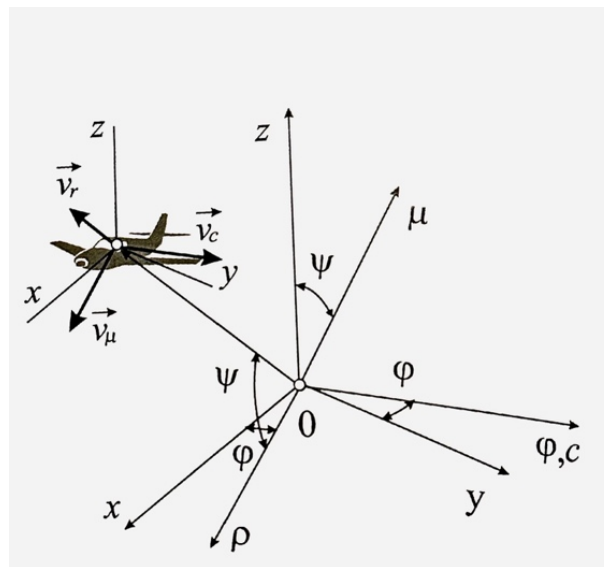
$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k},$$

$$\vec{w} = 2,77\vec{i} + 3,69\vec{j} + 1,846\vec{k}.$$

Matrice se mogu koristiti i kod transformacije brzine i ubrzanja. Tako je pomoću matričnog zapisa moguće odraditi transformacije između komponenta Descartesovog i cilindričnog koordinatnog sustava, cilindričnog i sfernog koordinatnog sustava, te Descartesovog i sfernog koordinatnog sustava [9].

*Primjer 5.7.*

Let aviona prati se radarom pomoću kojeg se određuju sferne koordinate položaja te dalje računalom komponente brzine i ubrzanja. U trenutku kada su kutovi iznosili  $\varphi = 45^\circ$  i  $\psi = 60^\circ$  izračunate su komponente brzine  $v_\rho = 53 \left(\frac{m}{s}\right)$ ,  $v_c = 122 \left(\frac{m}{s}\right)$  i  $v_\mu = -100 \left(\frac{m}{s}\right)$ . Izračunajte komponente vektora brzine aviona u Descartesovom desnokretnom koordinatnom sustavu [10].



**Slika 5.9 Slika uz primjer [10]**

Transponirana matrica (zamjena redaka i stupaca matrice) iznosi:

$$[T_{S \rightarrow D}] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -\sin \varphi & -\sin \psi \cos \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi & \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Kada se u izraz uvrste brojevi, dobiva se sljedeća matrična jednadžba transformacije:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = [T_{S \rightarrow D}] \begin{bmatrix} v_\rho \\ v_c \\ v_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot 0,707 & -0,707 & -0,866 \cdot 0,707 \\ 0,5 \cdot 0,707 & 0,707 & -0,866 \cdot 0,707 \\ 0,866 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53 \\ 122 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, množenjem transformacijske matrice i vektora kojega se želi transformirati, dobivaju se komponente vektora u Descartesovom koordinatnom sustavu:

$$v_x = 6,29 \left(\frac{m}{s}\right), \quad v_y = 166,24 \left(\frac{m}{s}\right), \quad v_z = 4,1 \left(\frac{m}{s}\right).$$

## 5.5. Mehanika fluida

Mehanika fluida je grana fizike koja proučava ponašanje tekućina i plinova pod utjecajem sile i pritiska. Razumijevanje i analiza ovog ponašanja od velikog su značaja u mnogim područjima, kao što su hidrodinamika, aerodinamika i hidrologija. Jedan od ključnih alata koji se koristi u mehanici fluida jest primjena matrica. Primjena matrica u mehanici fluida omogućuje preciznije modeliranje i analizu sustava tekućina i plinova, rješavanje jednadžbi gibanja fluida, strujanje fluida kroz različita geometrijska tijela, proračun gubitaka tlaka itd [11].

*Primjer 5.8.*

Tenzor naprezanja u točki T fluida ima sljedeće komponente u odnosu na koordinatni sustav  $Ox_1x_2x_3$  [11]:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Odrediti:

- vektor naprezanja na ravninu orijentiranu normalom  $\vec{n}_i = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  i apsolutnu vrijednost toga vektora,
- normalnu komponentu naprezanja u toj ravnini i apsolutnu vrijednost tangencijalnog naprezanja,
- kut  $\varphi$  između vektora normale i vektora naprezanja.

Rješenje:

a)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_i = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\sigma_i(n_i) = n_i \sigma_{ij}$$

$$(n_i)\sigma_1 = n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31} = \frac{2}{3}(-7) + \frac{1}{3}(2) = -4$$

$$(n_i)\sigma_2 = n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32} = -\frac{2}{3}(-5) = \frac{10}{3}$$

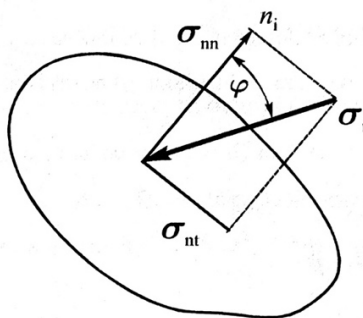
$$(n_i)\sigma_3 = n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33} = \frac{2}{3}(2) + \frac{1}{3}(-4) = 0$$



$$\sigma_i = \left(-4, \frac{10}{3}, 0\right)$$

$$|(n_i)\sigma_i| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 0^2} = 5,21$$

b)



**Slika 5.10 Slika uz primjer [11]**

$$\sigma_{nn} = \sigma_i n_i = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = -4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{44}{9}$$

$$\sigma_{ni} = \sqrt{(\sigma_i)^2 - (\sigma_{nn})^2} = \sqrt{5,21^2 - \left(-\frac{44}{9}\right)^2} = 1,79$$

c) Treba uočiti da je na slici kotiran kut između normale i negativnog vektora napreznja za koji vrijedi:

$$\cos \varphi = \frac{|\sigma_i n_i|}{|\sigma_i|} = \frac{|\sigma_{nn}|}{|\sigma_i|} = \frac{\left|-\frac{44}{9}\right|}{5,21} = 0,938, \quad \varphi = \arccos(0,938) = 20,2^\circ$$

## 5.6. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je široko korištena metoda numeričke analize koja se koristi za rješavanje problema s primjenom matematike i inženjeringa. Ova metoda se često koristi u različitim područjima, kao što su mehanika, termika, elektromagnetika i druga polja znanosti i tehnike. Jedan od ključnih elemenata metode konačnih elemenata je primjena matrica. Matrice se koriste za prikazivanje i manipuliranje podacima o geometriji, svojstvima materijala i ponašanjem sistema koji se proučava. Primjena matrica omogućuje efikasno rješavanje velikog broja jednačbi koje modeliraju sistem, čime se olakšava numeričko rješavanje problema [12].

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom diplomskom radu objašnjena je primjena vektora i matrica u strojarstvu. U teorijskom dijelu definirane su skalarne veličine, vektori i matrice te su objašnjena njihova osnovna svojstva i operacije. Naglašena je važnost vektora i matrica u kontekstu strojarstva, gdje se često susrećemo s višedimenzionalnim problemima.

U drugom dijelu rada prikazani su primjeri upotrebe vektora i matrica u različitim područjima strojarstva. U mehanici se vektori koriste za opisivanje sila, brzina i ubrzanja tijela, dok se matrice koriste za rješavanje sustava jednadžbi. U statiki je prikazano kako se vektori koriste za analizu ravnoteže sustava, dok matrice omogućuju analizu konstrukcija. U nauci o čvrstoći ukazano je na upotrebu matrica za analizu naprezanja i deformacija. Kinematika je područje u kojem se vektori koriste za analizu kretanja tijela, dok matrice omogućuju rješavanje kompleksnih kinematičkih problema. Metoda konačnih elemenata je spomenuta kao tehnika koja koristi matrice za numeričku analizu mehaničkih problema s kompleksnim geometrijama.

U zaključku, može se reći da je primjena vektora i matrica neizostavna u strojarstvu. Njihova upotreba omogućuje preciznije i efikasnije rješavanje problema u različitim disciplinama strojarstva, posebno prilikom izrade proračuna. Njihova primjena omogućuje učinkovito rješavanje problema iz područja mehanike, statike, nauke o čvrstoći, kinematike, mehanike fluida, metode konačnih elemenata itd. Razumijevanje vektora i matrica pruža temelje za analizu i rješavanje različitih strojarskih problema, te stoga predstavlja ključnu vještinu za inženjere strojarstva. U budućnosti, daljnje istraživanje primjene vektora i matrica u strojarstvu može dovesti do razvoja novih algoritama i tehnika koje će omogućiti još napredniju analizu i optimizaciju strojarskih sustava.

## LITERATURA

- [1] K. Jurasić i I. Dražić, »Matematika 1 - zbirka zadataka,« Zigo, Rijeka, 2008.
- [2] »Enciklopedija,« [Mrežno]. Available:  
<https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=64091>. [Pokušaj pristupa srpanj 2023].
- [3] »Zbrajanje vektora,« [Mrežno]. Available:  
<http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node49.html>. [Pokušaj pristupa srpanj 2023].
- [4] M. Katalinić i M. Pačar, »Matrice i determinante s primjenom,« Dvostruka duga, 2011.
- [5] J. Brnić, Statika, Rijeka : Tehnički fakultet sveučilišta u Rijeci, 2004.
- [6] »Elementi strojeva i mehanizama,« [Mrežno]. Available:  
[https://elemstroj.fsb.hr/pdf/pmf/osnove\\_strojarstva/osnove\\_mehanike.pdf](https://elemstroj.fsb.hr/pdf/pmf/osnove_strojarstva/osnove_mehanike.pdf). [Pokušaj pristupa kolovoz 2023].
- [7] J. Brnić i G. Turkalj, Nauka o čvrstoći 1, Rijeka: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci , 2004.
- [8] Z. Sapunar, Kinematika, Rijeka: Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 1994.
- [9] S. Jecić, Mehanika 2, Zagreb: Tehnička knjiga Zagreb, 1989.
- [10] R. Žigulić i S. Braut, Kinematika, Rijeka: Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 2012.
- [11] Z. Virag, M. Šavar i I. Džijan, Mehanika fluida 1, Zagreb: FSB, 2018.
- [12] J. Sorić, »Metoda konačnih elemenata,« Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.