

REŠETKASTE KONSTRUKCIJE-PRIMJENA I METODE ANALIZE

Obrovac, Josipa

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:981265>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-10**



VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
Karlovac University of Applied Sciences

Repository / Repozitorij:

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ STROJARSTVA

Josipa Obrovac

REŠETKASTE KONSTRUKCIJE - PRIMJENA I METODE ANALIZE

ZAVRŠNI RAD

Karlovac, 2019.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ STROJARSTVA

Josipa Obrovac

REŠETKASTE KONSTRUKCIJE - PRIMJENA I METODE ANALIZE

ZAVRŠNI RAD

Mentor: Nenad Lorković, dipl. ing.

Karlovac, 2019.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ STROJARSTVA

Josipa Obrovac

TRUSSES – APPLICATION AND METHODS OF ANALYSIS

ZAVRŠNI RAD

Mentor: Nenad Lorković, dipl. ing.

Karlovac, 2019.

	VELEUČILIŠTE U KARLOVCU Trg J.J. Strossmayera 9 HR - 47000, Karlovac, Croatia Tel. +385 - (0)47 - 843-500 Fax. +385 - (0)47 - 843-503 e-mail: dekanat @ vuka.hr	Klasa: 602-11/19-01/____ Ur.broj: 2133-61-04-19-01	
	ZADATAK ZAVRŠNOG / DIPLOMSKOG RADA	Datum:	

Ime i prezime	Josipa Obrovac		
OIB / JMBG	85298421873	2103997345003	
Adresa	Donja Švarča 103, 47000 Karlovac		
Tel. / Mob./e-mail	-	091 907 3911	josipa.obrovac97@gmail.com
Matični broj studenta	0110615016		
JMBAG	0248053166		
Studij (staviti znak X ispred odgovarajućeg studija)	<input checked="" type="checkbox"/> preddiplomski	<input type="checkbox"/> specijalistički diplomski	
Naziv studija	Preddiplomski stručni studij strojarstva, Strojarske konstrukcije		
Godina upisa	2015./2016.		
Datum podnošenja molbe	09.07.2019.		
Vlastoručni potpis studenta/studentice			

Naslov teme na hrvatskom: Rešetkaste konstrukcije - primjena i metode analize	
Naslov teme na engleskom: Trusses – application and methods of analysis	
Opis zadatka:	
<p>Proučiti i razraditi metode koje se koriste pri određivanju sila u štapovima rešetkastih nosača. Svaku od metoda razraditi teorijski, s posebnim naglaskom na grafičke metode. U razradi teme opisati osnovne karakteristike pojedine metode.</p> <p>Za odabrani primjer izračunati sile u štapovima za svaku metodu zasebno. Napraviti usporedbu dobivenih rezultata po metodama.</p> <p>Napisati zaključak.</p>	
Mentor: Nenad Lorkovic, dipl.ing.	Predsjednik Ispitnog povjerenstva:

IZJAVA

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno, koristeći se stečenim znanjima tijekom studiranja i navedenom literaturom.

Zahvaljujem mentoru Nenadu Lorkoviću, dipl.ing. na stručnim savjetima, vremenu, trudu i pomoći prilikom izrade ovoga rada.

Josipa Obrovac

SADRŽAJ

SAŽETAK	1
SUMMARY	2
POPIS SLIKA	3
POPIS TABLICA	5
POPIS OZNAKA	6
1. UVOD	7
2. RAVNINSKI REŠETKASTI NOSAČI	11
2.1. Vrste oslonaca ravninskih rešetkastih nosača	13
2.2. Statička određenost ravninskog rešetkastog nosača	16
3. ODREĐIVANJE SILA U REŠETKASTIM NOSAČIMA	18
3.1. Metoda čvorova	19
3.2. Metoda presjeka	21
3.3. Culmannova metoda	22
3.4. Cremonin plan sila	26
4. PRIMJER	32
4.1. Metoda čvorova	33
4.2. Metoda presjeka	40
4.3. Culmannova metoda	43
4.4. Cremonin plan sila	46
5. ZAKLJUČAK	50
POPIS PRILOGA	51
LITERATURA	52

SAŽETAK

Kako i sam naslov kaže, tema ovog završnog rada jesu metode koje se koriste pri određivanju sila u štapovima rešetkastih nosača. Na samom početku krenut ćemo od podjele tehničkih konstrukcija i spomenuti nešto općenito o njima. Definirat ćemo pojmove statičke određenosti i neodređenosti rešetke te pojmove ravninske i prostorne rešetke. Obradit ćemo sveukupno četiri metode, od kojih su dvije analitičke, a dvije grafičke. Svaku od metoda razradit ćemo teorijski, a zatim prikazati princip provođenja kroz odabrani primjer. Problematika određivanja sila u štapovima rešetkastih nosača bit će bazirana isključivo na problemima koji se odnose na statički određene ravninske rešetkaste nosače. Problem određivanja sila u štapovima prostornih rešetkastih nosača neće biti obrađen u ovome radu.

Ključne riječi: *rešetka, konstrukcija, štap, sila, metoda.*

SUMMARY

As the title itself, the subject of this final work are methods which are used to determine the forces in the rods of truss girders. At the beginning the division and general classification of technical constructions will be explained and mentioned. The definitions of static determinateness and indeterminateness of the grid and terms of plane and spacial gird will be defined. Four methods will be analyzed of which two are analytical and the other two are graphical. Each of these methods will be elaborated in theory and afterwards the principle of implementation will be shown by using selected example. The issue of determining forces in the rods of truss girders will be based exclusively upon problems which are referred to statically determined planar truss girders. The issue of determining forces in the rods of spacial truss girders will not be addressed in this final work.

Keywords: *truss, construction, rod, force, method.*

POPIS SLIKA

Slika 1.1. Nosive štapne konstrukcije _____	7
Slika 1.2. Rešetkasta konstrukcija u mostogradnji _____	8
Slika 1.3. Krovni nosač _____	9
Slika 1.4. Dalekovod _____	9
Slika 1.5. Kranska dizalica _____	9
Slika 1.6. Primjena rešetkastih konstrukcija kod modernih građevina _____	10
Slika 2.1. Jednostavni rešetkasti nosač _____	11
Slika 2.2. Zglobni četverokut _____	12
Slika 2.3. Sastavni dijelovi rešetke _____	12
Slika 2.1.1. Oslonci rešetkastog nosača _____	13
Slika 2.1.2. Reakcije veza kod uklještenja _____	13
Slika 2.1.3. Reakcije veza kod nepomičnog oslonca _____	14
Slika 2.1.4. Reakcije veza kod pomičnog oslonca _____	14
Slika 2.1.5. Raspored štapova _____	15
Slika 2.1.6. Vanjsko opterećenje djeluje samo u čvorovima rešetke _____	15
Slika 2.2.1. Primjer 1 _____	16
Slika 2.2.2. Primjer 2 _____	17
Slika 2.2.3. Primjer statički određene rešetke _____	17
Slika 3.1.1. Rešetkasti nosač _____	19
Slika 3.1.2. Čvor A oslobođen veza _____	20
Slika 3.1.3. Čvorovi oslobođeni veza _____	20
Slika 3.2.1. Zamišljeno presječeni rešetkasti nosač _____	21
Slika 3.2.2. Desna strana rešetkastog nosača _____	22
Slika 3.3.1. Konstrukcija Culmannovog pravca i određivanje veličine i smjera sila _____	23
Slika 3.3.2. Primjer rešetkastog nosača _____	24
Slika 3.3.3. Određivanje rezultante F_R _____	24
Slika 3.3.4. Konstrukcija Culmannovog pravca _____	25
Slika 3.3.5. Lijevi dio nosača i plan sila _____	26
Slika 3.4.1. Rešetkasti nosač sa zadanim opterećenjem _____	27
Slika 3.4.2. Određivanje rezultantne sile F_R _____	27
Slika 3.4.3. Određivanje reakcija u osloncima _____	28
Slika 3.4.4. Plan sila sa Culmannovim pravcem i ucrtanim smjerovima reakcijama _____	28
Slika 3.4.5. Poligon vanjskih sila _____	29

Slika 3.4.6. Rešetkasti nosač s ucrtanim vanjskim silama	29
Slika 3.4.7. Rešetkasti nosač sa ucrtanim smjerovima sila u štapovima prema odabranom smjeru obilaska čvora	31
Slika 3.4.8. Cremonin plan sila	31
Slika 4.1.1. Rešetkasti nosač – ucrtane reakcije u osloncima	33
Slika 4.1.2. Čvor A - zadatak	34
Slika 4.1.3. Čvor B - zadatak	35
Slika 4.1.4. Čvor C – zadatak	36
Slika 4.1.5. Čvor D – zadatak	37
Slika 4.1.6. Čvor E – zadatak	38
Slika 4.1.7. Čvor F – zadatak	38
Slika 4.2.1. Rešetkasti nosač sa ucrtanim presjekom	40
Slika 4.2.2. Lijevi dio nosača	41
Slika 4.3.1. Rešetkasti nosač - konstrukcija Culmannovog pravca	43
Slika 4.3.2. Nosač sa označenim presječenim štapovima i reakcijama u osloncima	44
Slika 4.3.3. Lijevi dio nosača – Culmannova metoda	44
Slika 4.3.4. Plan sila za odabrani presjek	45
Slika 4.4.1. Kontrukcija Culmannovog pravca – Cremonin plan sila	46
Slika 4.4.2. Cremonin plan sila	48

POPIS TABLICA

Tablica 4.2.1. Usporedba vrijednosti dobivenih metodom čvorova i metodom presjeka _____	42
Tablica 4.3.1. Usporedba grafičkih i analitičkih vrijednosti za Culmannovu metodu _____	45
Tablica 4.4.1. Usporedba grafičkih i analitičkih vrijednosti za Cremonin plan sila _____	49

POPIS OZNAKA

a	m	duljina
C_p		Culmannov pravac
F	N	vanjsko opterećenje, sila reakcije u osloncu
M	Nm	statički moment sile
m		broj štapova kod rešetkastih nosača
n		broj čvorova kod rešetkastih nosača
S	N	sila u štapu rešetke
α	°	kut

1. UVOD

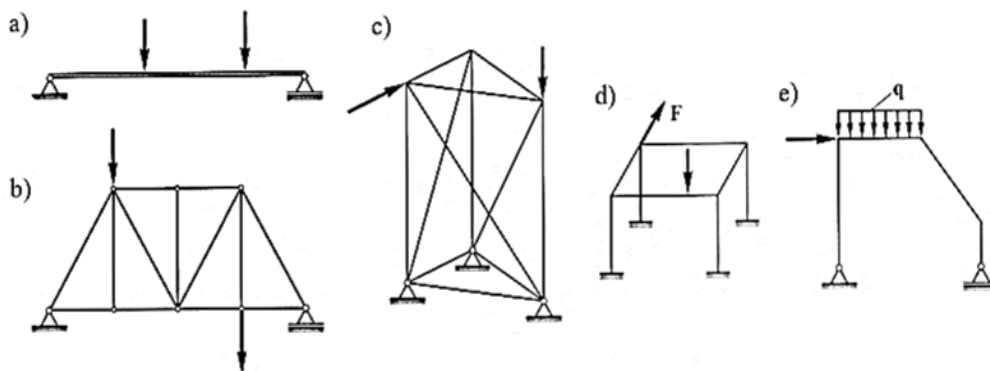
Kada govorimo o tehničkim konstrukcijama, općenito ih možemo podijeliti u dvije skupine, a to su:

- 1) nosive konstrukcije
- 2) uređaji, mehanizmi i strojevi

Nosive konstrukcije dalje dijelimo na:

- 1) plošne konstrukcije ili plošne nosače
- 2) štapne konstrukcije

Štapne konstrukcije karakterizira to da je jedna dimenzija (duljina) znatno veća u odnosu na druge dvije dimenzije (širina i visina) koje su zanemarivo male i moguće ih je izuzeti iz proračuna bez mogućih posljedica na krajnji rezultat. U ovu podskupinu nosivih konstrukcija ubrajamo grede, ravninske i prostorne rešetkaste nosače i okvire, Gerberove nosače i druge. Na slici 1.1. prikazane su neke od spomenutih štapnih konstrukcija.



Slika 1.1. Nosive štapne konstrukcije: a) greda na dva oslonca, b) ravninski rešetkasti nosač, c) prostorni rešetkasti nosač, d) prostorni okvir, e) ravninski okvir [1]

Općenito, nosače, okvire i druge slične tehničke tvorevine jednim imenom nazivamo konstrukcije. Geometrijski gledano, nosive konstrukcije možemo podijeliti na ravninske i prostorne. Temeljna razlika je u tome što kod ravninskih konstrukcija svi sastavni elementi leže u jednoj ravnini, dok su kod prostornih pojedini elementi, jedni u odnosu na druge, smješteni u različitim ravninama te na taj način tvore prostornu strukturu.

Bilo da se radi o ravninskim ili prostornim rešetkastim nosačima, možemo reći kako su to tehničke konstrukcije od velike važnosti. Njihova uporaba ima široku primjenu posebice u području građevinarstva i arhitekture. Koriste se za izradu dijelova mostova (slika 1.2.), industrijskih hala, krovnih i podnih nosača (slika 1.3.), dalekovoda (slika 1.4.), spregova, kranskih dizalica (slika 1.5.), a u današnje vrijeme su i sastavni dio pojedinih modernih arhitektonskih građevina atraktivnog i zanimljivog oblika kao što se može vidjeti sa slike 1.6.. Razlog tome je njihova povoljna struktura i ekonomičnost izrade. Prilikom izrade nekog proizvoda važno je zadovoljiti brojne preduvjete kako bi on postao konkurentan na tržištu, a to znači da nije samo nužno osigurati tehnički pouzdan proizvod, već i onaj koji će uz spomenuto biti i najekonomičniji. Tehnički gledajući to bi značilo izradu proizvoda, u ovom slučaju nosača, za čiju bi izradu bio najmanji utrošak materijala. Upravo iz tog razloga su i nastali rešetkasti nosači, a detaljnijom analizom razloga njihove uporabe u tehnici, kao i njihovim proračunom bavit ćemo se u poglavljima koja slijede.

U radu ćemo se usmjeriti isključivo na ravninske rešetkaste nosače kao geometrijski nepromjenjive tehničke konstrukcije i njihov proračun.



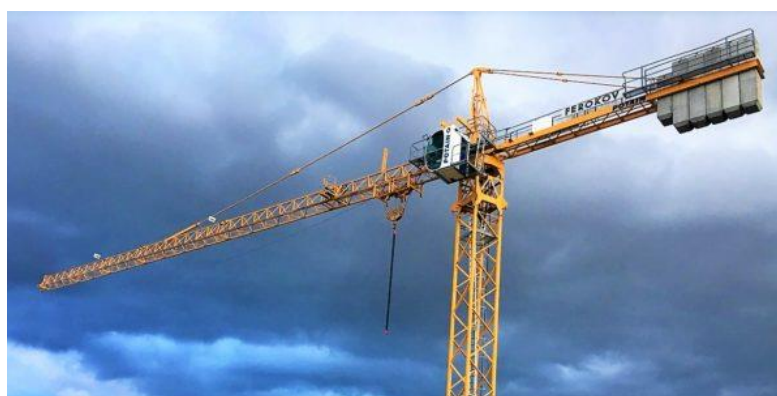
Slika 1.2. Rešetkasta konstrukcija u mostogradnji [2]



Slika 1.3. Krovni nosač [3]



Slika 1.4. Dalekovod [4]



Slika 1.5. Kranska dizalica [5]

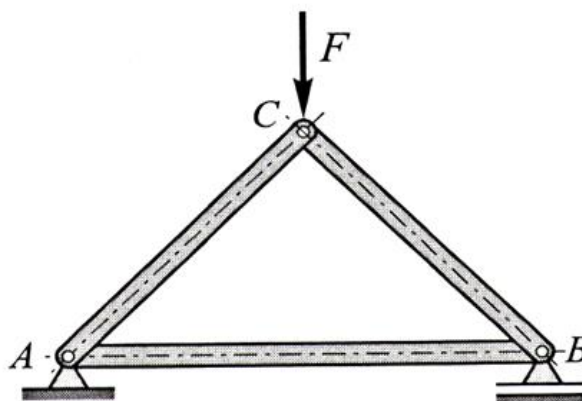


Slika 1.6. Primjena rešetkastih konstrukcija kod modernih građevina [6]

2. RAVNINSKI REŠETKASTI NOSAČI

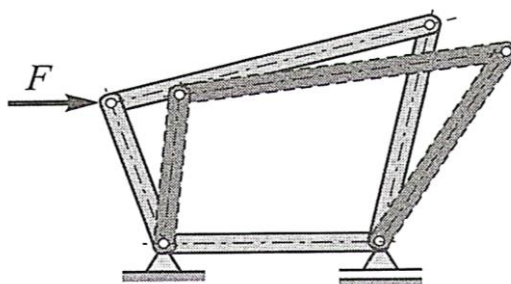
Rešetkasti nosač definira se kao geometrijski nepromjenjiva konstrukcija sastavljena od većeg broja štapova međusobno povezanih zglobnim vezama bez trenja. Da bi za neku konstrukciju mogli reći da je nosač, ona mora biti kruta statička figura, drugim riječima mora biti geometrijski nepromjenjiva. Da bi se to osiguralo, nužno je da štapovi rešetke budu međusobno spojeni tako da čine trokutastu formu. Zašto baš trokutasta forma? Odgovor ćemo pojasniti na primjeru sljedeće dvije slike.

Na slici 2.1. je prikazan rešetkasti nosač sastavljen od tri štapa. Trokut predstavlja tzv. krutu figuru koja prenosi opterećenje kako prikazuje slika. Zanimljivo je da deformaciju štapa tj. mogućnost njihova produljivanja ili skraćivanja i uzimanjem u obzir činjenice da sila može djelovati samo u zglobovima (ne i u štapu), možemo reći da trokut ne mijenja svoj oblik.



Slika 2.1. Jednostavni rešetkasti nosač [1]

S druge strane, na slici 2.2. prikazana je struktura sastavljena od četiri zgloбно povezana štapa koji čine četverokut. Zamislimo li da na taj četverokut djeluje neka sila, jasno je da će on promijeniti svoj oblik te zbog toga ne može prenositi opterećenje, već može koristiti kao mehanizam za prijenos gibanja.

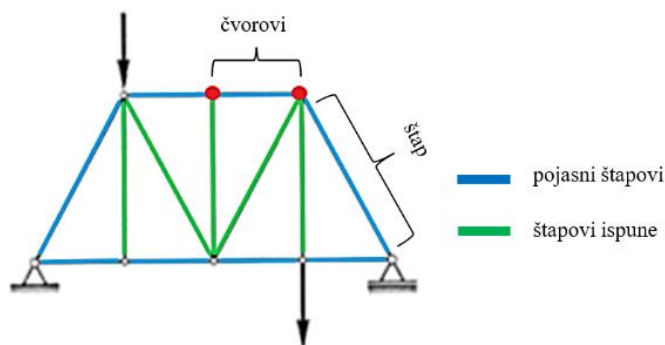


Slika 2.2. Zglobni četverkut [1]

Na početku poglavlja spomenuli smo kako je rešetkasti nosač čine štapovi povezani zglobnim vezama tj. čvorovima. Na slici 2.3. shematski je prikazana rešetka sa svojim sastavnim dijelovima.

Čvorovi su pomične zglobne veze bez trenja koje povezuju najmanje dva štapa rešetke i u njima su koncentrirane sile kojima je opterećen rešetkasti nosač.

Štap predstavlja vezu između dva čvora. Postoje dvije vrste štapova koji čine rešetku, a to su pojasni štapovi koji se dijele na štapove gornjeg pojasa i štapove donjeg pojasa te štapovi ispune koji mogu biti dijagonalni i vertikalni. Prilikom izrade proračuna težina štapova se u pravilu zanemaruje. Također, vodimo se i pretpostavkom kako su štapovi idealno ravni i konstantnog poprečnog presjeka. Rešetkasti nosači mogu prenositi samo aksijalne sile koje mogu biti vlačne ili tlačne, ovisno o smjeru djelovanja sile koja opterećuje pojedini štap. Vanjske sile koje djeluju na nosač koncentrirane su u čvorovima, a djeluju u smjeru osi štapa.

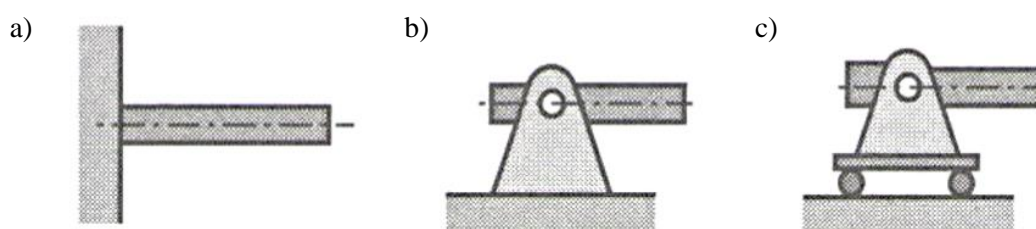


Slika 2.3. Sastavni dijelovi rešetke

2.1. Vrste oslonaca ravninskih rešetkastih nosača

Tri su osnovne vrste oslonaca ravninskih nosača, a to su:

- 1) uklještenje
- 2) nepomični oslonac
- 3) pomični oslonac

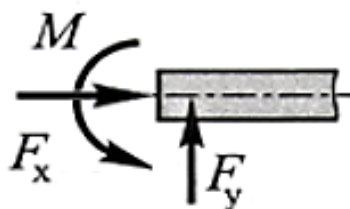


Slika 2.1.1. Oslonci rešetkastog nosača: a) uklještenje, b) nepomični oslonac, c) pomični oslonac [1]

Za ravninski nosač smješten u ravnini Oxy na kojeg djeluje neko vanjsko opterećenje promotrimo reakcije koje se javljaju kada nosač oslobodimo veza na mjestu oslonca. Krenimo redom kako smo ih i naveli:

Uklještenje

Slika 2.1.2. prikazuje dio nosača oslobođenog veza koji je uklješten s lijeve strane. Izborom ove vrste oslonca onemogućen je pomak kraja na kojemu se nalazi uklještenje, ali i nosača u cijelosti.



Slika 2.1.2. Reakcije veza kod uklještenja [1]

Iz tog razloga će se na mjestu oslonca pojaviti tri sile reakcije:

F_x – sila u smjeru osi x [N],

F_y – sila u smjeru osi y [N],

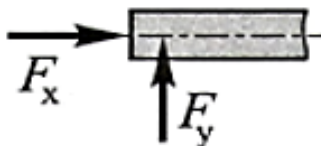
M – moment oko točke uklještenja [Nm].

Za ovu vrstu oslonca općenito vrijedi da je $F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$, $M \neq 0$.

Nepomični oslonac

Ukoliko se na jednom kraju nosača postavi tzv. nepomični oslonac, tada pomak nosača više nije spriječen, već je moguća rotacija kraja na kojemu se nalazi oslonac. U ovom slučaju momenta na mjestu oslonca nema, nego se samo javljaju sile reakcije u smjeru osi x i y kako prikazuje slika 2.1.3..

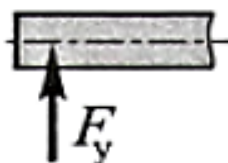
Prema tome slijedi da je $F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$, $M = 0$.



Slika 2.1.3. Reakcije veza kod nepomičnog oslonca [1]

Pomični oslonac

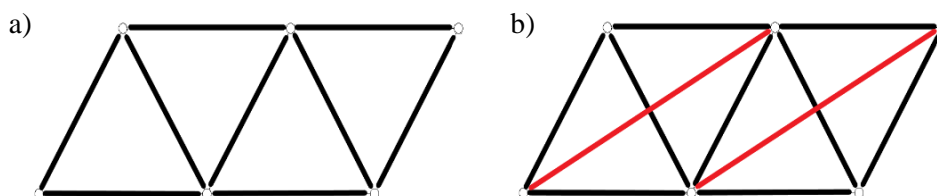
Ovu vrstu oslonca karakterizira rotacija kraja na kojemu je postavljen oslonac te pomak u smjeru osi x. Prema tome, ukoliko nosač oslobodimo veza, javlja se samo sila reakcije u smjeru osi y jer je jedino u tom smjeru onemogućen pomak nosača, odnosno $F_x = 0$, $F_y \neq 0$, $M = 0$. Slika 2.1.4. prikazuje reakcije veza na dijelu grede na kojemu se nalazio pomični oslonac.



Slika 2.1.4. Reakcije veza kod pomičnog oslonca [1]

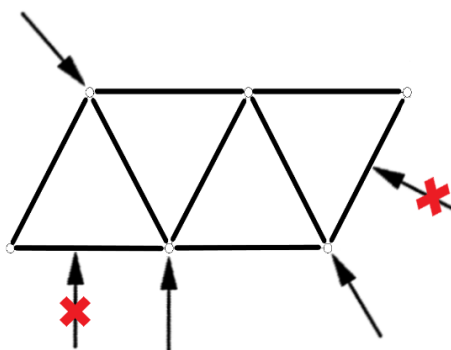
Pretpostavke kojima se vodimo kod proračuna ravninskih rešetkastih nosača su sljedeće:

- 1) Svaki se štap nalazi između dva čvora pri čemu nema križanja štapova



Slika 2.1.5. Raspored štapova: a) pravilno raspoređeni štapovi,
b) nepravilno raspoređeni štapovi (križaju se)

- 2) U zglobovima nema trenja, a momenti se zanemaruju ($M = 0$)
- 3) Vanjsko opterećenje djeluje samo u čvorovima



Slika 2.1.6. Vanjsko opterećenje djeluje samo u čvorovima rešetke

Kako bi se zadovoljio već spomenuti uvjet da su štapovi rešetkastog nosača aksijalno opterećeni (tlačno ili vlačno), nužno je da sile djeluju samo u čvorovima, a ne i između njih jer bi u tom slučaju štap bio opterećen na savijanje.

- 4) Statička određenost rešetke

2.2. Statička određenost ravninskog rešetkastog nosača

Kada govorimo od statičkoj određenosti rešetkastog nosača razlikujemo dva pojma:

- 1) vanjska statička određenost
- 2) unutarnja statička određenost

Za neki rešetkasti nosač kažemo da je izvana statički određen ako se primjenom uvjeta ravnoteže mogu odrediti reakcije veza u osloncima. U protivnom, rešetkasti nosač bit će izvana statički neodređen.

Unutarnja statička određenost rešetkastog nosača odnosi se na određivanje sila u štapovima. Ako se uz poznate reakcije veza mogu odrediti sile u svim štapovima rešetkastog nosača, tada za taj nosač kažemo da je on iznutra statički određen. U suprotnom će nosač biti iznutra statički neodređen.

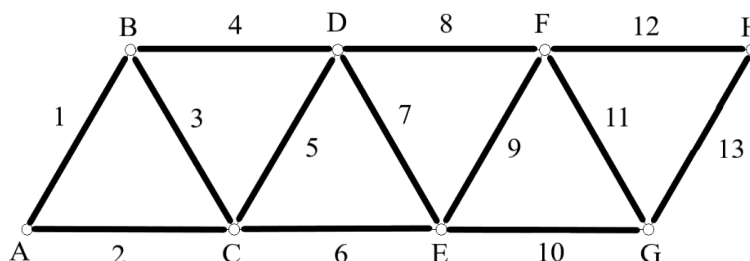
Da bi neki nosač bio statički određen nužno je da on bude sastavljen dovoljnog broja međusobno spojenih štapova, pravilno raspoređenih tako da nosač bude geometrijski nepromjenjiv (stabilan). Unutarnja statička određenost nosača određuje se pomoću sljedećeg izraza:

$$m = 2n - 3 \quad [7,8,9]$$

pri čemu m označava broj štapova, a n broj zglobova (čvorova). Ukoliko je ta jednakost zadovoljena, rešetkasti nosač je iznutra statički određen.

Prilikom rješavanja primjera u ovom radu pod pojmom statička određenost rešetkastog nosača podrazumijevat ćemo unutarnju statičku određenost.

Primjer 1:



Slika 2.2.1. Primjer 1

Rešetkasti nosač sastoji od trinaest štapova i osam čvorova (A, B, C, D, E, F, G, H) kako je prikazano na slici. Pomoću formule koju smo prethodno naveli, ispitat ćemo je li nosač statički određen ili neodređen.

$$m = 13 ; n = 8$$

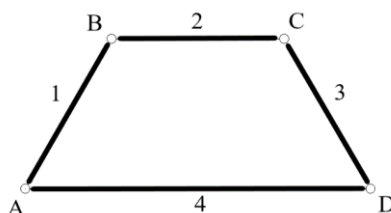
$$m = 2n - 3$$

$$13 = 2 \cdot 8 - 3 = 16 - 3 = 13$$

$$13 = 13$$

Jednakost je zadovoljena, prema tome nosač je statički određen.

Primjer 2:



Slika 2.2.2. Primjer 2

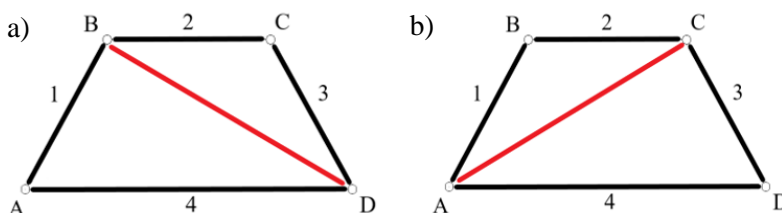
Sa slike vidimo da se nosač sastoji od četiri štapa i četiri čvora (A, B, C, D). Odredimo je li on statički određen ili neodređen na način kao i u prethodnom primjeru.

$$m = 4 ; n = 4$$

$$m = 2n - 3$$

$$4 = 2 \cdot 4 - 3$$

$4 \neq 5$ – jednakost nije zadovoljena, prema tome nosač je statički neodređen. Da bi nosač bio statički određen, potrebno je dodati još jedan štap kao što prikazuju slike 2.2.3. a) i b).



Slika 2.2.3. Primjer statički određene rešetke

3. ODREĐIVANJE SILA U REŠETKASTIM NOSAČIMA

Da bismo mogli izvršiti proračun nekog rešetkastog nosača, nužno je poznavati:

- 1) reakcije u osloncima
- 2) sile u štapovima nosača

Neovisno o kojoj metodi je riječ, potrebno je postaviti uvjete ravnoteže za sile koje opterećuju nosač i reakcije koje se javljaju u osloncima.

Analitički uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0 ; \sum M = 0$$

Drugim riječima, suma svih sila u smjeru osi x i y te suma svih momenata mora biti jednaka nuli. Grafički uvjeti ravnoteže podrazumijevaju zatvoreni poligon sila i verižni poligon.

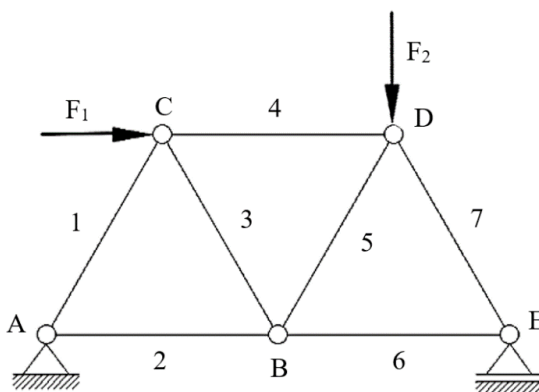
Sile u štapovima rešetke možemo odrediti na različite načine, primjenom klasičnih ili numeričkih metoda. Klasične metode obuhvaćaju analitičke i grafičke postupke. Analitičke metode koje nam mogu poslužiti u svrhu izračuna sila u štapovima jesu *metoda čvorova* i *metoda presjeka*, a od grafičkih se izdvajaju *Cremonin plan sila* te *Culmannova metoda*. Analitičke metode se češće koriste jer su rješenja dobivena spomenutim postupcima preciznija od onih dobivenih grafičkim metodama jer se i u samom proračunu pojedine vrijednosti točno izračunavaju iz onoga što nam je zadano pa je manja mogućnost pogreške.

Primjenom računala u tehnici javljaju se i druge mogućnosti koje u odnosu na klasične postupke predstavljaju brži način dobivanja željenog rješenja kao i 2D ili 3D vizualizaciju same konstrukcije. Ovakav napredniji način izrade tehničkog proračuna moguć je uz primjenu različitih računalnih softvera. Uz spomenuto, važno je istaknuti i numeričke metode, posebice metodu konačnih elemenata.

U nastavku rada usmjerit ćemo se na klasične metode određivanja sila u štapovima statički određenih ravninskih rešetkastih konstrukcija. Teorijski i na temelju primjera objasniti ćemo princip dobivanja rješenja svakom pojedinom metodom. Od analitičkih metoda analizirat ćemo metodu čvorova i metodu presjeka te obje grafičke metode koje smo spomenuli na početku ovoga poglavlja.

3.1. Metoda čvorova

Kao što smo već spomenuli u uvodnom dijelu ovoga poglavlja, metoda čvorova je jedna od dvije analitičke metode određivanja sila u štapovima rešetkastih nosača. Zasniva se na činjenici da su svi čvorovi u ravnoteži ako je i cijela rešetka u ravnoteži. Postupak je sljedeći, izabere se jedan čvor rešetke i to onaj u kojem imamo najviše dvije nepoznanice čime se zadani sustav svodi na konkurentni sistem sila koji je moguće riješiti postavljanjem dvije jednadžbe ravnoteže. Za odabrani čvor ucrtaju se sve sile koje u njemu djeluju (reakcije u osloncima, vanjsko opterećenje, unutarnje sile u štapovima), vodeći se pretpostavkom da su sile u štapovima rešetke usmjerene od čvora, odnosno da su štapovi opterećeni na vlak. Zatim se postave uvjeti ravnoteže, te se iz njih dobivaju nepoznate vrijednosti sila. Isti postupak ponavlja za svaki sljedeći čvor s time da i pri sljedećem odabiru čvora izaberemo onaj u kojem su najviše dvije nepoznanice. Ukoliko se na kraju proračuna dobije negativna vrijednost neke sile u štapu, to znači da je on opterećen na tlak.



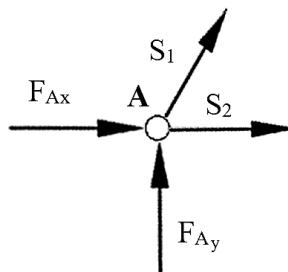
Slika 3.1.1. Rešetkasti nosač

Postupak možemo podijeliti u dva dijela:

- 1) Određivanje sila reakcija u osloncima
- 2) Izračun sila u štapovima rešetkastog nosača

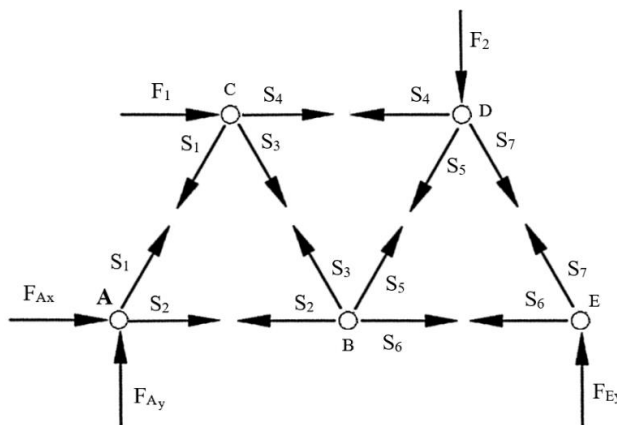
Postavljanjem uvjeta ravnoteže $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M = 0$ određujemo reakcije u osloncima. Ako su nam vrijednosti sila F_1 i F_2 poznate, tada lako iz uvjeta ravnoteže možemo izračunati vrijednosti reakcija u osloncima A i E te se one kroz daljnji tijek zadatka smatraju

poznatima. Nakon što smo izračunali nepoznate vanjske sile, možemo krenuti na čvorove. Krenimo primjerice od čvora A, slika 3.1.2. prikazuje čvor A oslobođen veza.



Slika 3.1.2. Čvor A oslobođen veza

U njemu imamo dvije poznate vrijednosti, a to su F_{Ax} i F_{Ay} , odnosno reakcije u osloncu A. Kako smo postavljali uvjete ravnoteže za izračun sila u sustavu, tako ćemo postaviti i za svaki pojedini čvor kako bismo izračunali sile u štapovima. Razlika je u tome što se kod izračuna sila u štapovima momenti zanemaruju, tj. $M = 0$. Na slici 3.1.3. prikazan je sustav sa svim čvorovima i ucrtanim silama koje djeluju na pojedini čvor.



Slika 3.1.3. Čvorovi oslobođeni veza

Pogledamo li čvorove A i B te sile koje u njima djeluju, vidimo da u oba čvora djeluje ista sila S_2 , ali suprotnog smjera. Razlika u smjerovima proizlazi iz zakona akcije i reakcije pa općenito možemo reći da sila u čvoru koji promatramo prikazuje djelovanje drugog čvora na promatrani i obrnuto. Slika 3.1.3. prikazuje sve čvorove rešetke oslobođene veza s okolinom te se iz nje može vidjeti prethodno objašnjen zakon akcije i reakcije između dva čvora.

3.2. Metoda presjeka

Metoda presjeka korisna je ukoliko želimo izračunati samo pojedine sile u štapovima rešetkastog nosača. Ovdje vrijedi sljedeće pravilo: ukoliko je cijela rešetka u ravnoteži, tada su i njeni dijelovi lijevo i desno od zamišljenog presjeka u ravnoteži.

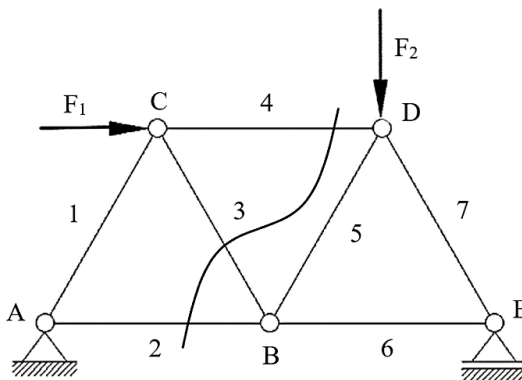
Presjek treba napraviti tako da rešetku dijeli na dva dijela, pri čemu ne smije zahvaćati više od tri štapa rešetke. Razlog tome je što postoje tri uvjeta ravnoteže pa se prema tome i mogu odrediti samo tri nepoznanice u presječenom dijelu. Presjek postavljamo tako da obuhvati one štapove čije sile želimo odrediti. Isto kao i kod metode čvorova, postupak započinjemo izračunom sila u osloncima koje dobivamo postavljanjem uvjeta ravnoteže:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M = 0$$

Nakon toga slijedi određivanje sila u štapovima kako smo prethodno pojasnili. Za izračun odabiremo onu stranu rešetke koja je jednostavnija, odnosno onu gdje imamo manje sila kako bi pojednostavili proračun. Kod postavljanja momentnih jednadžbi, za momentne točke uzimaju se čvorovi rešetke. Sile u štapovima postavljaju se tako da djeluju od čvora prema presječenom dijelu rešetke i pretpostavlja se da su opterećene na vlak.

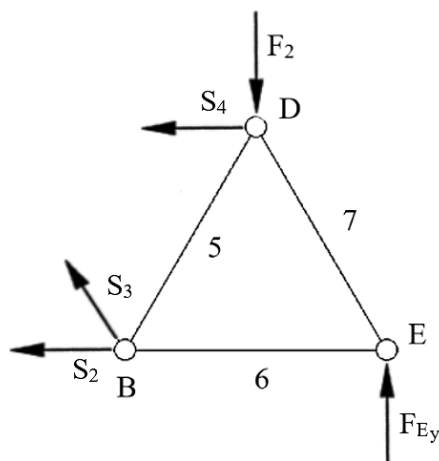
Ukoliko se na kraju dobije negativna vrijednost neke od sila, to je znak da je štap tlačno opterećen, isto kao i kod metode čvorova.

Pogledajmo sliku 3.2.1.. Na njoj vidimo da su presječeni štapovi 2, 3, 4 pa je jasno da se sile u tim štapovima i traže.



Slika 3.2.1. Zamišljeno presječeni rešetkasti nosač

Kako bi postupak bio jednostavniji, promatrat ćemo desnu stranu presječene rešetke kako je prikazano na slici 3.2.2..



Slika 3.2.2. Desna strana rešetkastog nosača

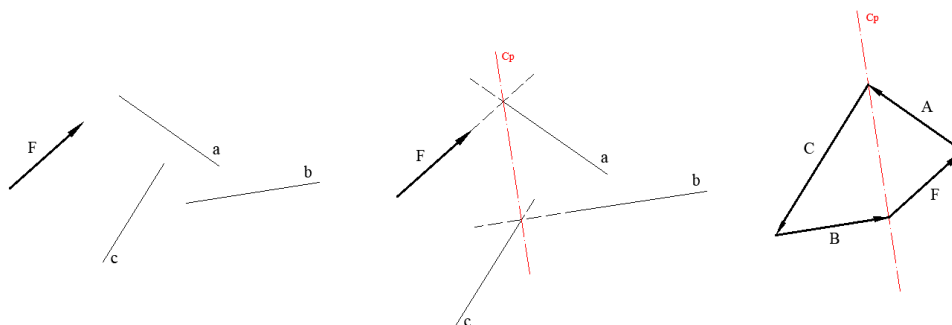
Kao uvjete ravnoteže u ovom primjeru možemo odabrati sljedeće:

- 1) $\sum M_B = 0$ – suma momenata oko čvora B [Nm].
- 2) $\sum M_D = 0$ – suma momenata oko čvora D [Nm].
- 3) $\sum F_x = 0$ – suma sila u smjeru osi x [N].

Uz pretpostavku da su vanjska sila F_2 i reakcija u osloncu F_{Ey} poznate i postavljanjem jednadžbi ravnoteže dobivamo tražene vrijednosti sila S_2 , S_3 i S_4 .

3.3. Culmannova metoda

Ako imamo zadan pravac, smjer i iznos neke sile F te pravce djelovanja triju nepoznatih sila, moguće je odrediti njihov smjer i iznos na sljedeći način. U planu položaja pronađemo točku u kojoj se sijeku pravci djelovanja jedne poznate sile, u našem slučaju sile F i jedne nepoznate sile, neka to bude sila A , a zatim se pronađe sjecište pravaca djelovanja preostalih dviju nepoznatih sila, B i C . Spajajući dvije po dvije sile i traženjem njihova presjeka, dobili smo dvije točke. One se nazivaju točke presjeka i njihovim spajanjem dobiva se linija koja se naziva *Culmannov pravac*.

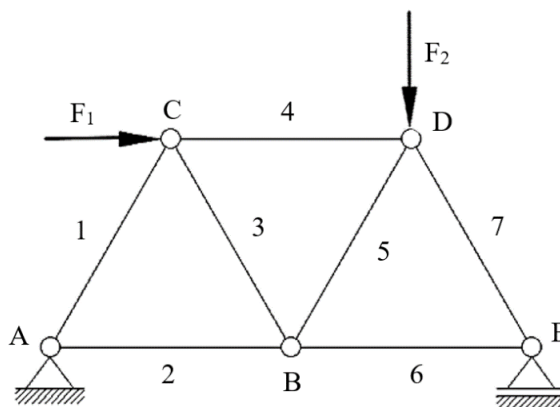


Slika 3.3.1. Konstrukcija Culmannovog pravca i određivanje veličine i smjera sila

Ovaj postupak primjenjujemo uvijek kada je potrebno grafički odrediti iznos i pravac djelovanja neke sile, točnije kada imamo zadane tri nepoznate sile i jednu poznatu o kojoj znamo sve (pravac, smjer i iznos sile). Njegova primjena nije nužno vezana samo za Culmannovu metodu, već se može primijeniti i u drugim slučajevima gdje je to potrebno.

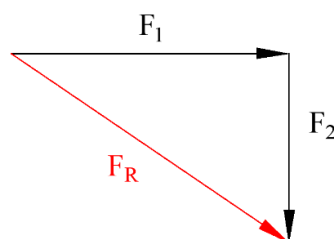
Prije nego krenemo određivati sile u štapovima rešetkastog nosača Culmannovom metodom, potrebno je odrediti mjerilo. Plan sila započinjemo ucrtavanjem Culmannovog pravca, na način da ga transliramo iz plana položaja, a zatim u mjerilu transliramo silu koja nam je poznata. U ovom slučaju neka to bude neka sila F . Translatiramo ju na način da se hvatište te sile nalazi bilo gdje na pravcu djelovanja Culmannovog pravca. Vratimo se nazad na plan položaja i pogledajmo koji smo pravac spojili sa pravcem djelovanja sile F kako bismo dobili jednu od dvije točke kroz koje prolazi Culmannov pravac. Vidimo sa slike da je to pravac djelovanja sile A . Translatiramo ga u plan sila tako da mu se početak (hvatište) nalazi na vrhu sile F te ga produžimo do presjedišta sa Culmannovim pravcem. U plan sila transliramo pravac djelovanja sile B tako da je početak toga pravca u vrhu sile A , a zatim transliramo i pravac djelovanja sile C tako da prolazi točkom u kojoj se nalazi hvatište sile F . Iz slike vidimo da se pravci sile B i C sijeku kao i u planu položaja. Kada smo translirali pravce svih sila možemo odrediti i smjer sila B i C . Da bi plan sila bio zatvoren, hvatište sile B mora biti u vrhu sile A , a njezin vrh u točki sjecišta pravaca djelovanja B i C . S druge strane, hvatište vektora C je u vrhu sile B , odnosno na sjecištu pravaca djelovanja tih dviju sila, a vrh se nalazi u hvatištu sile F . Time je plan sila zatvoren i iz njega se jasno može odrediti smjer i iznos nepoznatih sila (A , B i C). Nužno je da su te sile ravnoteži, a to smo i ostvarili. Pogledamo li sliku 3.3.1. vidimo da se rezultante sila F i A (usmjerena je od hvatišta sile F prema vrhu sile A) kao i sila B i C (usmjerena je od hvatišta sile C prema vrhu sile B)

nalaze na istom pravcu i jednake su po veličini, ali suprotne po smjeru, a znamo da su dvije sile u ravnoteži ako su jednake po iznosu, nalaze se na istom pravcu i suprotnog su smjera.



Slika 3.3.2. Primjer rešetkastog nosača

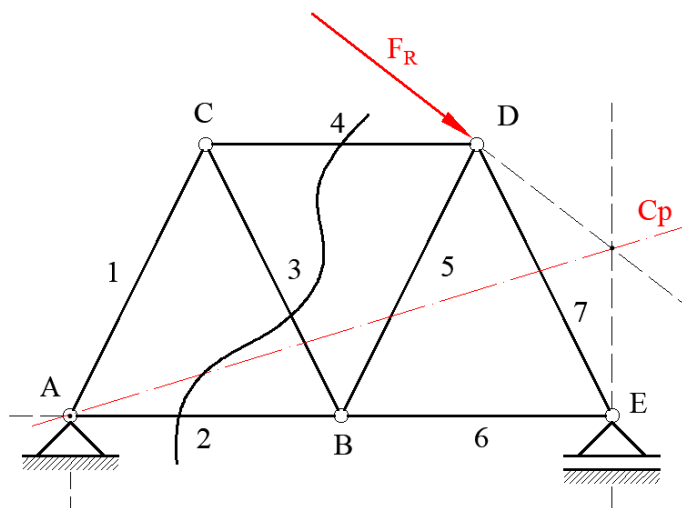
Zadan je rešetkasti nosač kao na slici, poznate su nam vrijednosti sile F_1 i F_2 i potrebno je odrediti sile u štapovima 2, 3, 4 Culmannovom metodom. Vidimo da od vanjskih sila na rešetkasti nosač djeluju sile F_1 i F_2 , te reakcije u osloncima A i E. U osloncu A imamo horizontalnu komponentu F_{Ay} i vertikalnu komponentu F_{Ax} , a u osloncu E samo vertikalnu komponentu F_{Ey} . Poznati su nam pravci djelovanja tih sila, ali ne i njihov smjer i iznos. S obzirom da se radi o grafičkom postupku određivanja sila u štapovima, potrebno je i reakcije u osloncima odrediti grafički. Vidimo da na sustav djeluje sveukupno pet sila, a poznat nam je postupak određivanja sila kada se u sustavu nalaze četiri sile od čega nam je zadana jedna sila te pravci djelovanja triju nepoznatih sila. U ovom slučaju poznate su nam vrijednosti dviju sila, F_1 i F_2 pa ih možemo zbrojiti kako bismo dobili njihovu rezultantu i time sveli sustav na jednu poznatu i tri nepoznate sile.



Slika 3.3.3. Određivanje rezultante F_R

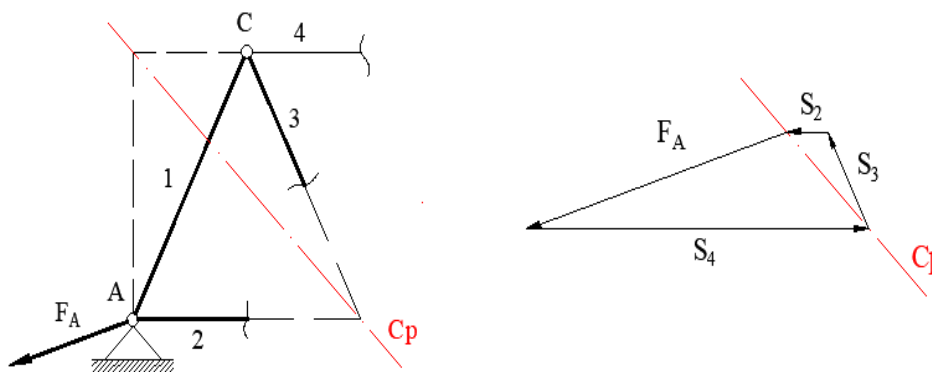
Na početku smo rekli da se traže sile u štapovima 2, 3 i 4 pa ćemo stoga rešetku „presjeći“ kako prikazuje slika 3.3.4.

Promatrat ćemo lijevu stranu presjeka s obzirom da je ona jednostavnija jer od vanjskih sila djeluje samo sila reakcije u osloncu A.



Slika 3.3.4. Konstrukcija Culmannovog pravca

Slika 3.3.5. prikazuje lijevi dio nosača. Spojili smo pravce djelovanja dviju poznatih sila, sile reakcije u osloncu F_A i pravac djelovanja sile u štapu 4, te pravce dviju nepoznatih sila, a to su sile u štapovima 2 i 3. Time smo dobili dvije točke kroz koje prolazi Culmannov pravac. Culmannov pravac translahirali smo u plan sila koji je prikazan na slici 3.3.5. desno. Na njega translahiramo poznatu silu F_A , u mjerilu koje smo prethodno definirali, tako da se njeno hvatište nalazi na Culmannovom pravcu. Na njezin vrh translahiramo pravac djelovanja sile S_4 . Kao što vidimo sa slike, iznos sile S_4 je očitana duljina od vrha sile F_A do presjecišta sa pravcem C_p . Redom translahiramo pravce preostalih traženih sila kako je prethodno opisano, a njihov smjer određuje se vodeći se činjenicom da sve sile trebaju činiti zatvoreni poligon kako i prikazuje slika. Time je određen iznos i smjer traženih sila.



Slika 3.3.5. Lijevi dio nosača i plan sila

3.4. Cremonin plan sila

Ovo je jedna od grafičkih metoda određivanja sila u štapovima rešetkastih nosača. Kao i analitička metoda čvorova, i ova se metoda zasniva na tome da se sile u štapovima određuju čvor po čvor, ali se za razliku od prije spomenute metode reakcije u osloncima i sile u štapovima rešetke određuju postavljanjem grafičkih uvjeta ravnoteže na način da sve sile zatvaraju jedan plan sila iz kojeg se očitavaju dobivene vrijednosti. Spomenuli smo kod analitičkih metoda da se sile ucrtavaju od čvora, tj. uz pretpostavku da su štapovi vlačno opterećeni. Kod ove metode se odmah prilikom crtanja plana sila određuje je li čvor opterećen vlačno ili tlačno što ćemo detaljnije pojasniti prilikom rješavanja konkretnog primjera. Prije samog ucrtavanja sila potrebno je odrediti mjerilo kako bi se na kraju mogle očitati vrijednosti traženih sila.

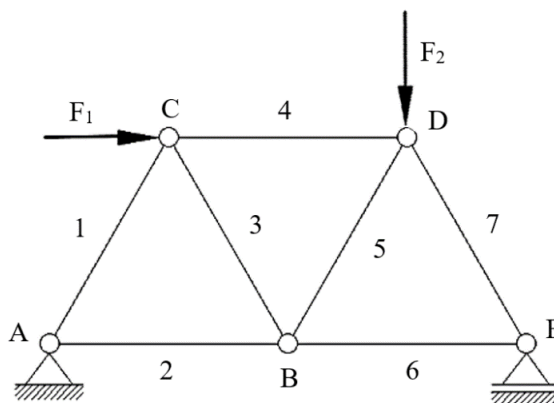
Da bi se ova metoda mogla provoditi, potrebno je poznavati i pratiti određena dogovorena pravila, a ona su sljedeća:

- 1) Označiti štapove i čvorove
- 2) Odabrati smjer obilaženja. U ovom radu to će biti smjer suprotan smjeru kazaljke na satu,
- 3) Odrediti grafički reakcije u osloncima s time da sile ucrtavamo prateći dogovoreni smjer obilaska (u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu) rešetke ucrtavajući sile redom kako na njih nailazimo u smjeru koji smo zadali,

- 4) Crtamo poligon sila za svaki čvor zasebno prateći dogovoreni smjer, odnosno smjer obilaska koji smo pratili prilikom određivanja reakcija u osloncima, a spomenuti poligoni po završetku zadatka trebaju činiti jedan zajednički poligon.

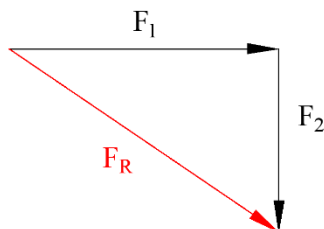
Navedena pravila detaljno će biti objašnjena na primjeru koji slijedi.

Zadan je rešetkasti nosač opterećen kako to prikazuje slika 3.4.1..Potrebno je odrediti sile u štapovima rešetke.



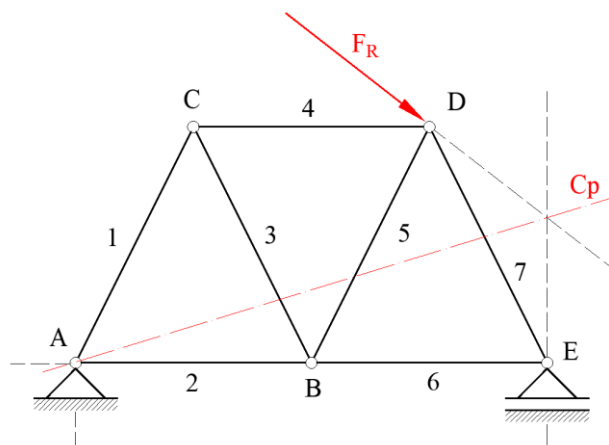
Slika 3.4.1. Rešetkasti nosač sa zadanim opterećenjem

U danom primjeru poznate su nam vrijednosti sile F_1 i F_2 . Znamo da će se oslobađanjem veza u osloncu A javiti reakcije u smjeru osi x i y, i sila reakcije u osloncu E u smjeru osi y. od kojih su nam samo dvije poznate. Ako zbrojimo sile F_1 i F_2 dobit ćemo njihovu rezultantu i time svesti sustav na jednu poznatu i tri nepoznate sile te ćemo stvoriti uvjete za određivanje sile u osloncima pomoću Culmannovog pravca. Slika 3.4.2. prikazuje određivanje rezultantne sile F_R .



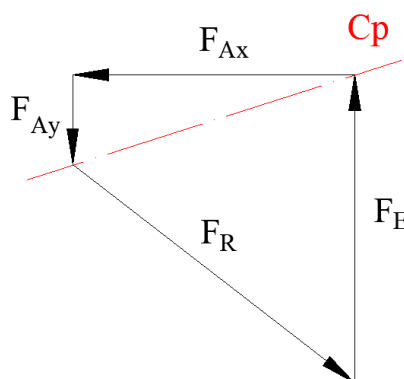
Slika 3.4.2. Određivanje rezultantne sile F_R

Rezultantna sila nalazit će se u točki gdje se sijeku pravci djelovanja sila F_1 i F_2 i bit će orijentirana kako je prikazano na slici 3.4.2. Nakon što smo nju odredili i ucrtali na zadano mjesto, potrebno je i ucrtati pravce djelovanja sila u osloncima kako prikazuje slika 3.4.3.



Slika 3.4.3. Određivanje reakcija u osloncima

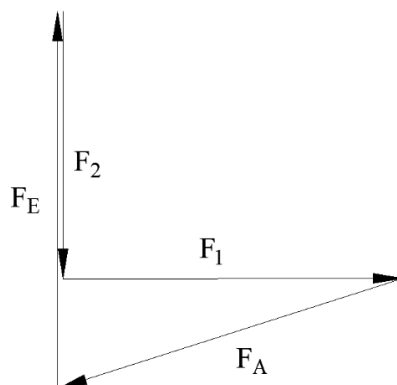
Prema poznatom principu spojiti ćemo pravce djelovanja jedne poznate i jedne nepoznate sile, te preostala dva pravca dviju nepoznatih sila i na taj način dobiti točke kojima prolazi Culmannov pravac (slika 3.4.3.). Detaljan postupak određivanja reakcija u osloncima pomoću Culmannovog pravca pojašnjen je u potpoglavlju 3.3..



Slika 3.4.4. Plan sila sa Culmannovim pravcem i ucrtanim smjerovima reakcijama

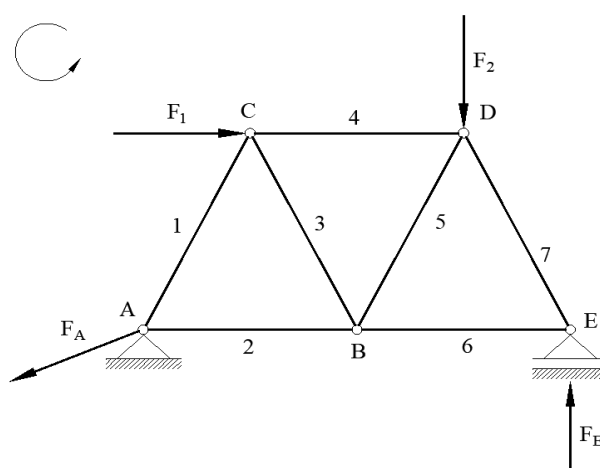
Važno je još jednom napomenuti kako je prije crtanja plana sila nužno odrediti mjerilo da bi se dobivene vrijednosti mogle očitati, a onda i preračunati u N odnosno kN. Na početku priče o ovoj metodi rekli smo kako je potrebno pratiti određena pravila, a jedno od njih je da

poligon vanjskih sila crtamo na način da sile ucrtavamo onim redom kako na njih nailazimo, prateći odabrani smjer obilaska rešetke. Slika 3.4.5. prikazuje poligon vanjskih sila ucrtanih prema odabranom smjeru. Sile F_E i F_2 ucrtane su s malim razmakom kako bi se uočila razlika u njihovim duljinama. One zapravo leže na istom pravcu djelovanja, ali radi preglednosti i jasnije predodžbe ucrtani su kako prikazuje slika 3.4.5..



Slika 3.4.5. Poligon vanjskih sila

Kada smo odredili vanjske sile možemo ucrtati njihove smjerove koji su nam sada poznati. Sile F_1 i F_2 više nećemo ucrtavati kao jednu rezultatnu silu, nju smo samo koristili kako bismo odredili reakcije u osloncima, a sada promatramo kao zasebne sile koje djeluju u pojedinom čvoru.



Slika 3.4.6. Rešetkasti nosač s ucrtanim vanjskim silama

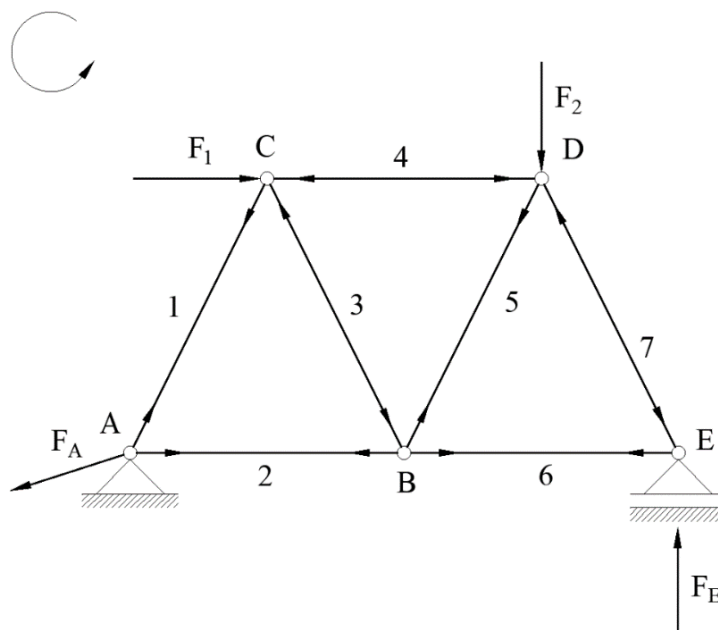
Postupak određivanja sila započet ćemo sa čvorom A. U njemu djeluje poznata sila F_A koju ćemo nacrtati u odabranom mjerilu ($x \text{ mm} : y \text{ kN}$). Obilaskom čvora u odabranom smjeru sljedeće nailazimo na silu S_2 , njezin smjer u planu sila bit će od a do b (slika 3.4.8.). Posljednja sila koja djeluje u ovom čvoru je S_1 sa smjerom od b do c. Sa slike 3.4.7. vidimo da sile u štapovima 1 i 2 djeluju vlačno. Jasno je da će po zakonu akcije i reakcije sile u štapovima na drugom kraju biti suprotno orijentirane od onih koje smo dobili za čvor A kako i prikazuje slika.

Sljedeći čvor koji ćemo promatrati bit će čvor C. U njemu djeluju Vanjska sila F_1 te sile u štapovima 1, 2 i 3. Poligon ćemo započeti poznatom silom F_1 čiji nam je pravac, smjer i iznos poznat. Na nju ćemo dodati silu S_1 , zatim S_3 i na posljetku S_4 . Ovaj poligon čine redom vrhovi e, c, b, d, e. Smjer sile F_1 je poznat i može se jasno vidjeti sa slike 3.4.8.. Smjer sile S_1 za promatrani čvor sada je od c do b, sile S_3 od b do d i sile S_4 od d do e. Pravac sile S_4 slabo je vidljiv sa slike 3.4.8. jer joj se pravac poklapa sa pravcem djelovanja sile F_1 .

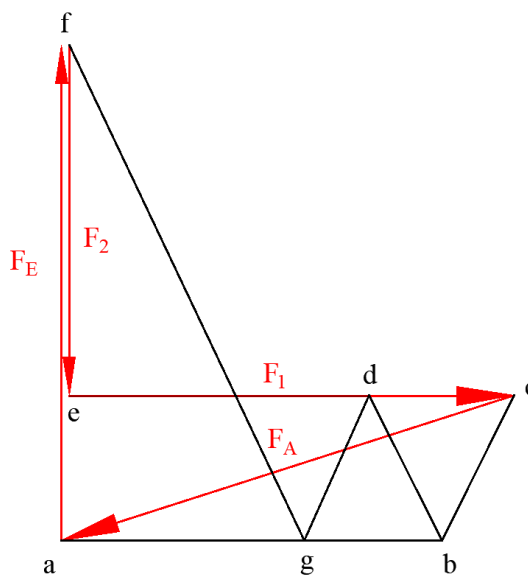
Promotrimo sada čvor D. Od vanjskih sila u njemu djeluje sila F_2 , a od unutarnjih su sile u štapovima 4, 5, 7. Započet ćemo sa poznatom silom F_2 . Na nju ćemo dodati pravac djelovanja sile S_4 koja će za promatrani čvor biti usmjerena od e do d, što znači suprotno od smjera koji je na drugom kraju štapa. Sljedeća sila na koju nailazimo je sila u štapu 5 sa smjerom od d do g. Posljednja sila u ovom čvoru je sila S_7 koja zatvara promatrani poligon i usmjerena je od g do f.

Preostalo je još samo odrediti silu u štapu 6. Nju ćemo dobiti promotrimo li primjerice čvor E u kojem djeluje sila reakcije u osloncu E i sile u štapovima 6 i 7. Poligon započinjemo poznatom silom F_E na koju ćemo dodati pravac djelovanja sile S_7 , a na njega pravac djelovanja sile S_6 kojom ujedno i zatvaramo poligon za promatrani čvor. Podsjetimo se još jednom, sile su usmjerene tako da za svaki promatrani čvor čine zatvoreni poligon.

Sila S_7 ima smjer od f do g, a sila S_6 od g do a. Time smo odredili sile u svim štapovima. Potrebno je samo izmjeriti dobivene duljine u poligonu te ih na osnovu zadanog mjerila preračunati u N (kN).



Slika 3.4.7. Rešetkasti nosač sa ucrtanim smjerovima sila u štapovima prema odabranom smjeru obilaska čvora



Slika 3.4.8. Cremonin plan sila

4. PRIMJER

Zadatak:

Zadana je rešetkasta konstrukcija opterećena prema slici. Potrebno je odrediti sile u štapovima rešetkastog nosača analitičkim (metoda čvorova i metoda presjeka) i grafičkim (Cremonin plan sila i Culmannova metoda) metodama.

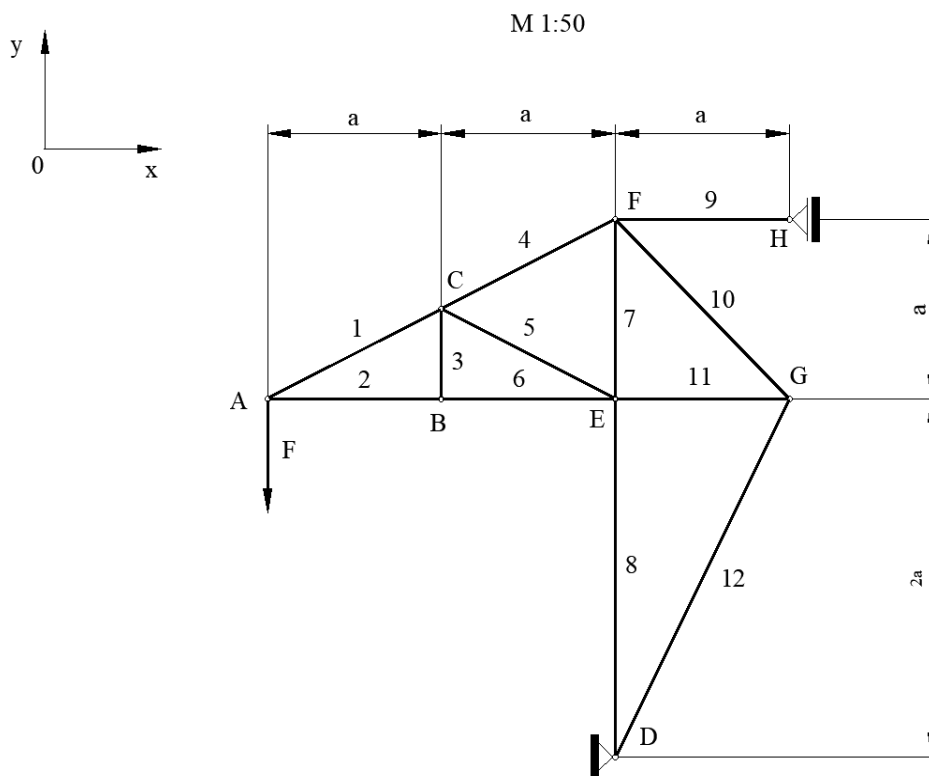
NAPOMENA: Prilikom rješavanja zadatka metodom presjeka odabrat će se jedan presjek na kojem će biti prikazan princip same metode radi jednostavnosti postupka.

Crteži u mjerilu koje je odabrano i prema kojem su vrijednosti za grafičke metode i očitane nalaze se na kraju rada iza popisa literature.

Zadane vrijednosti:

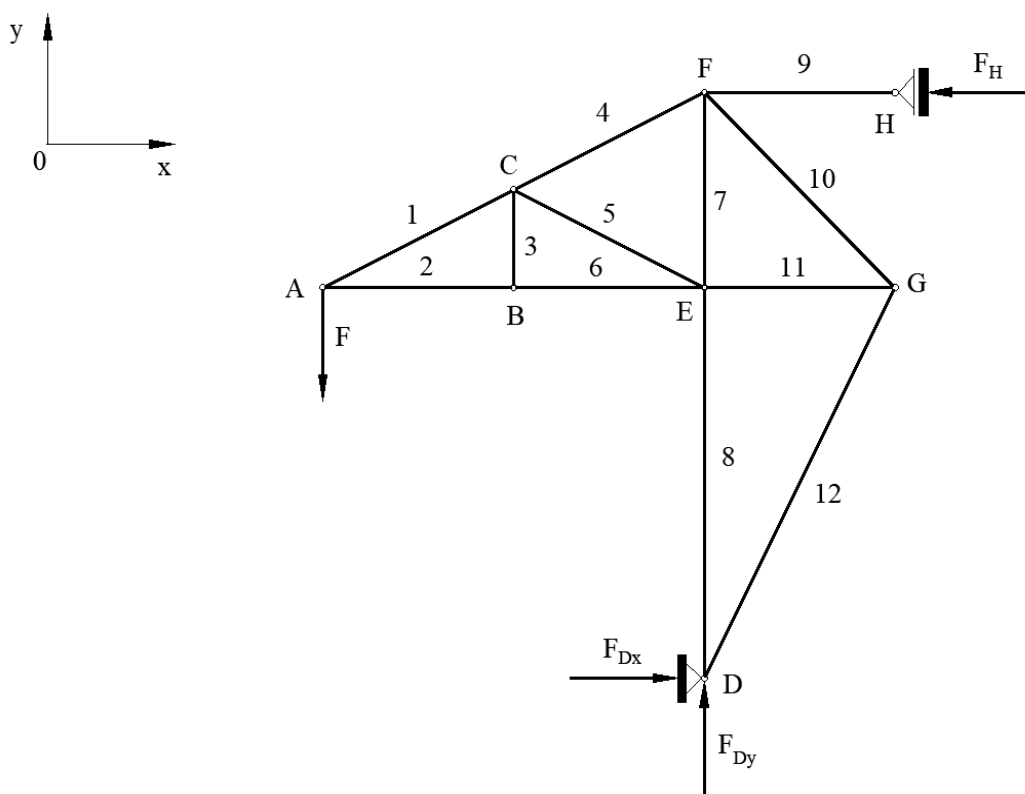
$$F = 15 \text{ kN}$$

$$a = 3 \text{ m}$$



4.1. Metoda čvorova

Prisjetimo se da se postupak proračuna rešetkastog nosača sastoji od dva dijela, prvi je određivanje reakcija u osloncima, a drugi određivanje sila u štapovima. Da bismo mogli započeti sa određivanjem sila u štapovima rešetkastog nosača, potrebno je najprije odrediti nepoznate sile, a to su reakcije u osloncima A i B.



Slika 4.1.1. Rešetkasti nosač – ucrtane reakcije u osloncima

1) Reakcije u osloncima:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{Dy} - F = 0 \quad (4.1.1.)$$

Iz izraza (4.1.1.) dobivamo:

$$F_{Dy} = F = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_B \cdot 3a + F \cdot 2a = 0 \quad (4.1.2.)$$

Iz izraza (4.1.2.) dobivamo:

$$F_H = -F \cdot \frac{2a}{3a} = -15 \cdot \frac{2}{3} = -10 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} - F_B = 0 \quad (4.1.3.)$$

Iz izraza (4.1.3.) dobivamo:

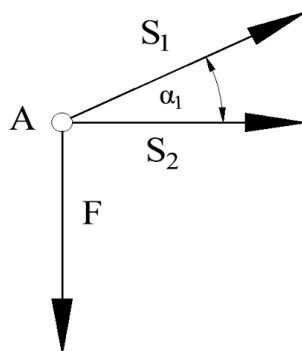
$$F_{Dx} = F_H = -10 \text{ kN}$$

Negativan predznak označava krivo pretpostavljen smjer djelovanja sile (suprotan smjer). Ukoliko smo dobili negativan predznak, u nastavku proračuna vrijednost sile uvrštavat ćemo sa negativnim predznakom.

2) Sile u štapovima:

Nakon što smo odredili reakcije u osloncima i koristeći zadane vrijednosti, možemo započeti određivanje sila u štapovima. Kao što smo već spomenuli, proračun započinjemo s onim čvorom gdje imamo najviše dvije nepoznanice, a to je u ovom slučaju čvor A.

Čvor A:



Slika 4.1.2. Čvor A - zadatak

Postavimo sumu sila u smjeru osi y:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F + S_1 \cdot \sin \alpha_1 = 0 \quad (4.1.4.)$$

Kut α_1 dobili smo iz sličnosti trokuta AEF i ABC. [11]

Iz izraza (4.1.4.) slijedi:

$$S_1 = \frac{F}{\sin \alpha_1} = \frac{15}{\sin(26.56^\circ)} = 33,55 \text{ kN}$$

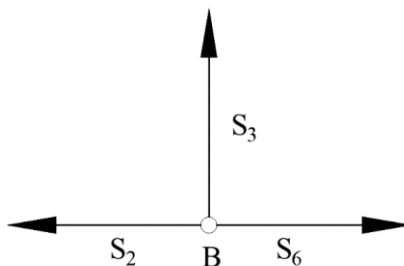
Kao drugi uvjet ravnoteže postavimo sumu sila u smjeru osi x:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_2 + S_1 \cdot \cos \alpha_1 = 0 \quad (4.1.5.)$$

Iz izraza (4.1.5.) slijedi:

$$S_2 = -S_1 \cdot \cos \alpha_1 = -33,55 \cdot \cos(26.56^\circ) = -30 \text{ kN}$$

Čvor B:



Slika 4.1.3. Čvor B - zadatak

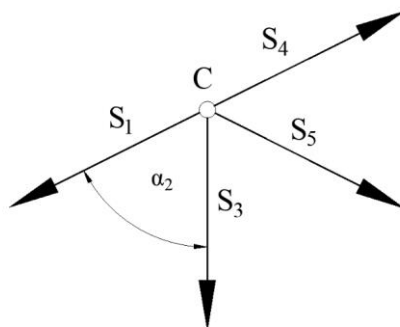
$$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_2 + S_6 = 0 \quad (4.1.6.)$$

Iz izraza (4.1.6.) slijedi:

$$S_6 = S_2 = -30 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow S_3 = 0 \text{ kN} \quad (4.1.7.)$$

Čvor C:



Slika 4.1.4. Čvor C – zadatak

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -S_3 + S_4 \cdot \sin \alpha_1 - S_5 \cdot \cos \alpha_2 - S_1 \cdot \cos \alpha_2 = 0 \quad (4.1.8.)$$

Iz izraza (4.1.8.) slijedi:

$$S_5 \cdot \cos \alpha_2 = -S_1 \cdot \cos \alpha_2 + S_4 \cdot \sin \alpha_1$$

$$S_5 = -S_1 + S_4 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_2} = 0 \text{ kN}$$

Kut α_2 slijedi iz izraza: $\alpha_2 = 180^\circ - 90^\circ - \alpha_1 = 64^\circ$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_4 \cdot \cos \alpha_1 + S_5 \cdot \sin \alpha_2 - S_1 \cdot \sin \alpha_2 = 0 \quad (4.1.9.)$$

Ako u (4.1.9.) uvrstimo izraz za S_5 dobiven iz jednadžbe ravnoteže (4.1.8.) dobivamo:

$$S_4 \cdot \cos \alpha_1 - S_1 \cdot \sin \alpha_2 + S_4 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - S_1 \cdot \sin \alpha_2 = 0$$

$$S_4 \left(\cos \alpha_1 + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 \right) = 2S_1 \cdot \sin \alpha_2$$

$$S_4 = \frac{2S_1 \cdot \sin \alpha_2}{\left(\cos \alpha_1 + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 \right)} = 33,55 \text{ kN}$$

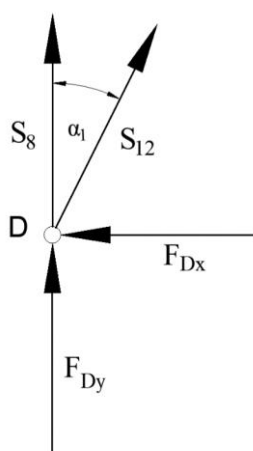
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -S_3 + S_4 \cdot \sin_{\alpha_1} - S_5 \cdot \cos_{\alpha_2} - S_1 \cdot \cos_{\alpha_2} = 0 \quad (4.1.10.)$$

Iz izraza (4.1.10.) slijedi:

$$S_5 \cdot \cos_{\alpha_2} = -S_1 \cdot \cos_{\alpha_2} + S_4 \cdot \sin_{\alpha_1}$$

$$S_5 = -S_1 + S_4 \cdot \frac{\sin_{\alpha_1}}{\cos_{\alpha_2}} = 0 \text{ kN}$$

Čvor D:



Slika 4.1.5. Čvor D – zadatak

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{Dx} + S_{12} \cdot \sin_{\alpha_1} = 0 \quad (4.1.11.)$$

Iz izraza (4.1.11.) slijedi:

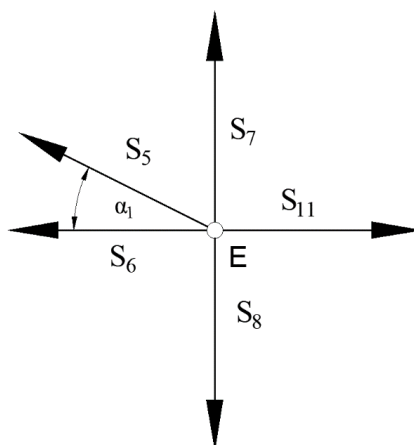
$$S_{12} = \frac{F_{Dx}}{\sin_{\alpha_1}} = -22,36 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_{Dy} + S_8 + S_{12} \cdot \cos_{\alpha_1} = 0 \quad (4.1.12.)$$

Iz izraza (4.1.12.) slijedi:

$$s_8 = -F_{Dy} - S_{12} \cdot \cos_{\alpha_1} = -35 \text{ kN}$$

Čvor E:



Slika 4.1.6. Čvor E – zadatak

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{11} - S_6 - S_5 \cdot \cos\alpha_1 = 0 \quad (4.1.13.)$$

Iz izraza (4.1.13.) slijedi:

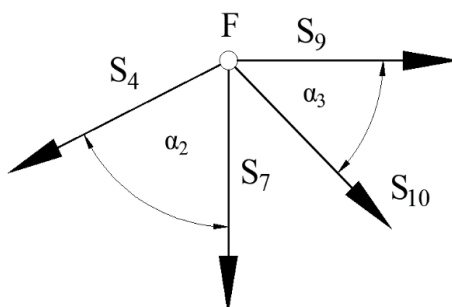
$$S_{11} = S_6 + S_5 \cdot \cos\alpha_1 = -30 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -S_8 + S_7 + S_5 \cdot \sin\alpha_1 = 0 \quad (4.1.14.)$$

Iz izraza (4.1.14.) slijedi:

$$S_7 = S_8 - S_5 \cdot \sin\alpha_1 = -35 \text{ kN}$$

Čvor F:



Slika 4.1.7. Čvor F – zadatak

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -S_7 - S_4 \cdot \cos\alpha_2 - S_{10} \cdot \cos\alpha_3 = 0 \quad (4.1.15.)$$

$$\alpha_3 = \arctan \frac{a}{a} = 45^\circ$$

Iz izraza (4.1.15.) slijedi:

$$S_{10} = -\frac{S_7}{\cos\alpha_3} - S_4 \cdot \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_3} = 28,28 \text{ kN}$$

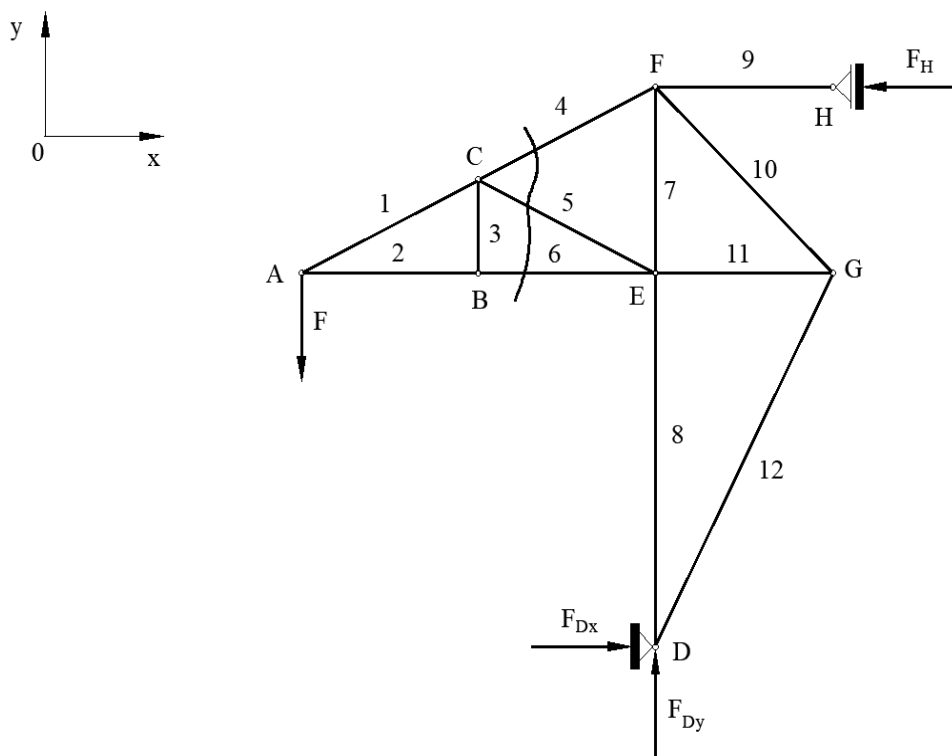
$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_9 + S_{10} \cdot \sin\alpha_3 - S_4 \cdot \sin\alpha_2 = 0 \quad (4.1.16.)$$

Iz izraza (4.1.16.) slijedi:

$$S_9 = S_4 \cdot \sin\alpha_2 - S_{10} \cdot \sin\alpha_3 = 10 \text{ kN}$$

4.2. Metoda presjeka

Metoda presjeka se općenito koristi kada želimo izračunati sile u određenim štapovima nosača. Prema tome, u ovom zadatku izabran je jedan presjek koji presijeca štapove 4, 5 i 6 pa ćemo odrediti sile koje djeluju u njima.



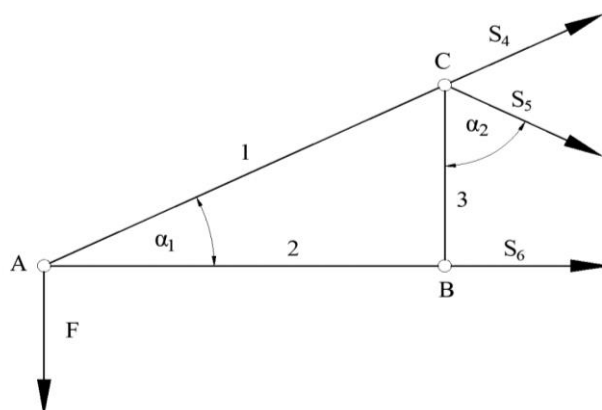
Slika 4.2.1. Rešetkasti nosač sa ucrtanim presjekom

U poglavlju 3, kod metode presjeka pojasnili smo da se kod proračuna odabire ona strana nosača, lijevo ili desno od presjeka koja je jednostavnija, odnosno ona na koju djeluje manje sile. U ovom slučaju, izabrat ćemo lijevu stranu nosača jer na nju djeluje samo vanjsko opterećenje (sila F).

Na slici 4.2.2. prikazan je lijevi dio nosača oslobođen veza, sa ucrtanim silama u štapovima i vanjskim opterećenjem. Poznato je da se kod štapova pretpostavlja smjer djelovanja sile na način da one budu usmjerene od čvora tj. smjer djelovanja sile je takav da štapovi budu vlačno opterećeni. Da bismo mogli postaviti momentne jednadžbe, potrebno je

odrediti i duljinu između čvorova B i C. Nju smo odredili iz uvjeta sličnosti trokuta ABC i trokuta AEF [11] (slika 4.2.1.), a ona iznosi:

$$\frac{a}{2} = 1,5 \text{ m} \quad [11]$$



Slika 4.2.2. Lijevi dio nosača

Kao prvi uvjet ravnoteže postaviti ćemo momentnu jednadžbu oko točke C:

$$\sum M_C = 0 \rightarrow S_6 \cdot \frac{a}{2} + F \cdot a = 0 \quad (4.2.1.)$$

Iz izraza (4.2.1.) slijedi:

$$S_6 = -F \cdot \frac{2a}{a} = -30 \text{ kN}$$

Za drugi uvjet ravnoteže postaviti ćemo sumu sila u smjeru osi x:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_6 + S_4 \cdot \cos\alpha_1 + S_5 \cdot \sin\alpha_2 = 0 \quad (4.2.2.)$$

Iz izraza (4.2.2.) slijedi:

$$S_6 + S_4 \cdot \cos\alpha_1 + S_4 \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 - \frac{F}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 = 0$$

$$S_4 \left(\cos\alpha_1 + \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 \right) = \frac{F}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 - S_6$$

$$S_4 = \frac{\frac{F}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 - S_6}{\left(\cos\alpha_1 + \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 \right)} = 33,55 \text{ kN}$$

Treći uvjet ravnoteže je suma sila u smjeru osi y:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F + S_4 \cdot \sin\alpha_1 - S_5 \cdot \cos\alpha_2 = 0 \quad (4.2.3.)$$

Iz izraza (4.2.3.) slijedi:

$$S_5 = S_4 \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_2} - \frac{F}{\cos\alpha_2} = 0 \text{ kN}$$

Time su sile u presečenim štapovima određene. Usporedimo li ih sa vrijednostima koje smo dobili metodom čvorova vidimo da su dobivene vrijednosti iste.

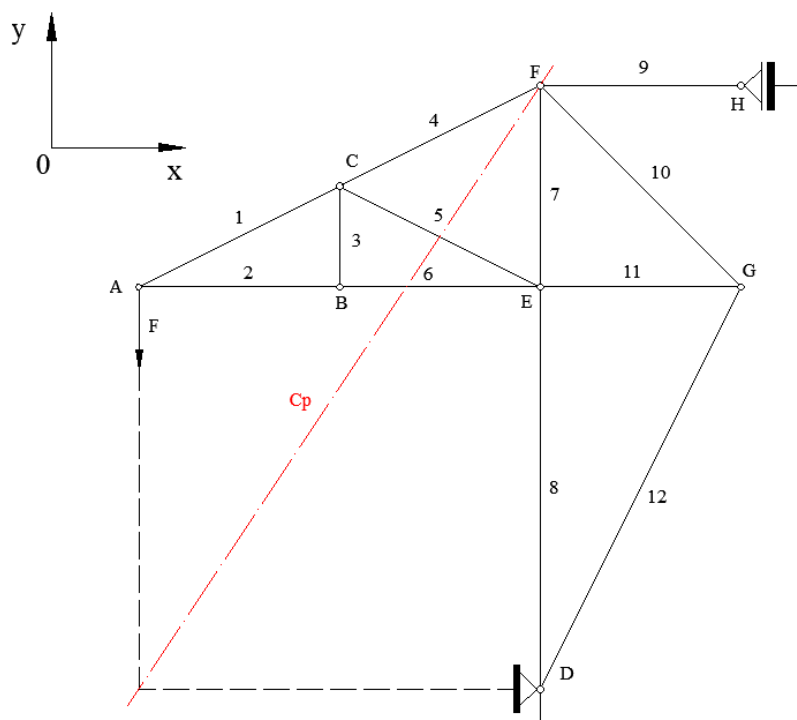
Sila	Vrijednost dobivena metodom čvorova u kN	Vrijednost dobivena metodom presjeka u kN
S ₄	33,55 kN	33,55 kN
S ₅	0 kN	0 kN
S ₆	- 30 kN	- 30 kN

Tablica 4.2.1. Usporedba vrijednosti dobivenih metodom čvorova i metodom presjeka

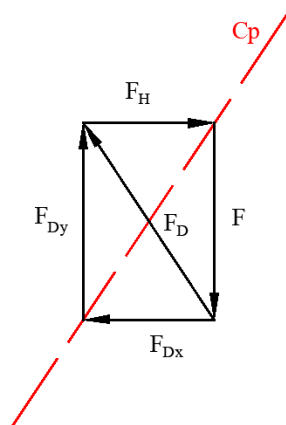
4.3. Culmannova metoda

Kod ove metode, koja predstavlja grafičku verziju metode presjeka, odabrat ćemo isti presjek kao i kod metode presjeka.

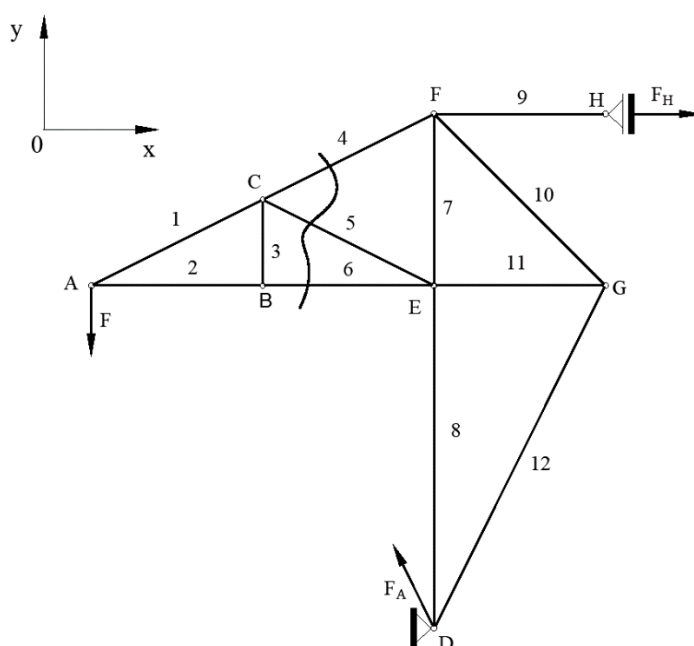
Najprije ćemo odrediti reakcije u osloncima pomoću Culmannovog pravca.



MJERILO: 10 mm = 5 kN

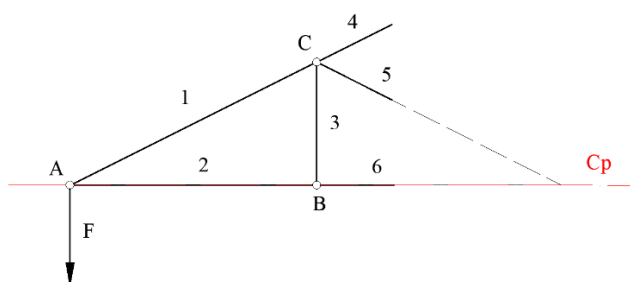


Slika 4.3.1. Rešetkasti nosač - konstrukcija Culmannovog pravca



Slika 4.3.2. Nosač sa označenim presječenim štapovima i reakcijama u osloncima

Promatrat ćemo lijevu stranu nosača (slika 4.3.3.) iz istog razloga kao i kod metode presjeka. Poznata nam je sila F po iznosu i smjeru i uz nju pravci djelovanja sila u štapovima 4, 5 i 6. Da bismo dobili njihove vrijednosti i smjer, koristi ćemo se Culmannovim pravcem. Princip je isti kao i kod određivanja reakcija u osloncima, samo što u ovom slučaju nećemo promatrati cijeli nosač, već samo jedan njegov dio i sile koje djeluju na njega.

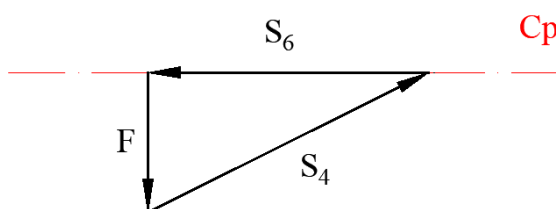


Slika 4.3.3. Lijevi dio nosača – Culmannova metoda

Spojili smo pravac djelovanja poznate sile F i sile u štapu 4 i pravce preostalih dviju sila u štapovima 5 i 6. Prva točka prolazi kroz čvor A, a druga se nalazi u sjecištu pravaca djelovanja sila 5 i 6. Culmannov pravac transliramo u plan sila koji crtamo u mjerilu koje

smo definirali na početku. Na njega nanese u mjerilu iznos poznate sile F , a zatim i pravac djelovanja sile S_4 koja je usmjerena od vrha sile F do presjecišta sa pravcem C_p . Potrebno je još translirati pravce sile S_5 i S_6 . One su usmjerene tako da zajedno sa ucrtanim silama čine zatvoreni poligon. U planu sila vidimo da nema ucrtane sile S_5 . Kao što smo vidjeli i kod prethodne metode, ona mora biti jednaka nuli kako bi poligon sila bio zatvoren. Zadnji korak je izmjeriti sile u poligonu i pomnožiti ih s mjerilom kako bi dobili vrijednosti u kN (N).

MJERILO: 10 mm = 5 kN



Slika 4.3.4. Plan sila za odabrani presjek

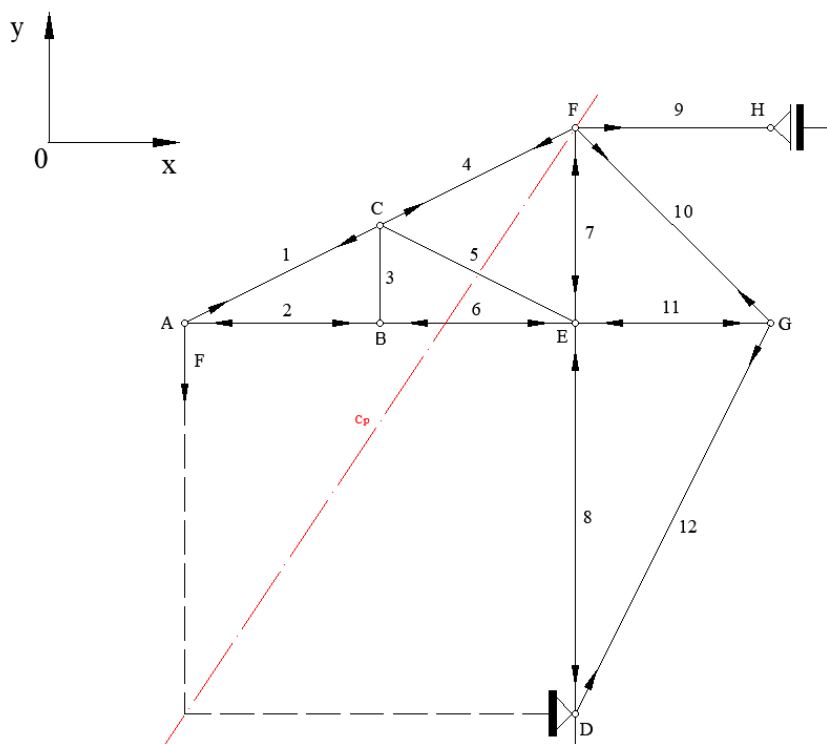
Očitane vrijednosti:

Sila	Očitana vrijednost u mm	Vrijednost u kN	Vrijednost dobivena analitičkim metodama u kN
F_{Dx}	20 mm	10 kN	-10 kN
F_{Dy}	30 mm	15 kN	-15 kN
F_D	36 mm	18 kN	18,03 kN
F_H	20,2 mm	10,1 kN	-10 kN
S_4	67 mm	33,5 kN	33,55 kN
S_5	0 mm	0 kN	0 kN
S_6	60 mm	30 kN	-30 kN

Tablica 4.3.1. Usporedba grafičkih i analitičkih vrijednosti za Culmannovu metodu

4.4. Cremonin plan sila

Kao i kod svih metoda, postupak započinjemo određivanjem reakcija u osloncima. S obzirom da se radi o grafičkoj metodi, reakcije u osloncima odredit ćemo također grafički i to pomoću Culmannovog pravca. U osloncu D javljaju se dvije komponente, u smjeru osi x i y, a u osloncu H samo reakcija u smjeru osi x. Zadana je jedna sila F i poznati su nam pravci djelovanja triju sila za koje ne znamo ni iznos ni smjer pa ćemo primijeniti metodu Culmannovog pravca kako bismo odredili reakcije. Spojit ćemo pravce djelovanja poznate sile F i pravac djelovanja komponente F_{Dx} i time smo dobili prvu točku. Zatim ćemo spojiti pravce preostalih dviju nepoznatih sila F_H i F_{Dy} i time je određena i druga točka kojom prolazi Culmannov pravac kako i prikazuje slika 4.4.1..



Slika 4.4.1. Kontrukcija Culmannovog pravca – Cremonin plan sila

Nakon što smo odredili Culmannov pravac, možemo započeti sa određivanjem reakcija u osloncima. Pravac C_p translaticamo u plan sila, na njega translaticamo pravac sile F i u mjerilu nanesimo njezinu vrijednost tako da joj se hvatište nalazi na pravcu C_p . Na njezin vrh translaticamo pravac djelovanja sile F_{Dx} .

Njezino hvatište bit će u vrhu sile F , a vrh te sile nalaziti će se na mjestu sjecišta pravca C_p i pravca djelovanja sile F_{D_x} . Smjer se ucrtava vodeći se time da sve sile čine zatvoreni poligon. U sljedećem koraku transliramo i pravce djelovanja preostalih dviju sila. Hvatište sile F_H bit će u vrhu sile F_{D_x} , a njezin kraj bit će u točki gdje se sijeku pravci djelovanja sila F_H i F_{D_y} . Sila F_{D_y} bit će orijentirana tako da zatvara poligon, što možemo vidjeti na slici 4.4.2. a).

Kod ove metode ne zanimaju nas komponente po osima, već rezultirajuće sile pa ćemo pomoću trokuta sila grafički odrediti iznos i smjer rezultantne sile reakcije u osloncu D kao što prikazuje slika 4.4.2 b). Poligon započinjemo s poznatom silom F , a zatim u smjeru suprotnom od kazaljke na satu obilazimo rešetku i ucrtavamo pravac one sile na koju sljedeću nailazimo, a to je pravac sile F_A , poligon zatvaramo silom F_H .

Nakon što smo odredili reakcije i nacrtali poligon vanjskih sila i reakcija, možemo odrediti i sile u štapovima.

Proračun ćemo započeti sa čvorom A u kojem nam je poznata sila F . Kao smjer obilaska uzet ćemo smjer obrnut od kretanja kazaljke na satu. Ovaj poligon čine sile F te sile u štapovima 1 i 2. Taj poligon sila prikazan je na slici 4.4.2. c), a čini ga trokut sa vrhovima b , a , c . Smjer sile F je poznat i usmjeren je od vrha c do b . Smjer sile S_2 je od b do a i smjer sile S_1 je od a do c . Ucrtamo li dobivene smjerove kako prikazuje slika 4.4.1. vidimo da je štap 1 opterećen na vlak, a štap 2 na tlak.

Uzmimo sada čvor B . U njemu nam je poznat smjer sile u štapu 2 koji prolazi iz zakona akcije i reakcije. Kretajući se također u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, sljedeća sila na koju nailazimo je sila u štapu 6, a njezin smjer je od b prema a i vidimo iz poligona da je ona po iznosu jednaka sili u štapu 1. Sila u štapu 3 nije ucrtana i ona, kao što se vidi iz nacrtanog, mora biti jednaka nuli jer u protivnom poligon sila ne bi bio zatvoren.

Promotrimo čvor C . Započet ćemo s poznatom silom S_1 koja je usmjerena od c do a . Iza nje, u odabranom smjeru, slijedi sila S_3 za koju smo ustanovili da je jednaka 0. Vrijednost sile S_5 će također biti jednaka nuli jer u protivnom poligon sila ne bi bio zatvoren. Sila S_4 , kao što se i vidi sa slike, bit će po iznosu jednaka sili S_1 , a bit će usmjerena od a do c . Sa slike 4.4.1. vidimo da se smjer sile S_1 u čvoru C promijenio te je sada ta sila vlačna, a isto je opterećen i štap 4 na strani čvora C .

U čvoru D djeluju sile reakcije u osloncu D i sile u štapovima 8 i 12. Poznat nam je iznos sile F_D sa smjerom od b do e . Sljedeća sila na koju nailazimo je sila S_{12} čiji je smjer od e

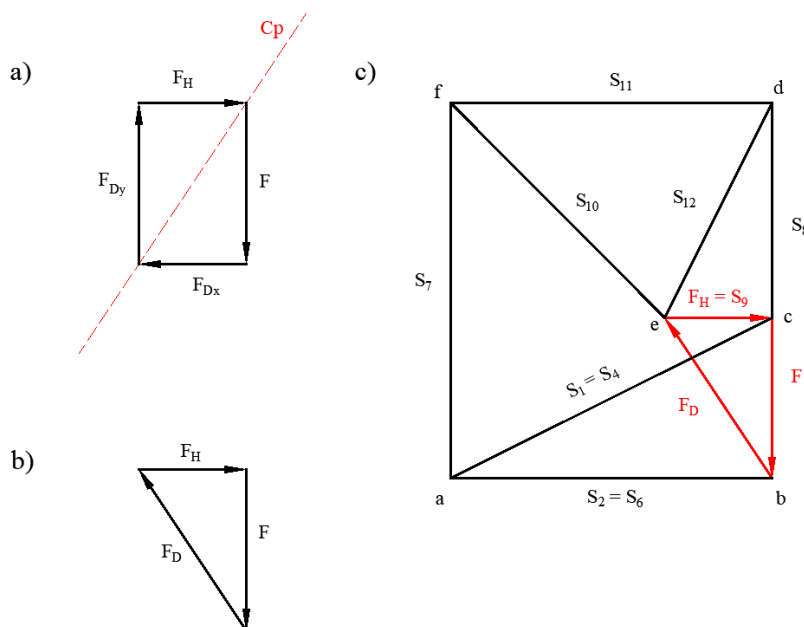
do d. Iz slike 4.4.1. vidimo da je štap 12 u čvoru D vlačno opterećen. Preostala sila u ovom čvoru je S_8 sa smjerom u poligonu sila od d do c. Taj štap je u promatranom čvoru tlačno opterećen.

U čvoru E postupak započinjemo silom S_8 . Za početnu silu mogli smo odabrati i S_6 koja je također poznata, no to je sasvim svejedno. Smjer sile S_8 za promatrani čvor je od b do d. Pratimo i dalje zadani smjer i sljedeća sila koju ucrtavamo je S_{11} sa smjerom od d do f. Vidimo iz poligona sila da je ona po iznosu jednaka sili S_2 . Sila S_7 usmjerena je od f do a i posljednja sila koja zatvara poligon je sila u štapu 6 sa smjerom od a do b.

Zadnji promatrani čvor je F. Poligon započinjemo silom S_4 koja je usmjerena od c do a. Nakon nje ucrtavamo silu S_7 sa smjerom od a do f, zatim silu S_{10} sa smjerom od f do e i posljednja sila koja čini poligon za promatrani čvor je sila S_9 sa smjerom od e do c koja je po iznosu jednaka sili reakcije F_H .

Čvor G nije potrebno zasebno razmatrati jer u njemu djeluju sile koje su određene promatranjem ostalih čvorova.

MJERILO: 10 mm = 5 kN



Slika 4.4.2. Cremonin plan sila: a) reakcije u osloncima, b) plan vanjskih sila, c) plan sila - vanjske sile i sile u štapovima

Očitane vrijednosti :

Sila	Očitana vrijednost u mm	Vrijednost u kN	Vrijednost dobivena analitičkim metodama u kN
F_{Dx}	20 mm	10 kN	-10 kN
F_{Dy}	30 mm	15 kN	-15 kN
F_D	36 mm	18 kN	18,03 kN
F_H	20,2 mm	10,1 kN	-10 kN
S_1	67 mm	33,5 kN	33,55 kN
S_2	60 mm	30 kN	-30 kN
S_3	0 mm	0 kN	0 kN
S_4	67 mm	33,5 kN	33,55 kN
S_5	0 mm	0 kN	0 kN
S_6	60 mm	30 kN	-30 kN
S_7	70 mm	35 kN	-35 kN
S_8	70 mm	35 kN	-35 kN
S_9	20,2 mm	10,1 kN	10 kN
S_{10}	56,5 mm	28 kN	28,28 kN
S_{11}	60 mm	30 kN	-30 kN
S_{12}	44,7 mm	22,35 kN	-22,36 kN

Tablica 4.4.1. Usporedba grafičkih i analitičkih vrijednosti za Cremonin plan sila

Usporedbom rezultata dobivenih grafičkim i analitičkim metodama vidimo da postoje mala odstupanja za vrijednosti pojedinih sila.

5. ZAKLJUČAK

Kroz tijek ovog rada vidjeli smo kako se statički određeni rešetkasti nosači mogu proračunati na različite načine. Ove metode danas su sve manje zastupljene u praksi jer su ih zamijenile neke nove, brže i jednostavnije metode i programi namijenjeni za takve proračune.

Rješenja za odabrani primjer u ovom radu dobivena su na dva načina, analitički i grafički. Analitički način dobivanja rješenja proveden je računanjem pomoću kalkulatora, a grafički način ručno, crtanjem pomoću geometrijskog pribora (trokuti) i primjenom programa za izradu tehničkih crteža AutoCAD [10]. Svi crteži u ovome radu izrađeni su primjenom spomenutog programa radi bolje preglednosti i urednosti samog crteža.

Primjena grafičkih metoda zahtijeva crtanje plana i poligona sila na temelju kojih se mjerenjem i preračunavanjem jedinica duljine dobivaju vrijednosti traženih sila. Kao glavna prednost grafičkih metoda ističe se brzina dobivanja traženog rješenja posebice kada se radi o složenijim rešetkastim nosačima koji imaju velik broj čvorova. Kada bismo neki takav primjer rješavali nekom od analitičkih metoda, to bi nam oduzelo znatno više vremena, za otprilike 20% više nego li crtanje poligona i planova sila kod grafičkih metoda. Također, jedna od prednosti grafičkih metoda je i to što se kod njih ne može krivo pretpostaviti smjer neke sile, već se on određuje odmah prilikom crtanja poligona.

S druge strane, primjenom analitičkih metoda (računanjem pomoću kalkulatora) dobivamo preciznije rezultate na temelju poznatih početnih vrijednosti. Kod grafičkih metoda točnost rješenja ovisi o mnogim čimbenicima, a ponajprije o osobi koja tu metodu provodi. Procjena izmjerene duljine, debljina olovke, nedovoljno precizan geometrijski pribor (ravnala i trokuti) pomoću kojeg očitavamo duljinu još su neki od čimbenika koji utječu točnost traženog rješenja. Cilj svakog proračuna je dobiti što točnije rješenje. Naravno, najpreciznije vrijednosti dobit ćemo korištenjem programa gdje gotovo da i ne postoji mjesto za pogreške.

Na temelju provedene analize na primjeru rešetkastog nosača zaključak je sljedeći: Bez obzira na to što analitičke metode zahtijevaju više vremena za proračun, rješenja dobivena spomenutim postupkom su relevantnija od onih dobivenih grafičkim postupcima te su stoga sigurnije i povoljnije za primjenu kod statičkih proračuna rešetkastih nosača.

POPIS PRILOGA

Prilog 1 Culmannova metoda – zadatak

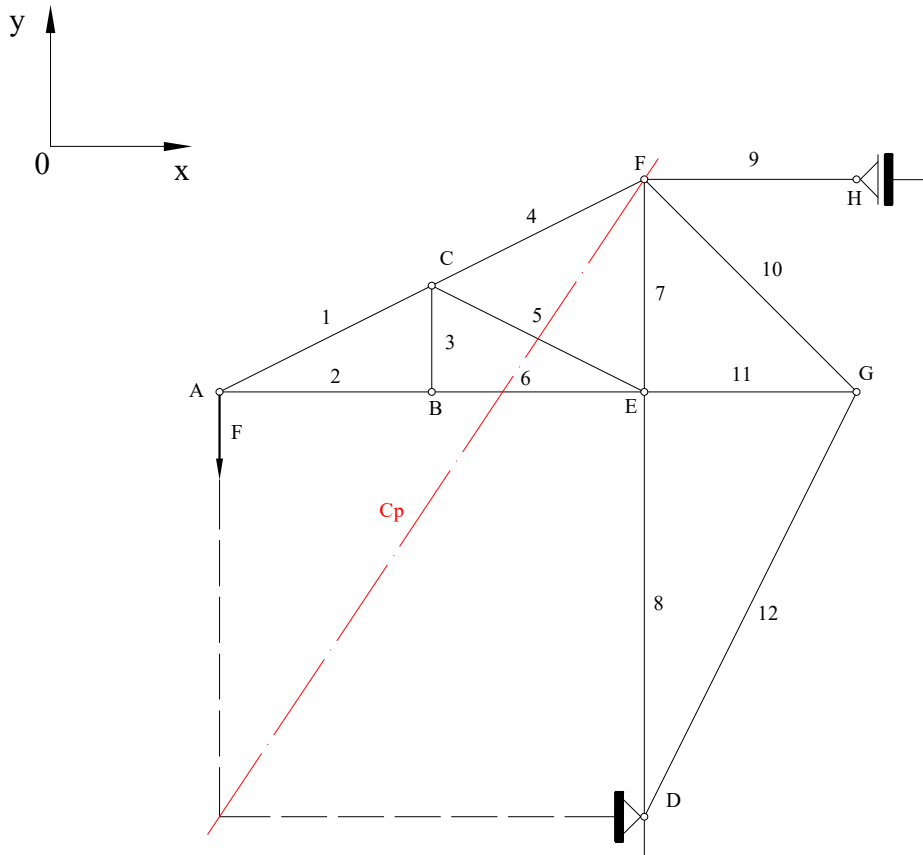
Prilog 2 Cremonin plan sila – zadatak

NAPOMENA: Crteži u mjerilu, prema kojima su izmjerene i dobivene vrijednosti traženih sila u štapovima kod grafičkih metoda, nalaze se na kraju rada iza popisa literature.

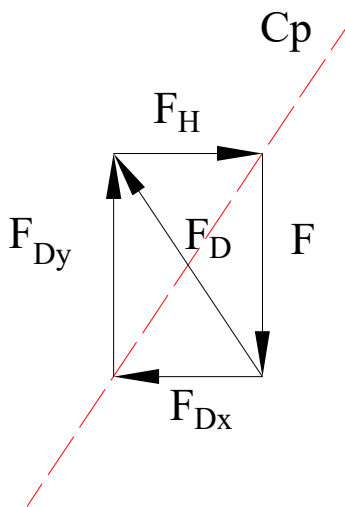
LITERATURA

- [1] Alfirević, I., Saucha, J., Tonković, Z., Kodvanj, J.: Uvod u mehaniku II.- primijenjena statika, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2010.
- [2] https://sh.wikipedia.org/wiki/Pan%C4%8Deva%C4%8Dki_most
- [3] <http://www.lindab.com/ba/pro/products/pages/lindab-truss-r%C3%A1csosrendszer.aspx>
- [4] <https://www.energypress.net/dalekovod-ostvaruje-novi-posao-u-norveskoj/>
- [5] <https://www.ferokov.com/hr/ferokov-hrvatska-podruznica/>
- [6] <https://www.flickr.com/photos/volvob12b/9628746592>
- [7] Muftić, O.: Mehanika 1 – statika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [8] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [9] Bazjanac, D.: Zbirka zadataka iz tehničke mehanike (statika), Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1969.
- [10] <https://www.autodesk.com/education/free-software/autocad>
- [11] <https://www.scribd.com/doc/131516296/Bronstejn-Matematicki-Prirucnik-Za-Inzenjere-i-Studente-1964>

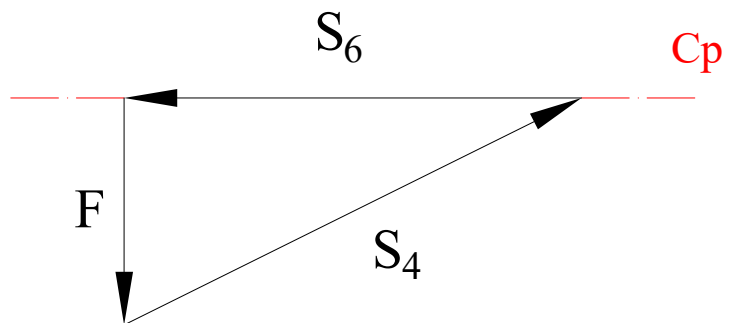
Prilog 1
Culmannova metoda - zadatak



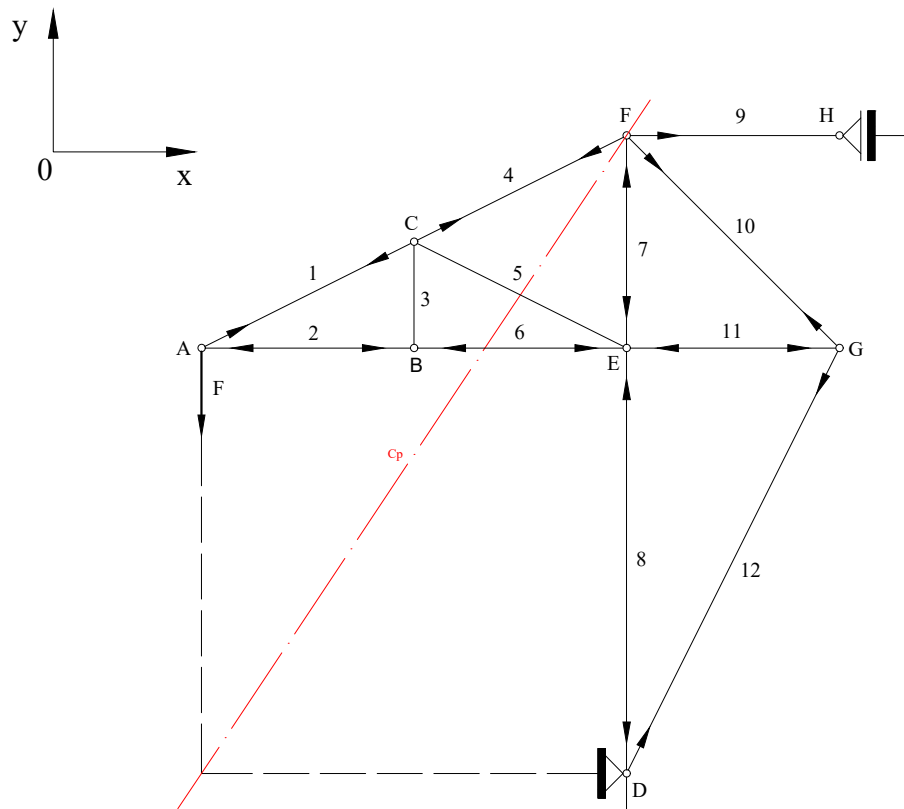
Plan sila - reakcije u osloncima
MJERILO: 10 mm = 5 kN



Plan sila - sile u štapovima
MJERILO: 10 mm = 5 kN



Prilog 2
 Cremonin plan sila - zadatak



MJERILO: 10 mm = 5 kN

