

# Eksperimentalno utvrđivanje koeficijenta restitucije

---

**Vrbić, Ivona**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:853867>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-30**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
**STROJARSKI ODJEL**  
**STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE**

Ivona Vrbić

**EKSPERIMENTALNO UTVRĐIVANJE KOEFICIJENTA**  
**RESTITUCIJE**

Završni rad

Karlovac, 2016.

**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
**STROJARSKI ODJEL**  
**STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE**

Ivona Vrbić

**EKSPERIMENTALNO UTVRĐIVANJE KOEFICIJENTA**  
**RESTITUCIJE**

**Experimental determination of the coefficient of restitution**

Završni rad

Mentor:

Dr.sc. Tihomir Mihalić

Karlovac, 2016.

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam ovaj završni rad na temu EKSPERIMENTALNO UTVRĐIVANJE KOEFICIJENTA RESTITUCIJE izradila samostalno koristeći navedenu literaturu i znanja stečena tijekom studija, uz vodstvo mentora dr.sc. Tihomira Mihalića, kojem se ovim putem zahvaljujem.

Najviše se zahvaljujem svojoj obitelji, posebno roditeljima, koji su mi omogućili daljnje školovanje i davali potporu kroz sve izazove.

Ivona Vrbić



## VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

Stručni studij: Mehatronika

Usmjerenje: -

.Karlovac, 01.6.2016.

### ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

Student: Ivona Vrbić

Matični broj: 0112612028

Naslov: **EKSPERIMENTALNO UTVRĐIVANJE KOEFICIJENTA RESTITUCIJE**

Opis zadatka:

- Dati teoretski pregled sudara te opisati vrste sudara.
- Opisati statističke obrade rezultata mjerenja
- Opisati eksperiment za određivanje koeficijenta restitucije.
- Eksperimentalno odrediti koeficijent restitucije za 3 kuglice

Zadatak zadan:

01.6.2016.

Rok predaje rada:

30.6.2016.

Predviđeni datum obrane:

07.7.2016.

Mentor:

Predsjednik Ispitnog povjerenstva:

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	2
POPIS SLIKA .....	3
POPIS TABLICA.....	4
POPIS OZNAKA .....	5
SAŽETAK.....	6
1. UVOD.....	7
2. TIPOVI SUDARA.....	8
2.1. Elastični sudari.....	8
2.1.1. Jedno-dimenzijski Newton-ov sudar.....	9
2.1.2. Dvo-dimenzijski sudar .....	12
2.2. Neelastični (plastični) sudari.....	14
2.2.1. Potpuno neelastični sudari .....	14
2.2.2. Djelomično neelastični sudari.....	15
3. KOEFICIJENT RESTITUCIJE.....	16
3.1. Opseg veličina koeficijenta restitucije $k$ .....	16
4. OBRADA REZULTATA MJERENJA.....	18
4.1. Pogreške pri mjerenju .....	18
4.2. Analiza rezultata mjerenja .....	18
4.2.1. Statistička analiza mjerenja.....	18
5. EKSPERIMENTALNI DIO .....	23
5.1. Određivanje potrebnih izraza .....	23
5.2. Prikaz rezultata eksperimenta .....	25
5.2.1. Prikaz rezultata za kuglicu mase $m_1$ .....	26
5.2.2. Prikaz rezultata za kuglicu mase $m_2$ .....	29
5.2.3. Prikaz rezultata za kuglicu mase $m_3$ .....	32
6. ZAKLJUČAK.....	35
PRILOZI.....	36
LITERATURA.....	37

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Elastični sudar tijela jednakih masa – prije sudara.....	10
Slika 2.	Elastični sudar tijela jednakih masa – poslije sudara .....	10
Slika 3.	Elastični sudar tijela različitih masa - prije sudara.....	11
Slika 4.	Elastični sudar tijela različitih masa – poslije sudara.....	11
Slika 5.	Elastični sudar tijela u dvije dimenzije.....	12
Slika 6.	Neelastični sudar tijela jednakih masa – prije sudara.....	15
Slika 7.	Neelastični sudar tijela jednakih masa – poslije sudara .....	15
Slika 8.	Slobodni pad kuglice na ravnu podlogu .....	23

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Statistička analiza slučajnih pogrešaka pri mjerenju.....	19
Tablica 2. Prikaz visine $h_1$ za kuglicu mase $m_1$ .....	26
Tablica 3. Prikaz ukupnog vremena T za kuglicu mase $m_1$ .....	27
Tablica 4. Prikaz visine $h_1$ za kuglicu mase $m_2$ .....	29
Tablica 5. Prikaz ukupnog vremena T za kuglicu mase $m_2$ .....	30
Tablica 6. Prikaz visine $h_1$ za kuglicu mase $m_3$ .....	32
Tablica 7. Prikaz ukupnog vremena T za kuglicu mase $m_3$ .....	33



**POPIS OZNAKA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
k	-	- koeficijent restitucije
m	kg	- masa
u,v	m/s	- brzina
t	s	- vrijeme
$\Theta, \theta$	$^{\circ}$	- kutovi odbijanja
$\varphi$	$^{\circ}$	- kut kontakta
H,h	mm	- visina
g	$m/s^2$	- gravitacijska akceleracija, $g \approx 10 m/s^2$
c	m/s	- brzina svjetlosti

## **SAŽETAK**

Ovim završnim radom teoretski su opisana svojstva i podjele sudara prema koeficijentu restitucije. Statističke obrade rezultata mjerenja generalno su objašnjene te korištene u eksperimentalnom dijelu ovog rada.

Također, opisan je provedeni eksperiment te su prikazani obrađeni dobiveni rezultati.

## **SUMMARY**

This final paper theoretically describes collisions and their properties according to coefficient of restitution. Statistical analysis of measuring results is generally explained and used for experimental part of this paper.

Also, conducted experiment is described and results are processed.

## **KLJUČNE RIJEČI**

Elastični sudari, neelastični sudari, koeficijent restitucije, brzina sudara

## **KEY WORDS**

Elastic collisions, inelastic collisions, coefficient of restitution, collision speed

## **1. UVOD**

Pod sudarom razumijeva se kratkotrajni dodir između dva čvrsta tijela, pri kojem se javljaju velike sile na mjestu dodira. [1]

Kada se tijela sudare, svako od njih kratkotrajno osjeti silu, koja dovodi do promjene brzine i momenta svakog od njih. Veličina razlike brzina pri sudaru naziva se brzina zatvaranje (eng. closing speed). Tijela se deformiraju na mjestu sudara i stvaraju dodir u nizu točaka koje oblikuju liniju sudara. Unutarnje sile djeluju upravo na toj liniji, te se definira i Newton-ov koeficijent restitucije. [3]

## 2. TIPOVI SUDARA

Općenito postoje dva tipa sudara:

- Jedno-dimenzijski sudari (eng. head-on collision) kod kojih je brzina svakog tijela u trenucima prije udara u ravnini sa linijom udara.
- Dvo-dimenzijski sudari (eng. non-head on collision) kod kojih brzina svakog tijela u trenucima prije udara nije u ravnini sa linijom udara.

Procedura analize sudara ovisi o svojstvima tijela, odnosno o tome je li proces elastičan ili neelastičan (plastičan). Razliku između ta dva procesa određuje koeficijent restitucije, te postoje dva specijalna tipa sudara:

- Elastični sudari, kod kojih su sačuvani i moment i kinetička energija, te imaju koeficijent restitucije  $k \approx 1$ .
- Neelastični (plastični) sudari, kod kojih je sačuvan samo moment, te imaju koeficijent restitucije  $k \neq 1$ . [2]

### 2.1. Elastični sudari

Elastični sudar je sudar dvaju tijela u kojem je ukupna količina kinetičke energije oba tijela nakon sudara jednaka ukupnoj količini kinetičke energije prije sudara.

Savršeno elastičnim sudarom se smatra onaj sudar kod kojeg nema pretvorbe kinetičke energije u drugi oblik (na primjer toplina ili zvuk). U praksi, svaki makroskopski sudara tijela će dovesti do pretvorbe dijela kinetičke energije u unutarnju energiju ili neki drugi oblik. Dakako, neke slučajeve sudara možemo aproksimirati i klasificirati kao savršeno elastične.

Sudare u idealnim plinovima i sudare atoma smatramo savršeno elastičnima, dok recimo, sudare bilijarskih kugla možemo aproksimirati kao gotovo savršeno elastične.

Elastične sudare možemo podijeliti na tri tipa:

- Jedno-dimenzijski Newton-ov sudar (eng. one-dimensional Newtonian)
- Jedno-dimenzijski relativistički sudar (eng. one-dimensional relativistic)
- Dvo-dimenzijski sudar

### 2.1.1. Jedno-dimenzijski Newton-ov sudar

Neka su  $m_1$  i  $m_2$  mase tijela,  $u_1$  i  $u_2$  brzine tijela prije sudara, a  $v_1$  i  $v_2$  brzine tijela nakon sudara.

Prema zakonu o očuvanju linearnog momenta, ukupni moment prije sudara je jednak ukupnom momentu poslije sudara:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (1)$$

Također, prema zakonu o očuvanju energije slijedi:

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad (2)$$

Simultanim rješavanjem slijedi:

$$v_1 = \frac{u_1(m_1 - m_2) + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{u_2(m_2 - m_1) + 2m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Pomoću jednadžbi (1) i (2) možemo riješiti bilo koji slučaj elastičnog sudara.

Kao najčešći i najjednostavniji slučaj elastičnog sudara, opisati ću sudar dvije kugle, istih masa  $m_1 = m_2 = m$ .

Kugla mase  $m_1$  brzinom  $u_1$  direktno udara kuglu mase  $m_2$ , koja je u stanju mirovanja, odnosno  $u_2 = 0$ . Uvrštavanjem u jednadžbu (2) slijedi:

$$\frac{1}{2} m u_1^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) \quad (5)$$

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (6)$$

Primjenom iste supstitucije na jednadžbu (1) slijedi:

$$m u_1 = m (v_1 + v_2) \quad (7)$$

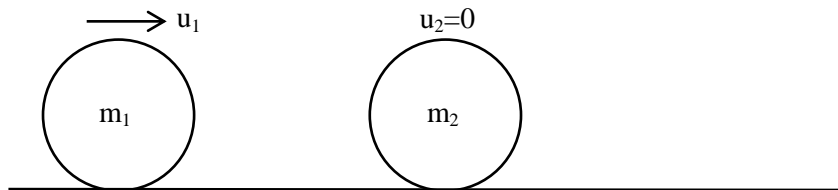
$$u_1 = (v_1 + v_2) \quad (8)$$

Ukoliko kvadriramo jednadžbu (8), slijedi:

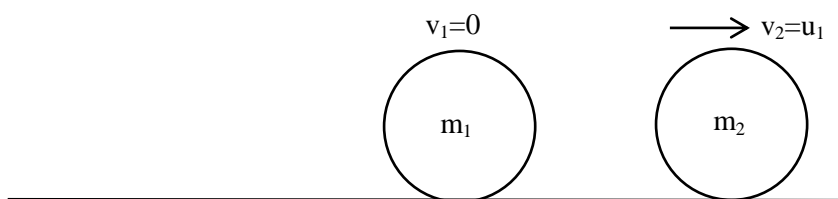
$$u_1^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 \quad (9)$$

Oduzimanjem jednadžbe (6) od jednadžbe (9) slijedi:

$$2v_1v_2 = 0 \quad (10)$$



Slika 1. Elastični sudar tijela jednakih masa – prije sudara



Slika 2. Elastični sudar tijela jednakih masa – poslije sudara

Zaključuje se da je  $v_1=0$  i zbog toga  $v_2=u_1$ . Odnosno, kugla mase  $m_1$  i kugla mase  $m_2$  zamjenjuju brzine: nakon sudara, kugla mase  $m_1$  staje ( $v_1=0$ ), a kugla mase  $m_2$  se kreće naprijed brzinom  $v_2=u_1$ .

Brzina centra mase se ne mijenja u sudaru. Neka je  $t$  vrijeme prije sudara, a  $t_1$  vrijeme poslije sudara. Centar mase je tada zadan jednadžbama (11) i (12):

$$\bar{x}(t) = \frac{m_1x_1(t) + m_2x_2(t)}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

$$\bar{x}(t_1) = \frac{m_1x_1(t_1) + m_2x_2(t_1)}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

Slijede jednačbe momenata prije i poslije sudara:

$$v_{\bar{x}} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad (13)$$

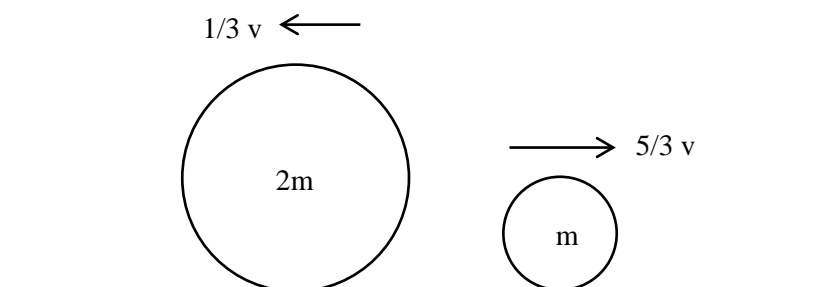
$$v_{\bar{x}}' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (14)$$

Pošto je moment sačuvan, slijedi  $v_{\bar{x}} = v_{\bar{x}}'$ .

Prema jednačbama centra mase, brzine tijela se zbog sudara zamijene: u slučaju tijela različitih masa, tijelo veće mase se kreće sporije prema centru mase, a odbija se tom istom brzinom, dok se tijelo manje mase kreće brže prema centru, a odbija se također istom brzinom.



Slika 3. Elastični sudar tijela različitih masa – prije sudara

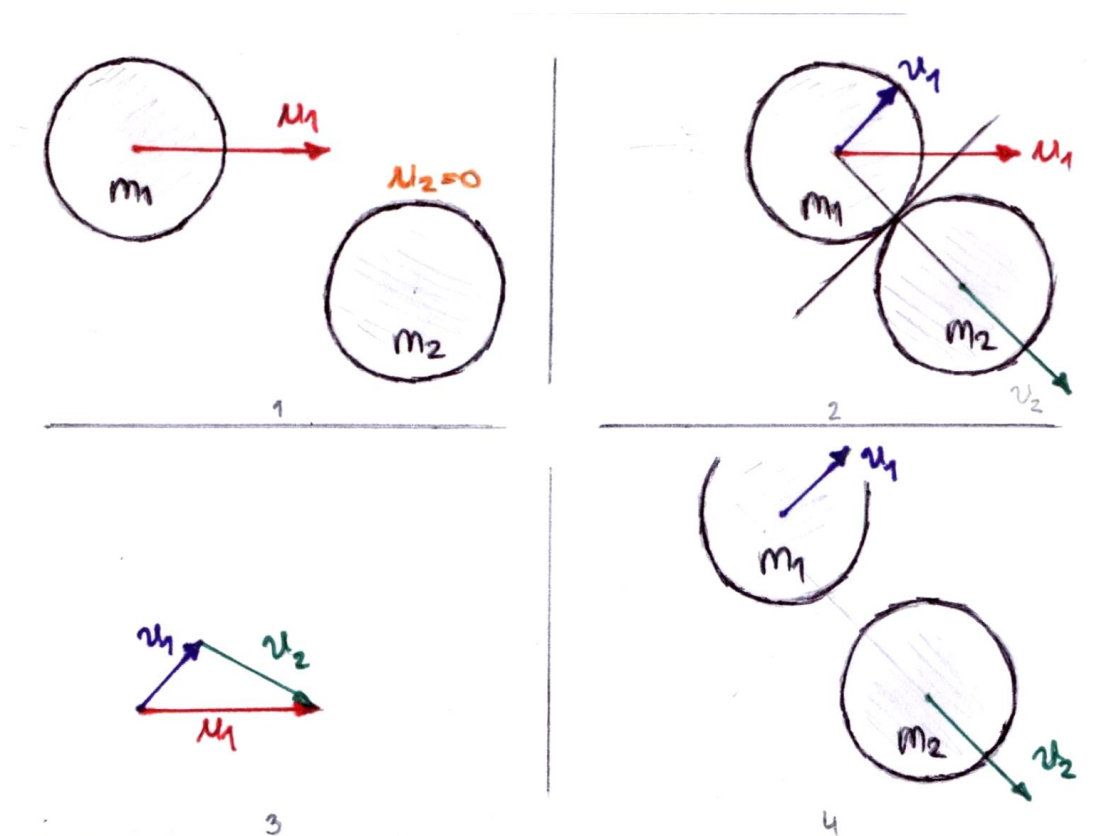


Slika 4. Elastični sudar tijela različitih masa – poslije sudara

Također, iz jednačbi (3) i (4) se vidi da u slučaju velike vrijednosti brzine  $u_1$ , vrijednosti brzine  $v_1$  su male, ako su tijela približno istih masa. Odnosno, sudar s tijelom male mase značajno ne mijenja brzinu, dok sudar s tijelom velike mase uzrokuje odbijanje tijela većom brzinom.

### 2.1.2. Dvo-dimenzijski sudar

Za slučaj sudara tijela u dvije dimenzije, ukupna brzina svakog tijela mora se razlučiti na dvije, međusobno okomite komponente: brzinu u smjeru normale, odnosno linije sudara, te brzinu u smjeru tangente na normalu, koja se u sudaru ne mijenja. Brzine u smjeru normale tada se mogu koristiti u jednadžbama jedno-dimenzijskog sudara, a ukupne brzine će tada ovisiti o vrsti sudara i mogu se izračunati iz tih novih komponenti.



Slika 5. Elastični sudar tijela u dvije dimenzije

U COM okviru (eng. center-of-momentum frame) u bilo kojem trenutku iznosi brzine tijela su obrnuto proporcionalne masi tijela, a smjerovi su im suprotni. Iznosi brzina se u elastičnim sudarima ne mijenjaju, dok smjerovi brzina mogu ovisiti o obliku tijela i točki sudara.



Ako se pretpostavi da je drugo tijelo u stanju mirovanja, kutovi odbijanja tijela,  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$ , su povezani sa ukupnim kutom odbijanja  $\theta$  sistema COM prema jednadžbi (15):

$$\tan \vartheta_1 = \frac{m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2 \cos \theta} \quad (15)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\pi - \theta}{2} \quad (16)$$

Iznosi brzina tijela nakon sudara tada su:

$$v_1' = v_1 \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}}{m_1 + m_2} \quad (17)$$

$$v_2' = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (18)$$

Ako su oba tijela u gibanju, komponente  $x$  i  $y$  brzine prvog tijela su zadane jednadžbama (21) i (22), gdje su  $v_1$  i  $v_2$  skalarne veličine prvotnih brzina tijela,  $m_1$  i  $m_2$  mase tijela,  $\theta_1$  i  $\theta_2$  kutovi njihovim putanja, a  $\varphi$  kut kontakta. Slijedi:

$$v_{1x} = v_1 \cos \theta_1 \quad (19)$$

$$v_{1y} = v_1 \sin \theta_1 \quad (20)$$

$$v_{1x}' = \frac{v_1 \cos(\theta_1 - \varphi)(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2 \cos(\theta_2 - \varphi)}{m_1 + m_2} \cos(\varphi) + v_1 \sin(\theta_1 - \varphi) \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (21)$$

$$v_{1y}' = \frac{v_1 \cos(\theta_1 - \varphi)(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2 \cos(\theta_2 - \varphi)}{m_1 + m_2} \sin(\varphi) + v_1 \sin(\theta_1 - \varphi) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (22)$$

Brzinu drugog tijela dobivamo na isti način.

Jednadžbe (21) i (22) su dobivene iz činjenice da se interakcija dva tijela može izračunati uz pomoć kuta kontakta,  $\varphi$ .

Zaključno, brzine tijela se mogu izračunati u jednoj dimenziji rotirajući  $x$  i  $y$  osi tako da budu paralelne sa kutom kontakta, a onda ponovno rotirane u prvotnu orijentaciju da bi se dobile stvarne komponente brzina. [4]

## 2.2. Neelastični (plastični) sudari

Neelastični sudari su oni sudari u kojima je samo moment očuvan, dok se kinetička energija pretvara u druge oblike zbog unutarnjem trenja. U makroskopskim tijelima, kinetička energija se pretvara u potencijalnu, zvučnu ili toplinsku energiju, što dovodi do deformacije tijela.

Neelastične sudare možemo podijeliti na dva tipa:

- Potpuno neelastični sudari
- Djelomično neelastični sudari

### 2.2.1. Potpuno neelastični sudari

U potpuno neelastičnom sudaru, gdje je koeficijent restitucije jednak nuli, tijela nakon sudara ostaju slijepljena jedno za drugo, što dovodi do potpunog gubitka kinetičke energije. Međutim, potrebno je očuvanje momenta.

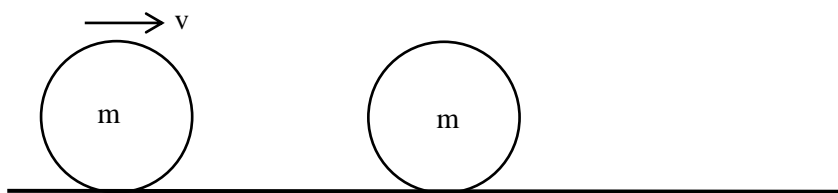
Neka je  $m_a$  masa prvog tijela,  $m_b$  masa drugog tijela,  $u_a$  i  $u_b$  brzine tijela prije sudara, a  $v_a$  i  $v_b$  brzine tijela poslije sudara. Ako je sustav u idealnim okolnostima, odnosno trenja između tijela i podloge, prema zakonu o očuvanju momenta slijedi da je moment sustava očuvan:

$$m_a u_a + m_b u_b = (m_a + m_b) v \quad (23)$$

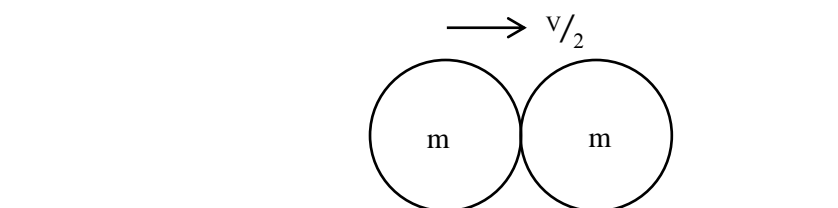
Slijedi da je ukupna brzina  $v$  zadana jednadžbom (24):

$$v = \frac{m_a u_a + m_b u_b}{m_a + m_b} \quad (24)$$

Na primjer, ako su tijela jednakih masa,  $m_a = m_b = m$ , a prvo tijelo se giba brzinom  $u_a = v$ , dok je drugo tijelo u stanju mirovanja,  $u_b = 0$ , slijedi da je ukupna brzina sustava  $v = \frac{u_a}{2} = v/2$ .



Slika 6. Neelastični sudar tijela jednakih masa – prije sudara



Slika 7. Neelastični sudar tijela jednakih masa – poslije sudara

### 2.2.2. Djelomično neelastični sudari

Djelomično neelastični sudari su u praksi najčešći. Tijela se u ovakvim tipovima sudara ne sljepljuju, ali je neka količina kinetičke energije ipak izgubljena. Kinetička energija se tada najčešće pretvara u trenja, zvuk ili toplinu. [5]

### 3. KOEFICIJENT RESTITUCIJE

Restitucija, lat., (eng. restitution) označuje uspostavu prijašnjem stanja.

Koeficijent restitucije  $k$  je mjera 'restitucije' sudara između dva tijela, odnosno koeficijent restitucije pokazuje omjer između kinetičke energije koja ostaje tijelima da se odvoje jedno od drugoga i kinetičke energije koja je izgubljena, to jest, pretvorena u drugi oblik.

Definira se i kao omjer relativne brzine poslije i prije sudara, uz liniju sudara:

$$k = \frac{\text{relativna brzina poslije sudara}}{\text{relativna brzina prije sudara}} \quad (25)$$

Jednadžbu (25) možemo predočiti i na sljedeći način:

$$\text{Brzina udaljavanja nakon sudara} = k \cdot \text{brzina približavanja prije sudara} \quad (26)$$

#### 3.1. Opseg veličina koeficijenta restitucije $k$

Koeficijent restitucije je pozitivan realni broj između 0 i 1.0. Postoji pet slučajeva:

- $k = 0$ , za savršeno neelastični sudar. Tijela nakon udara ostaju slijepljena, kinetička energija se pretvara u druge oblike.
- $0 < k < 1$ , za realan neelastični sudar. Dio kinetičke energije se raspršuje.
- $k = 1$ , za savršeno elastični sudar. Kinetička energija je sačuvana, relativne brzine udaljavanja i približavanja tijela su iste.
- $k < 0$ , za sudar u kojem brzina udaljavanja tijela ima isti smjer kao brzina zatvaranja (eng. closing speed), odnosno da su tijela prošla jedno kroz drugo bez velikog kontakta (na primjer, metak koji prolazi kroz metu).
- $k > 1$ , za sudar u kojem je energija oslobođena (na primjer, kugle od nitroceluloze koje eksplodiraju pri sudaru).

Koeficijent restitucije je svojstvo para tijela. Ako se jedno tijelo sudari sa nekoliko različitih tijela, svako od njih ima svoj koeficijent restitucije. [6]

U slučaju jedno-dimenzijskog sudara dva tijela, koeficijent restitucije je zadan jednadžbom (27), gdje su  $u_1$  i  $u_2$  brzine tijela prije sudara, a  $v_1$  i  $v_2$  brzine poslije sudara:

$$k = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \quad (27)$$

Ako zanemarimo sile trenja i ako tijelo u stanju mirovanja ispustimo na horizontalnu površinu, tijelo će odbijati/odskakivati, kinetička energija će biti približno nula, dok će koeficijent restitucije tada ovisiti o omjeru potencijalnih gravitacijskih energija tijela nakon prvog odbijanja i na početnoj visini:

$$k = \sqrt{\frac{P_{g(\text{visina odbijanja})}}{P_{g(\text{početna visina})}}} = \sqrt{\frac{mgh}{mgH}} = \sqrt{\frac{h}{H}} \quad (28)$$

Jednadžbe sudara dva elastična tijela mogu se izmijeniti pomoću koeficijenta restitucije, te kao takve se mogu koristiti i za neelastične sudare. Brzine nakon sudara tada su:

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_2 k(u_2 - u_1)}{m_1 + m_2} \quad (29)$$

$$v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_1 k(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \quad (30)$$

## 4. OBRADA REZULTATA MJERENJA

### 4.1. Pogreške pri mjerenju

Zadatak nekog fizikalnog mjerenja jest utvrditi brojčanu vrijednost neke fizikalne veličine. Zbog nesavršenosti mjernih instrumenata i ljudskih osjetila nijedno mjerenje nije apsolutno točno, te se stoga svakoj izmjerenoj veličini pridaje pogreška. Ako se pretpostavi da postoji neka prava vrijednost  $X$  određene fizikalne veličine, tada rezultat pojedinog mjerenja  $x$ , odstupa od prave vrijednosti  $X$ , a odstupanje  $\Delta X$  naziva se pravom pogreškom tog mjerenja, i zadano je jednačinom (31):

$$\Delta X = x - X \quad (31)$$

Cilj uzastopnih mjerenja i računa pogrešaka je što preciznije i pouzdanije odrediti pravu vrijednost fizikalne veličine.

Postoje tri vrste pogrešaka:

- Sistematske pogreške, koje nastaju zbog neispravnih mjernih instrumenata, izbora pogrešne metode mjerenja ili njenog pogrešnog izvođenja, i sl.
- Grube pogreške, koje nastaju ljudskim propustima u toku mjerenja, naglim poremećajem u okolini ili u mjernom uređaju.
- Slučajne pogreške, koje donosi samo mjerenje. U vezi su s neizbježnom nesavršenošću opažача i uređaja, mogu se smanjivati, ali se ne daju potpuno izbjeći.

### 4.2. Analiza rezultata mjerenja

Analiza rezultata mjerenja odnosi se na analizu slučajnih pogrešaka pri mjerenju, dok se smatra da su grube i sistematske pogreške pri mjerenju otklonjene prije analize. Analiza i proračun slučajnih pogrešaka pri mjerenju radi se prema zakonima vjerojatnosti i statistike.

#### 4.2.1. Statistička analiza mjerenja

Analiza i proračun slučajnih pogrešaka pri mjerenju neke fizikalne veličine prema statističkim zakonima ima svoju punu vrijednost kod velikog broja mjerenja. Međutim, zbog

vremenskog ograničenja pri izvođenju mjerenja u laboratoriju predviđeno je da se obavlja niz od 5 do 10 istovrsnih mjerenja neke fizikalne veličine.

- **Slučajne pogreške neposredno mjerenih fizikalnih veličina:**

Pri izvođenju niza istovrsnih mjerenja neke fizikalne veličine, zbog neizbježnih (slučajnih) pogrešaka pri mjerenju, dobiva se niz od  $n$  različitih  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  mjerenih vrijednosti za tu fizikalnu veličinu. Mjerene vrijednosti fizikalnih veličina uvijek je potrebno prikazati tablično (Tablica 1.).

U tablice mjerene vrijednosti fizikalnih veličina i odgovarajuće mjerne jedinice upisuju se u stupac označen s  $x_i$ .

Tablica 1. Statistička analiza slučajnih pogrešaka pri mjerenju

$n$	$x_i$	$\bar{x} = \langle x \rangle$	$\bar{x} - x_i$	$ \bar{x} - x_i $	$\Delta x, \Delta x_{max}$	$r_x, r_{max}$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$m_x, M_x$
Mj. jed.								
1.								
2.								
3.								
..								
..								
n.								
$\sum_{i=1}^n$			0					

Proračun pogrešaka pri mjerenju u okviru statističke analize rezultata mjerenja može se podijeliti u nekoliko koraka:

### 1. korak: Izračunavanje aritmetičke sredine ili srednje vrijednosti niza mjerenja

Aritmetička srednja vrijednost niza mjerenja  $x$  računa se prema jednadžbi (32) i predstavlja najvjerojatniji iskaz nepoznate prave vrijednosti fizikalne veličine  $X_p$ :

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (32)$$

## 2. korak: Izračunavanje apsolutne pogreške niza mjerenja

Odstupanja pojedinog mjerenja od aritmetičke sredine iznose  $\bar{x} - x_1, \bar{x} - x_2, \dots, \bar{x} - x_n$  i zapisana su u Tablica 1. (stupac  $\bar{x} - x_i$ ). Za svako  $i$ -to mjerenje određuje se odstupanje od aritmetičke srednje vrijednosti prema jednadžbi (33):

$$\Delta x = \bar{x} - x_i \quad (33)$$

Pri čemu vrijedi da je  $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0$ , što služi za kontrolu vrijednosti aritmetičke srednje vrijednosti  $\bar{x}$ . Apsolutna vrijednost odstupanja  $i$ -tog mjerenja od aritmetičke sredine  $|\bar{x} - x_i|$  naziva se apsolutnom pogreškom  $|\Delta x_i|$  i upisana je za svako mjerenje u Tablica 1. (stupac  $|\bar{x} - x_i|$ ).

Apsolutna pogreška niza mjerenja je zadana jednadžbom (34):

$$\Delta x = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta x_i|}{n} \quad (34)$$

Apsolutna vrijednost najvećeg odstupanja od aritmetičke srednje vrijednosti naziva se maksimalnom apsolutnom pogreškom:

$$\Delta x_{\max} = |\bar{x} - x_{\max}| \quad (35)$$

Rezultat mjerenja izražen pomoću apsolutne pogreške je zadan jednadžbama (36) i (37):

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)_{\text{broj mjerenja}} \quad (36)$$

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x_{\max})_{\text{broj mjerenja}} \quad (37)$$

## 3. korak: Izračun relativne pogreške mjerenja

Relativna pogreška niza mjerenja najčešće se izražava postotkom i zadana je jednadžbom (38):

$$r_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (38)$$

Maksimalna relativna pogreška je omjer između maksimalne apsolutne pogreške i srednje vrijednosti svih mjerenja:



$$r_{\max} = \frac{\Delta x_{\max}}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (39)$$

Rezultat mjerenja izražen pomoću relativne pogreške zadan je jednadžbama (40) i (41):

$$x = (\bar{x} \pm r_x)_{\text{broj mjerenja}} \quad (40)$$

$$x = (\bar{x} \pm r_{\max})_{\text{broj mjerenja}} \quad (41)$$

#### 4. korak: Izračun srednje kvadratne pogreške pojedinog mjerenja (standardna devijacija)

Srednja pogreška pojedinog mjerenja je mjera odstupanja pojedinih vrijednosti  $x_i$  od srednje vrijednosti  $\bar{x}$ . Standardna devijacija pojedinog mjerenja za dovoljan broj mjerenja poprima stalnu vrijednost, a računa se prema jednadžbi (42):

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (42)$$

#### 5. korak: Izračun standardne pogreške (standardne devijacije aritmetičke sredine)

Izvedbom većeg broja mjerenja može se očekivati da će mjerena fizikalna veličina biti pouzdanije određena. Mjera nepouzdanosti rezultata mjerenja je srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine (standardna pogreška), a zadana je jednadžbom (43):

$$M_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (43)$$

koja je za faktor  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  manja od standardne devijacije pojedinog mjerenja (nepreciznosti uređaja):

$$M_n = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (44)$$

Vjerojatnost da se prava vrijednost fizikalne veličine  $X^P$  nalazi u intervalu unutar jedne standardne devijacije ( $\bar{x} - M_n \leq X^P \leq \bar{x} + M_n$ ) iznosi 68.3%, a vjerojatnost da se ona nalazi u intervalu unutar tri standardne devijacije ( $\bar{x} - 3M_n \leq X^P \leq \bar{x} + 3M_n$ ) iznosi 99.9%.

## 6. korak: Izražavanje rezultata mjerenja

Relativna nepouzdanost mjerenja prikazuje se omjerom nepouzdanosti mjerenja  $M_n$  i aritmetičke sredine mjerene fizikalne veličine  $x$ , a izražava se u postotcima prema jednadžbi (45):

$$R_M = \frac{M_n}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (45)$$

Rezultat mjerenja izražen pomoću standardne pogreške je zadan jednadžbama (46) i (47):

$$x = (\bar{x} \pm M_n)_{\text{broj mjerenja}} \quad (46)$$

$$x = (\bar{x} \pm R_M)_{\text{broj mjerenja}} \quad (47)$$

- **Slučajne pogreške posredno određenih fizikalnih veličina (ovisna mjerenja)**

U slučaju da je tražena fizička veličina  $F$ , funkcija više neposredno izmjerenih veličina  $x_i$ ,  $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , od kojih svaka ima svoju pogrešku  $\Delta x_i$  ( $M_{ni}$ ) tada je najvjerojatnija vrijednost veličine  $F$  jednaka:

$$\bar{F} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (48)$$

Srednja kvadratna pogreška je:

$$M_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} M_i \right)^2} \quad (49)$$

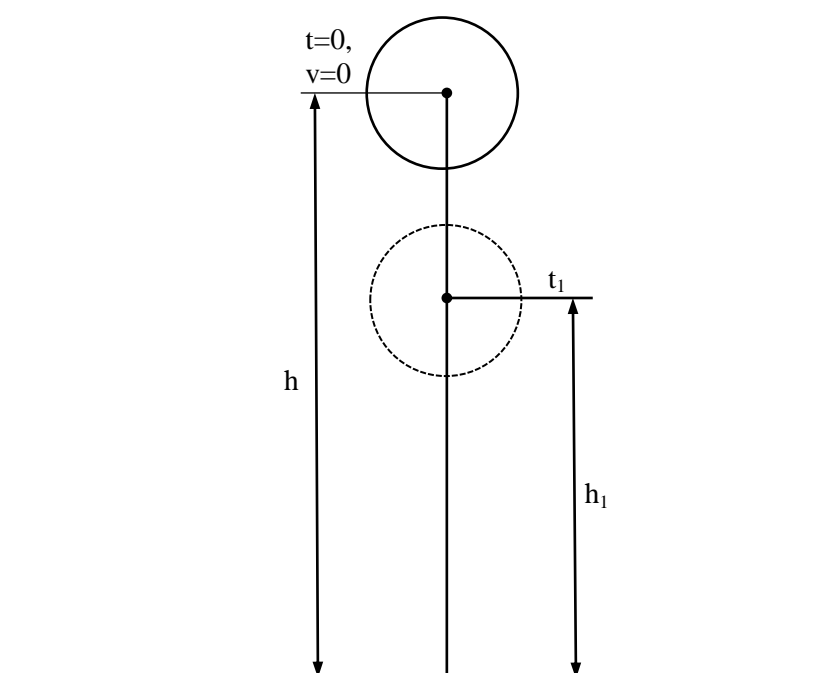
Rezultat se izražava u obliku:

$$F = \bar{F} \pm M_F \quad (50)$$

[7]

## 5. EKSPERIMENTALNI DIO

Koeficijent restitucije može se odrediti na način da se kuglica mase  $m$  ispusti s visine  $h$  da slobodno pada na ravnu nepomičnu podlogu beskonačne mase. Iz izmjerene vremena, koje je potrebno da se kuglica nakon niza odbijanja potpuno umiri, dobiva se izračunavanjem koeficijent restitucije. Potrebno je odrediti izraz koji daje odnos između koeficijenta restitucije  $k$  i vremena  $T$  potrebnog da se kuglica umiri, te ga prikazati numerički. [1]



Slika 8. Slobodni pad kuglice na ravnu podlogu

### 5.1. Određivanje potrebnih izraza

Kod prvog udara kuglice o podlogu, brzina prije udara iznosi:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (51)$$

Pošto je sudar ravan (kut sudara je jednak  $90^\circ$ ), koeficijent restitucije je  $k = \frac{c}{v}$ , tako da je brzina nakon prvog sudara kuglice i podloge jednaka:

$$c = kv \quad (52)$$

Zbog te brzine čestica će doseći visinu  $h_1 = c^2/2g$ , pa je:

$$c = \sqrt{2gh_1} \quad (53)$$

Koeficijent restitucije prema tome je:

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \quad (54)$$

Put  $h$  prijeđe čestica za vrijeme:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (55)$$

dok je za  $h_1$  potrebno vrijeme:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad (56)$$

Ukupno vrijeme  $T_0$  od početka padanja do kraja prvog odskoka kuglice je:

$$T_0 = t + t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad (57)$$

Pošto je  $\sqrt{h_1} = k\sqrt{h}$ , slijedi:

$$T_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}(1+k) \quad (58)$$

Vrijeme koje protekne od početka drugog padanja s visine  $h_1$  do umirivanja čestice nakon drugog odskoka na visini  $h_2$  iznosi:

$$T_1 = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}(1+k) = \sqrt{\frac{2h}{g}}k(1+k) \quad (59)$$

Za treći ciklus potrebno vrijeme iznosi:

$$T_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}(1+k) = \sqrt{\frac{2h}{g}}k^2(1+k) \quad (60)$$

Teorijski, postoji beskonačan broj takvih ciklusa sa sve manjim vremenima. Ukupno vrijeme do umirivanja kuglice je:

$$T=T_1+T_2+T_3+\dots, \text{ odnosno } T=\sqrt{\frac{2h}{g}}(1+k)(1+k+k^2+\dots) \quad (61)$$

Pošto je druga zagrada na desnoj strani geometrijski red u kojem  $0 < k < 1$ . Suma tog reda jest konačan broj  $1/(1-k)$ , tako da je ukupno vrijeme do zaustavljanja kuglice konačna veličina s iznosom:

$$T=\frac{1+k}{1-k}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (62)$$

Iz gornje jednadžbe dobivamo koeficijent restitucije  $k$ :

$$k=\frac{T-\sqrt{\frac{2h}{g}}}{T+\sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (63)$$

## 5.2. Prikaz rezultata eksperimenta

Eksperiment se izvodio u laboratorijskih uvjetima, sa tri kuglice različitih masa,  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$ , te mramornom podlogom približno beskonačne mase. Početna visina je zadana na  $h=250 \text{ mm}$ .

Vrijeme se mjerilo štopericom, a očitavanje visine se izvodilo pomoću milimetarske skale, koja je bila u sklopu prozirne plastične tube (promjera  $D=50 \text{ mm}$ ) radi lakšeg izvođenja eksperimenta. Eksperiment se izvodio vizualnom metodom, te su stoga rezultati približnih vrijednosti.

Prikaz rezultata mjerenja je zaokružen na temelju izračunatih nepouzdanosti.

### 5.2.1. Prikaz rezultata za kuglicu mase $m_I$

U Tablica 2. prikazani su očitani rezultati visine  $h_I$  koju je kuglica mase  $m_I$  dosegla nakon prvog odskoka.

Tablica 2. Prikaz visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_I$

$n$	$h_i$	$\bar{h} = \langle h \rangle$	$\bar{h} - h_i$	$ \bar{h} - h_i $	$\Delta h, \Delta h_{max}$	$r_h, r_{max}$	$(\bar{h} - h_i)^2$	$m_h, M_h$
Mj. jed.	mm	mm	mm	mm	mm	%	-	%
1.	245	241,8	-3,3	3,3	3,01; 4,2	1,245; 1,737	10,89	3,371; 1,066
2.	237		4,8	4,8			23,04	
3.	246		-4,2	4,2			17,64	
4.	245		-3,2	3,2			10,24	
5.	245		-3,2	3,2			10,24	
6.	239		2,8	2,8			7,84	
7.	240		1,8	1,8			3,24	
8.	243		-1,2	1,2			1,44	
9.	240		1,8	1,8			3,24	
10.	238		3,8	3,8			14,44	
$\sum_{i=1}^{10}$	2418		0	30,1			102,25	

Prema jednadžbi (45) slijedi da je relativna nepouzdanost mjerenja visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_I$  jednaka:

$$R_h = \frac{M_h}{\bar{h}} \cdot 100\% = \frac{1,1}{241,8} \cdot 100\% = 0,5\% \quad (64)$$

Rezultat mjerenja visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_I$ :

$$h_1 = (242 \pm 1,1\%) \text{ mm} \quad (65)$$

U Tablica 3. prikazani su očitani rezultati ukupnog vremena  $T$  potrebnog da se kuglica mase  $m_I$  umiri.

Tablica 3. Prikaz ukupnog vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_I$

$n$	$T_i$	$\bar{T} = \langle T \rangle$	$\bar{T} - T_i$	$ \bar{T} - T_i $	$\Delta T, \Delta T_{max}$	$r_T, r_{max}$	$(\bar{T} - T_i)^2$	$m_T, M_T$
Mj. jed.	s	s	s	s	s	%	-	%
1.	8	7,9	-0,1	0,1	0,54; 1,1	6,836; 13,924	0,01	0,738; 0,233
2.	9		-1,1	1,1			1,21	
3.	8		-0,1	0,1			0,01	
4.	7		0,9	0,9			0,81	
5.	8		-0,1	0,1			0,01	
6.	8		-0,1	0,1			0,01	
7.	7		0,9	0,9			0,81	
8.	9		-1,1	1,1			1,21	
9.	8		-0,1	0,1			0,01	
10.	7		0,9	0,9			0,81	
$\sum_{i=1}^{10}$	79		0	5,4			4,9	

Prema jednadžbi (45) slijedi da je relativna nepouzdanost mjerenja vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_I$  jednaka:

$$R_T = \frac{M_T}{\bar{T}} \cdot 100\% = \frac{0,2}{7,9} \cdot 100\% = 2,5\% \quad (66)$$

Rezultat mjerenja vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_I$ :

$$T = (7,9 \pm 0,2\%) \text{ mm} \quad (67)$$

Prema jednadžbi (63), izravnim uvrštavanjem aritmetičkih sredina visine  $h_I$  i vremena  $T$ , slijedi koeficijent restitucije za kuglicu mase  $m_I$ :

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{T} - \sqrt{\frac{2h}{g}}}{\bar{T} + \sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{7,9 - \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{10}}}{7,9 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{10}}} = 0,94 \quad (68)$$

Prema jednadžbi (49), nepouzdanost  $M_{k_1}$  je:

$$M_{k_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} M_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\Delta k_1}{\Delta T} M_T \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{0,94}{0,54} \cdot 0,2 \right)^2} = 0,4 \quad (69)$$

Relativna nepouzdanost prema jednadžbi (45):

$$R_M = \frac{M_n}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,35}{0,94} \cdot 100\% = 37,0\% \quad (70)$$

Konačni rezultat koeficijenta restitucije za kuglicu mase  $m_I$ :

$$\mathbf{k_1 = (0,94 \pm 0,4\%) \text{ mm}} \quad (71)$$



### 5.2.2. Prikaz rezultata za kuglicu mase $m_2$

U Tablica 4. prikazani su očitani rezultati visine  $h_I$  koju je kuglica mase  $m_2$  dosegla nakon prvog odskoka.

Tablica 4. Prikaz visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_2$

$n$	$h_i$	$\bar{h} = \langle h \rangle$	$\bar{h} - h_i$	$ \bar{h} - h_i $	$\Delta h, \Delta h_{max}$	$r_h, r_{max}$	$(\bar{h} - h_i)^2$	$m_h, M_h$
Mj. jed.	mm	mm	mm	mm	mm	%	-	%
1.	245	244,5	-0,5	0,5	2,2; 4,5	0,899; 1,84	0,25	2,718; 0,859
2.	242		2,5	2,5			6,25	
3.	247		-2,5	2,5			6,25	
4.	248		-3,5	3,5			12,25	
5.	245		-0,5	0,5			0,25	
6.	243		1,5	1,5			2,25	
7.	240		4,5	4,5			20,25	
8.	245		-0,5	0,5			0,25	
9.	248		-3,5	3,5			12,25	
10.	242		2,5	2,5			6,25	
$\sum_{i=1}^{10}$	2445		0	22			66,5	

Prema jednadžbi (45) slijedi da je relativna nepouzdanost mjerenja visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_2$  jednaka:

$$R_h = \frac{M_h}{\bar{h}} \cdot 100\% = \frac{0,9}{244,5} \cdot 100\% = 0,4\% \quad (72)$$

Rezultat mjerenja visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_2$ :

$$h_1 = (245 \pm 0,9\%) \text{ mm} \quad (73)$$

U Tablica 5. prikazani su očitani rezultati ukupnog vremena  $T$  potrebnog da se kuglica mase  $m_2$  umiri.

Tablica 5. Prikaz ukupnog vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_2$

$n$	$T_i$	$\bar{T} = \langle T \rangle$	$\bar{T} - T_i$	$ \bar{T} - T_i $	$\Delta T, \Delta T_{max}$	$r_T, r_{max}$	$(\bar{T} - T_i)^2$	$m_T, M_T$
Mj. jed.	s	s	s	s	s	%	-	%
1.	8	8,6	0,6	0,6	0,48; 0,6	5,581; 6,977	0,36	0,516; 0,163
2.	9		-0,4	0,4			0,16	
3.	8		0,6	0,6			0,36	
4.	9		-0,4	0,4			0,16	
5.	9		-0,4	0,4			0,16	
6.	9		-0,4	0,4			0,16	
7.	8		0,6	0,6			0,36	
8.	9		-0,4	0,4			0,16	
9.	8		0,6	0,6			0,36	
10.	9		-0,4	0,4			0,16	
$\sum_{i=1}^{10}$	86		0	4,8			2,4	

Prema jednadžbi (45) slijedi da je relativna nepouzdanost mjerenja vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_2$  jednaka:

$$R_T = \frac{M_T}{\bar{T}} \cdot 100\% = \frac{0,2}{8,6} \cdot 100\% = 2,3\% \quad (74)$$

Rezultat mjerenja vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_2$ :

$$T = (8,6 \pm 0,2\%) \text{ mm} \quad (75)$$

Prema jednadžbi (63), izravnim uvrštavanjem aritmetičkih sredina visine  $h_i$  i vremena  $T$ , slijedi koeficijent restitucije za kuglicu mase  $m_2$ :

$$\bar{k}_2 = \frac{\bar{T} - \sqrt{\frac{2h}{g}}}{\bar{T} + \sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{8,6 - \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{10}}}{8,6 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{10}}} = 0,95 \quad (76)$$

Prema jednažbi (49), nepouzdanost  $M_{k_2}$  je:

$$M_{k_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} M_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\Delta k_2}{\Delta T} M_T \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{0,95}{0,48} \cdot 0,2 \right)^2} = 0,4 \quad (77)$$

Relativna nepouzdanost prema jednažbi (45):

$$R_{k_2} = \frac{M_{k_2}}{k_2} \cdot 100\% = \frac{0,4}{0,95} \cdot 100\% = 42,2\% \quad (78)$$

Konačni rezultat koeficijenta restitucije za kuglicu mase  $m_2$ :

$$\mathbf{k_2 = (0,95 \pm 0,4\%) \text{ mm}} \quad (79)$$

### 5.2.3. Prikaz rezultata za kuglicu mase $m_3$

U Tablica 6. prikazani su očitani rezultati visine  $h_I$  koju je kuglica mase  $m_3$  dosegla nakon prvog odskoka.

Tablica 6. Prikaz visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_3$

$n$	$h_i$	$\bar{h} = \langle h \rangle$	$\bar{h} - h_i$	$ \bar{h} - h_i $	$\Delta h, \Delta h_{max}$	$r_h, r_{max}$	$(\bar{h} - h_i)^2$	$m_h, M_h$
Mj. jed.	mm	mm	mm	mm	mm	%	-	%
1.	248	244,5	-3,5	3,5	1,8; 4,5	0,736; 1,841	12,25	2,369; 0,749
2.	245		-0,5	0,5			0,25	
3.	245		-0,5	0,5			0,25	
4.	247		-2,5	2,5			6,25	
5.	246		-1,5	1,5			2,25	
6.	244		0,5	0,5			0,25	
7.	243		1,5	1,5			2,25	
8.	240		4,5	4,5			20,25	
9.	242		2,5	2,5			6,25	
10.	245		-0,5	0,5			0,25	
$\sum_{i=1}^{10}$	2445		0	18			50,5	

Prema jednadžbi (45) slijedi da je relativna nepouzdanost mjerenja visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_3$  jednaka:

$$R_h = \frac{M_h}{\bar{h}} \cdot 100\% = \frac{0,8}{244,5} \cdot 100\% = 0,3\% \quad (80)$$

Rezultat mjerenja visine  $h_I$  za kuglicu mase  $m_3$ :

$$h_1 = (244,5 \pm 0,8\%) \text{ mm} \quad (81)$$

U Tablica 7. prikazani su očitani rezultati ukupnog vremena  $T$  potrebnog da se kuglica mase  $m_3$  umiri.

Tablica 7. Prikaz ukupnog vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_3$

$n$	$T_i$	$\bar{T} = \langle T \rangle$	$\bar{T} - T_i$	$ \bar{T} - T_i $	$\Delta T, \Delta T_{max}$	$r_T, r_{max}$	$(\bar{T} - T_i)^2$	$m_T, M_T$
Mj. jed.	s	s	s	s	s	%	-	%
1.	16	14,7	-1,3	1,3	0,76; 1,7	5,17; 11,565	1,69	0,949; 0,3
2.	15		-0,3	0,3			0,09	
3.	15		-0,3	0,3			0,09	
4.	14		0,7	0,7			0,49	
5.	13		1,7	1,7			2,89	
6.	14		0,7	0,7			0,49	
7.	15		-0,3	0,3			0,09	
8.	14		0,7	0,7			0,49	
9.	16		-1,3	1,3			1,69	
10.	15		-0,3	0,3			0,09	
$\sum_{i=1}^{10}$	147		0	7,6			8,1	

Prema jednadžbi (45) slijedi da je relativna nepouzdanost mjerenja vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_3$  jednaka:

$$R_T = \frac{M_T}{\bar{T}} \cdot 100\% = \frac{0,3}{14,7} \cdot 100\% = 2,1\% \quad (82)$$

Rezultat mjerenja vremena  $T$  za kuglicu mase  $m_2$ :

$$T = (14,7 \pm 0,3\%) \text{ mm} \quad (83)$$

Prema jednadžbi (63), izravnim uvrštavanjem aritmetičkih sredina visine  $h_i$  i vremena  $T$ , slijedi koeficijent restitucije za kuglicu mase  $m_3$ :

$$\bar{k}_3 = \frac{\bar{T} - \sqrt{\frac{2h}{g}}}{\bar{T} + \sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{14,7 - \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{10}}}{14,7 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{10}}} = 0,97 \quad (84)$$

Prema jednadžbi (49), nepouzdanost  $M_{k_3}$  je:

$$M_{k_3} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} M_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\Delta k_3}{\Delta T} M_T \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{0,97}{0,76} \cdot 0,3 \right)^2} = 0,4 \quad (69)$$

Relativna nepouzdanost prema jednadžbi (45):

$$R_{k_3} = \frac{M_{k_3}}{k_3} \cdot 100\% = \frac{0,4}{0,97} \cdot 100\% = 41,2\% \quad (70)$$

Konačni rezultat koeficijenta restitucije za kuglicu mase  $m_3$ :

$$\mathbf{k_3 = (0,97 \pm 0,4\%) \text{ mm}} \quad (67)$$

## 6. ZAKLJUČAK

U teoretskom dijelu ovog završnog rada opisani su sudari i vrste sudara bazirane na koeficijentu restitucije. Prikazani su generalni primjeri sudara tijela za sve vrste sudara, te su matematički opisani.

Proveden je eksperiment slobodnog pada kuglice na ravnu podlogu, te je time pokazan odnos između odbijanja tri kuglice različitih masa. Iz rezultata eksperimenta, vidi se da vrijeme umirivanja kuglice ovisi o njejoj masi, odnosno, što je kuglica teža, potrebno joj je više vremena da se potpuno umiri.

Iz rezultata koeficijenata restitucije zaključuju se da su sva tri sudara **realni neelastični sudari**, sa  $k < 1$ . Relativna nepouzdanost mjerenja je velika, pošto se mjerenje provodilo vizualnom metodom.

## **PRILOZI**

### **I. CD-R disc**



**LITERATURA**

- [1] Jecić S.: Mehanika II (Kinematika i dinamika), Tehnička knjiga Zagreb, 1989.
- [2] <https://en.wikipedia.org/wiki/Collision> (10.06.2016.)
- [3] <http://www.sparknotes.com/testprep/books/sat2/physics/chapter9section4.rhtml>  
(10.06.2016.)
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Elastic\\_collision](https://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_collision) (15.6.2016.)
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Inelastic\\_collision](https://en.wikipedia.org/wiki/Inelastic_collision) (15.6.2016.)
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient\\_of\\_restitution](https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_restitution) (18.6.2016.)
- [7] <http://www.phy.pmf.unizg.hr/~bosiocic/SOM/obrada.pdf> (22.6.2016.)