

# PRORAČUN VIBRACIJSKOG ODZIVA VOZILA S OSLANJANJEM POMOĆU KLACKALICE

---

Žagar, Romano

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Karlovac  
University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:109670>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-27**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

Repository / Repozitorij:

[Repository of Karlovac University of Applied  
Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
*Stručni studij Mehatronike*

Romano Žagar

**Proračun vibracijskog odziva vozila s  
oslanjanjem pomoću klackalice**

**Calculation the vibration response of the  
vehicle with the reliance of the teeter**

Završni rad

Karlovac, 2019. godina.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
*Stručni studij Mehatronike*

**Romano Žagar**

**Proračun vibracijskog odziva vozila s  
oslanjanjem pomoću klackalice**

**Calculation the vibration response of the  
vehicle with the reliance of the teeter**

**Završni rad**

**Mentor:**

dr.sc. Josip Hoster, v. pred.

Karlovac, 2019. godina.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno, koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Josipu Hosteru, dipl. ing stroj na savjetima, konzultacijama i pomoći pri izradi ovog završnog rada. Hvala profesorima, kolegama i svima koji su mi pomogli za vrijeme studiranja.

Romano Žagar

## SADRŽAJ

SAŽETAK .....	2
SUMMARY .....	3
POPIS SLIKA .....	4
POPIS TABLICA .....	5
POPIS OZNAKA .....	6
1. UVOD - SUSTAVA OSLANJANJA CESTOVNIH VOZILA .....	7
1.1 Karakteristike i vrste sustava oslobođenja između 2 kotača .....	8
1.2 Elastični elementi sustava oslanjanja cestovnih vozila .....	10
1.3 Elementi za vođenje kotača .....	10
1.4 Mehanizam vođenja kotača .....	11
2. KINEMATIKA I DINAMIKA TIJELA .....	13
2.1 Kinematika tijela .....	13
2.2 Kinematika krutog tijela .....	14
2.3 Kinematika točke .....	15
2.4 Dinamika tijela .....	16
2.5 Dinamika materijalne točke .....	18
2.6 Dinamika sustava materijalnih točaka i krutog tijela .....	18
3. KINEMATIKA I DINAMIKA CESTOVNIH VOZILA .....	20
3.1 Kinematika cestovnih vozila .....	20
3.2 Dinamika cestovnih vozila .....	22
4. VIBRACIJE .....	25
4.1 Teorijske osnove analize vibracija .....	25
4.2 Vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja .....	26
4.3 Vibracijski sustav s dva stupnja slobode gibanja .....	27
4.4 Vibracijski sustav s konačnim brojem stupnjeva slobode gibanja .....	28
5. NUMERIČKE METODE RJEŠAVANJA KRUTIH TIJELA .....	29
5.1 Eksplicitna integracija .....	29
5.2 Metoda centralnih razlika .....	29
5.3 Newtonova metoda .....	30
5.4 Eulerova metoda .....	30
5.5 Numerička metoda rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžba .....	32
5.6 Metoda pretpostavljenog rješenja .....	32
5.7 Konvergencija rješenja u svakom vremenskom koraku .....	33
6. NUMERIČKI PRORAČUN .....	34
6.1 Određivanje karakteristike pritiska gume na podlogu .....	34
6.2 Prikaz kinematike i dinamike proračunskog modela cestovnog vozila .....	37
7. PRORAČUNSKI MODEL CESTOVNOG VOZILA POMOĆU KLACKALICE .....	40
7.1 Proračunski model .....	40
8. PRORAČUN DINAMIKE I KINEMATIKE KLACKALICE .....	41
8.1 Jednadžba proračunskog modela dinamike klackalice .....	41
8.2 Jednadžba proračunskog modela kinematike klackalice .....	42
8.3 Rezultati simulacije proračunskog modela .....	43
9. ZAKLJUČAK .....	45
10. LITERATURA .....	46

## **SAŽETAK**

U ovom završnom radu opisana je funkcija, glavni dijelovi i karakteristike sustava oslanjanja cestovnih vozila te je opisana kinematika i dinamika tih istih sustava. Navedene su numeričke metode rješavanja vibracijskih problema krutih tijela. U praktičnom dijelu rada prikazan je proračunski model za izračun vibracijskog odziva vozila kao krutog tijela s oblikom oslanjanja kotač-opruga, te dva kotača povezana klackalicom. Prikazni su rezultati simulacije-eksplicitnom Eulerovom numeričkom metodom za vremensku domenu vibracijskog odziva vozila pri naletu na odabranu prepreku na podlozi. Uspoređeni su rezultati za oba sustava oslanjanja, kotač na opruzi izravno i dva kotača povezana klackalicom. Kao veličina na kojoj je temeljna usporedba kvalitete oslanjanja dvaju sustava odabrano je vertikalna komponenta ubrzanja putničkog prostora, odnosno putnika. Zaključak je da klackalica donosi poboljšanje, tj. smanjenje najvećeg ubrzanja.

Ključne riječi: klackalica, kinematika, dinamika, vibracijski odziv, Eulerova eksplicitna numerička metoda.

## **SUMMARY**

This final work describes the function, main parts and characteristics of the road vehicle support system, along with the kinematics and dynamics of these systems. Numerical methods of solving the vibrational problems of rigid bodies are mentioned as well. In the practical part of the paper, a calculation model for calculating the vibration response of the vehicle is shown in the form of a rigid body with a wheel-spring support, and two wheels connected by a teeter. The results of the simulation are shown by the explicit Euler numerical method for the time domain of the vibration response of the vehicle when it comes to the selected obstacle on the surface. There have been compared the results for both suspension systems, the wheel directly on the spring and the two wheels connected to a teeter. As the size at which the basic comparison of the quality of the two systems is made, the vertical component of the acceleration of passenger space, i.e. passengers, is selected. The conclusion is that the teeter brings improvement, i.e. the greatest acceleration reduction.

Keywords: teeter, kinematics, dynamics, vibration response, Euler's explicit numerical method.

## POPIS SLIKA

Slika 1. Kretanje kotača (gume) preko izbočina (neravnina) na podlozi. [5].....	8
Slika 2. Sustav zavisnog elastičnog oslanjanja. [1].....	9
Slika 3. Sustav zavisnog oslanjanja sa balansirajućim kotačima. [1] .....	9
Slika 4. Sustav nezavisnog oslanjanja sa pomicanjem kotača u .....	10
Slika 5. Mehanizam za vođenje pogonskih neupravljivih kotača. [1].....	12
Slika 6. Mehanizam za vođenje pogonskih upravljivih kotača. [1] .....	12
Slika 7. Koordinatni i inercijski sustav tijela. [4].....	13
Slika 8. Kinematika krutog tijela i izvod jednadžba. [8] .....	15
Slika 9. Sir Isaac Newton. [7] .....	16
Slika 10. Pomični i fiksni koordinatni sustav, određene .....	19
Slika 11. Mehaničko vođenje i uzdužna nagibna os. [6] .....	21
Slika 12. Središte valjanja. [6] .....	21
Slika 13. Trag kotača. [6].....	22
Slika 14. Prikaz deformacije kotača nailaskom na određene nepravilnost na podlozi. [9] .....	23
Slika 15. Prikaz temeljnih vibracijskih veličina. [3] .....	25
Slika 16. Vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode. [2] .....	26
Slika 17. Vibracijski sustav s dva stupnja slobode gibanja. [2] .....	27
Slika 18. Vibracijski sustav s konačnim brojem stupnja slobode gibanja. [2] .....	28
Slika 19. Grafički prikaz Newtonove metode. [10].....	30
Slika 20. Konvergencija rješenja za položaj u vremenskom koraku $i+1$ .....	33
Slika 21. Određivanje karakteristike pritiskanja kotača: .....	34
Slika 22. Mjerenje promjene geometrije gume 20x1,75" na izbočenoj podlozi. ....	35
Slika 23. Ovisnost promjene geometrije gume 20x1,75" .....	36
Slika 24. Ovisnost promjene geometrije gume 12x1,75" .....	36
Slika 25. Proračunski model osnovnog vozila. ....	37
Slika 26. Kinematika i dinamika cestovnog vozila. ....	37
Slika 27. Detalj (sa slike 26.) deformiranja gume pri pritisku na nepravilnost podloge. ....	38
Slika 28. Deformiranje gume pri pritisku na .....	38
Slika 29. Usporedba kinematike gume pri pritisku .....	39
Slika 30. Proračunski model vozila s oslanjanjem pomoću klackalice. ....	40
Slika 31. Geometrija karakteristike klackalice.....	40
Slika 32. Dinamika klackalice.....	41
Slika 33. Dinamika vozila .....	41
Slika 34. Kinematika klackalice:.....	42
Slika 35. Proračun promjene kinematike kotača A unutar vektorskog koraka. ....	43
Slika 36. Vertikalno ubrzanje putnika pri naletu na izbočenu podlogu.....	44



## POPIS TABLICA

Tablica 1. Izvod jednadžba za vektorski, koordinatni (analitički) i prirodni postupak prilikom određivanja brzine i ubrzanja. [8] .....	16
---	----

**POPIS OZNAKA**

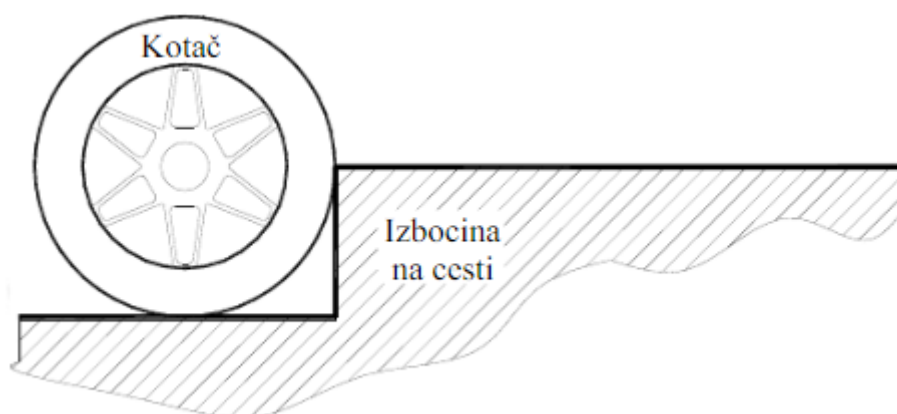
<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
$F$	$N$	Sila
$m$	$kg$	Masa
$a$	$m/s^2$	Ubrzanje
$t$	$s$	Vrijeme
$\Delta t$	$s$	Promjena vremena
$v$	$km/h$	Brzina gibanja
$c$	$N/mm$	Karakteristika opruge
$k$	-	Konstanta opruge
$\pi$	-	3.141592654
$\omega$	$rad/s$	Kutna brzina
$\varphi$	$deg$	Kut spajanja
$x$	-	Uzdužna os vozila
$y$	-	Poprečna os vozila
$z$	-	Vertikalna os vozila
$r_g$	$mm$	Radijus gume
$r_p$	$mm$	Radijus podloge
$L$	$m$	Udaljenost osovine kotača
$p_n$	$bar$	Normalni pretlak
$e$	$m$	Položaj težišta vozila
$f$	$m$	Položaj težišta putnika

## 1. UVOD - SUSTAVA OSLANJANJA CESTOVNIH VOZILA

Prilikom kretanja vozila (sa prikolicom ili bez) dolazi do vibracija prijelazom preko neravnina na cesti koje bitno utječu na osnovne osobine vozila kao šta su vučne karakteristike, stabilnost, udobnost. Lako je primijetiti da šta većom brzinom se giba, to je važniji sustav za oslanjanje koji utječe na samo vozilo. Osnovni zahtjevi koji se traže od sustava su: stabilnost, osjetljivost na vibracije, udare i oscilacije. Osjetljivost na vibracije sustava je dosta važna u pogledu stvaranja kinetičke energije svakog titraja (periodično mijenjanje određene fizikalne veličine) koji djeluje na mehanizam kretanje i dali je prijenos osjetljivosti na vibracije sa prigušenjem ili su u idealnom slučaju neprigušene. Za udare i oscilacije je bitno koliko dugo neka promjena traje nakon same promjene stanja i koliko se puta ponavljaju u vremenu ( u sustavu oslanjanja cestovnih vozila je nailazak na nepravilnost podloge). Sustav oslanjanja vozila ima zadatak da sve relevantne sile i momente koji se pojavljuju između kotača i podloge u raznim kretanjima prilikom neravnina na podlozi ublaži udarnim opterećenima kao šta su:

- 1) Mehanizam za vođenje - mehanizam za vođenje moraju osigurati prenošenje horizontalnih reaktivnih sila i reaktivnih momenata sa samog kotača na okvir te osigurati njihovo relativno pomicanje u odnosu na okvir, odnosno na neravninu
- 2) Elastični element - njihov zadatak je da pri prenošenju vertikalnih relativnih sila osiguraju njihovo što veće ublažavanje, odnosno da se ostvori njihovo što veće smanjivanje veličina udarnih opterećenja
- 3) Stabilizator - pored prethodno definiranih mehanizama i elemenata sustava, stabilizator osigurava što veću stabilnost vozila, pri njegovom prijelazu preko neravnina, krivina i udubina

Kod određenog broja sustava sva tri sistema su izvedena odvojeno : elastični element - opruga, mehanizam za vođenje – poluga, oslonac, zglobovi, stabilizator i elementi za oscilacije elastičnog elementa – amortizer. [1]



Slika 1. Kretanje kotača (gume) preko izbočina (neravnina) na podlozi. [5]

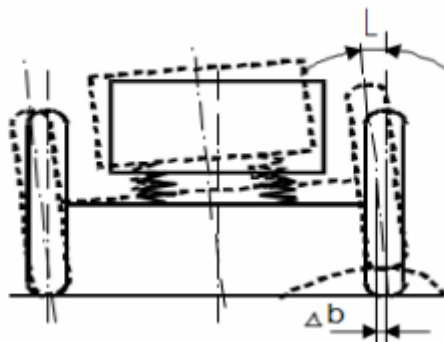
## 1.1 Karakteristike i vrste sustava oslobodjenja između 2 kotača

Sistematizacija prema dvjema bitnim karakterističnim veličinama u cilju sticanja osnovene orijentacije primjenjivih rješenja sustava oslanjanja.

Sustav oslanjanja :

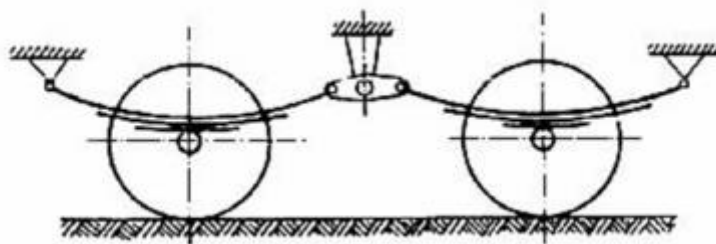
1. zavisni
2. nezavisni

Zavisni sustav je sustav kod kojeg kruta greda veže desni i lijevi kotač pri čemu se pomicanje jednog kotača u poprečnoj ravnini prenosi i na drugi kotač. Ovakva izvedba sustava je najjednostavnija ali ne pruža pravilne kinematike upravljanja. Zbog toga se zavisni sustav oslanjanja danas koriste na upravljačkim mostovima teretnih vozila. Sustavi zavisnog oslanjanja se nalaze vrlo često kod putničkih vozila, a kod ostalih vrsta vozila gotovo uvijek. Dobre osobine zavisnog sustava ovjesa su u jednostavnosti konstrukcije, niskoj proizvodnoj cijeni i činjenici da lisnati opruge mogu istovremeno obavljati funkciju elastičnog elementa i funkciju elementa za vođenje kotača. Nedostaci zavisnog sustava oslanjanja su promjena traga kotača i pojava kuta koji pogoršavaju vozne osobine i broja putnika u vozilu. Još jedan od znatnih nedostataka je povećana težina sustava za oslanjanje. [1]



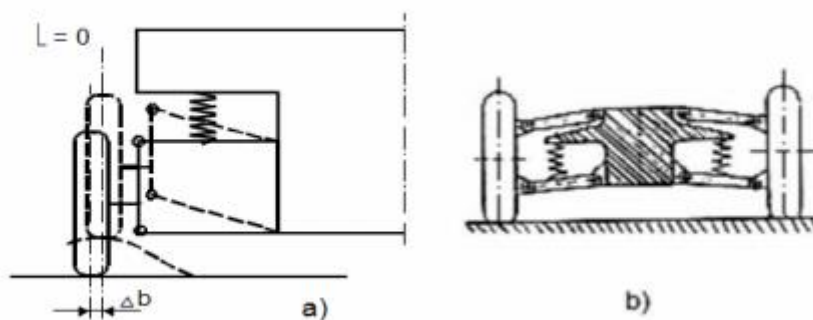
**Slika 2. Sustav zavisnog elastičnog oslanjanja. [1]**

Zavisno elastično oslanjanje sa balansirajućim susjednim kotačima parnim osovinama.



**Slika 3. Sustav zavisnog oslanjanja sa balansirajućim kotačima. [1]**

Nezavisni sustav je takav sustav kod kojega mehanizam za vođenje preuzima na sebe i funkcijskog mosta u cjelini, ukoliko se radi o prednjim kotačima. Veći se kotači povezuju sa diferencijalom preko vratila izvedenih kao zglobni prijenosnici i to uglavnom nejednakih kutnih brzina. U zavisnosti od toga u kojoj se ravnini pomiče kotač pri njegovom podizanju razlikuju se sustavi nezavisnog oslanjanja: pomicanje kotača u uzdužnoj ravni – sa jednom ili dvije podužne vodilice i pomicanjem kotača u poprečnoj ravni sa jednom poprečnom vodilicom ili sa dvije poprečne vodilice istih dužina sa pomicanjem kotača u uzdužnoj i poprečnoj ravni sa postavljenim vodilicama pod određenim kutom u odnosu na poprečnu i podužnu ravan vertikalnim pomicanjem preko vodilice. Kod nezavisnog sustava oslanjanja kod koga se pomicanje vrši u poprečnoj ravni može se zaključiti da kod vođenja kotača sa jednom poprečnom vodilicom dolazi do znatnog odstupanja traga i znatnog kuta nagiba kotača. Ovo ima za posljedicu da se ovakav način praktično i ne koristi jer daje odnose slične kao i kod zavisnog oslanjanja. [1]



**Slika 4. Sustav nezavisnog oslanjanja sa pomicanjem kotača u poprečnoj ravni sa dvije poprečne vodilice. Skica (a) i primjer izvedbe (b). [1]**

## 1.2 Elastični elementi sustava oslanjanja cestovnih vozila

Elastičnu karakteristiku sustava oslanjanja u najvećoj mjeri predodređuju elastični elementi. Kako je, sa druge strane, ova karakteristika jedan od najbitnijih pokazatelja sustava oslanjanja u cjelini, to su elastični elementi doživjeli različita konstruktivna rješenja, a danas se izrađuju od metala i nemetala. Elastični elementi od metala izrađuju se kao: lisnate opruge, zavojne opruge i torzioni štapovi. U nemetalne elastične oslonce spadaju pneumatski i hidraulični elastični elementi. Na novijim konstrukcijama vozila često se susreću dva pa i više vrsta elastičnih elemenata. U tom slučaju se govori o kombiniranim elastičnim elementima. Elastični elementi su također bitni zbog vibracija prilikom prelaženja neravnina (nepravilnost podloge) oba ili jednoga kotača šta može bitno utjecati na osjet i dinamiku same izvedbe kotača i osjeta u vozilu te je cilj tih istih vibracija dovesti na minimum, odnosno da se ne osjete.

## 1.3 Elementi za vođenje kotača

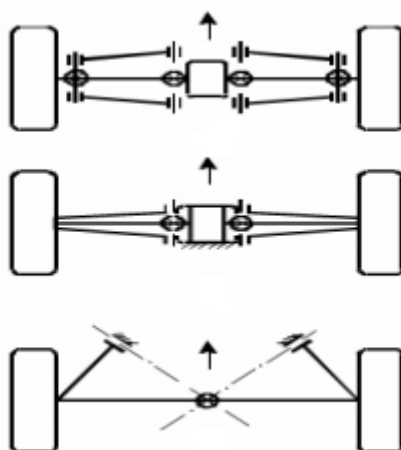
Način i karakter pomicanja kotača u odnosu na šasiju ili karoseriju bitno utječe na mogućnost upravljanja i ponašanja vozila. Kako pri vožnji u zavoju tako i pri vožnji u pravcu te vožnji pri nepravilnoj podlozi. Kinematika kotača zavisi isključivo od konstrukcije i vrste elemenata za vođenje kotača, a nezavisna je od ostalih elemenata sustava oslanjanja. Osim osnovnog zadatka da osigura povoljnu kinematiku kotača elementi za vođenje moraju osigurati prenos aktivnih i reaktivnih sila i momenata.

Kod sustava zavisnog oslanjanja pojavljuje se, pri nailasku kotača na prepreku, promjena nagiba kotača definirana kutom i promjena traga kotača za određenu veličinu. Stoga se zavisni sustav oslanjanja upravljajućih kotača koristi kod vozila koja imaju manje brzine kretanja. Najjednostavnije rješenje zavisnog sustava oslanjanja ostvareno je na principu dva lisnata gibnja. Karakter pomicanja mosta u odnosu na šasiju zavisi od karakteristika gibnja, tj. gibanje igra ulogu i elastičnog elementa i elementa za vođenje. U zavisnom sustavu oslanjanja, gdje podužne sile i reaktivne momente pored gibnja prenosi i poluga. Tangencijalne sile i odgovarajući reaktivni moment prenose se preko poluge, pa je gibanje rasterećeno. [1]

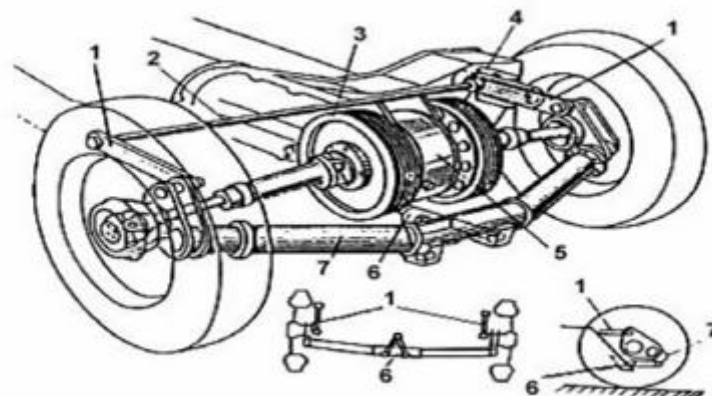
#### **1.4 Mehanizam vođenja kotača**

Dvije poprečne vodilice različitih dužine u odnosu na sustav vođenja sa dvije poluge jednakih dužina dovodi i do promjene traga i do promjene nagiba kotača. Na osnovu ovoga sasvim je razumljiva vrlo široka primjena mehanizma za vođenje kotača sa dvije paralelne vodilice različitih dužina.

Pomicanje kotača u podužnoj ravni ostavruje se mehanizmom za vođenje kotača sa uzdužnim vodilicama. U pogledu kinematike kotača ovaj način izvođenja mehanizma za vođenje kotača ima vrlo dobra svojstva. Izvjesna pomicanja se ostvaruju samo u pravcu kretanja vozila. Pomicanje kotača u uzdužnoj i poprečnoj ravni se konstruktivno rješava vodilicama postavljenim pod određenim kutom u odnosu na poprečnu ili uzdužnu ravan. Ovakvim kosim načinom postavljanja vodilice se nedostaci mehanizma sa pomicanjem kotača u uzdužnoj ili poprečnoj ravni ublažavaju, odnosno ostvaruju rješenja koja objedinjavaju u izvjesnoj mjeri dobre strane oba sustava. Zbog ovih razloga ovakvi mehanizmi za vođenje kotača se sreću na upravljačkim tako i na pogonskim kotačima. [1]



Slika 5. Mehanizam za vođenje pogonskih neupravljivih kotača. [1]



Slika 6. Mehanizam za vođenje pogonskih upravljivih kotača. [1]

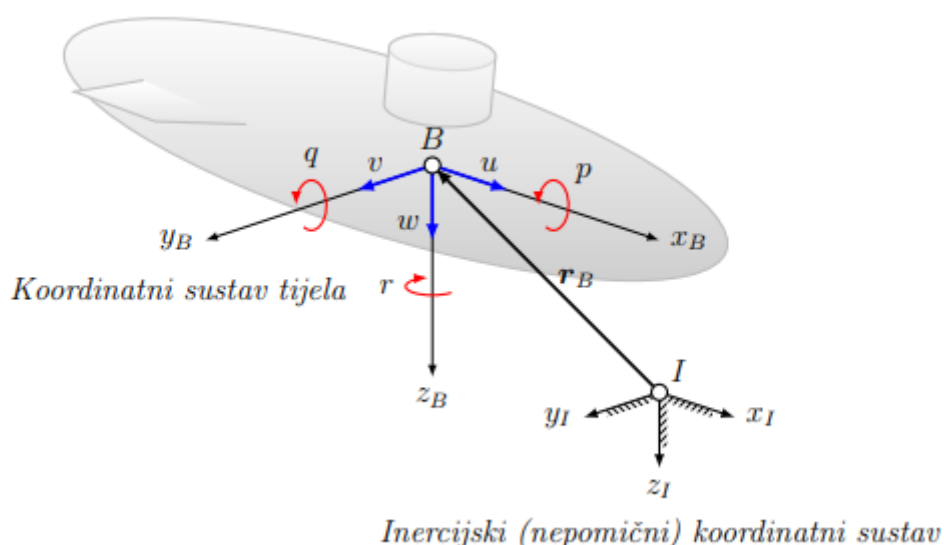
- 1- poluge
- 2- stabilizator
- 3- kočni doboš
- 4- graničnik
- 5- glavni prijenos
- 6- poluga- glavni element za vođenje
- 7- poprečna cijev



## 2. KINEMATIKA I DINAMIKA TIJELA

### 2.1 Kinematika tijela

Kinematika je dio teorijske mehanike u kome se proučavaju gibanje tijela ne uzimajući u obzir njihovu masu i sile koje djeluju na njih i njihova gibanja tijela bez obzira na uzroke gibanja. U kinematici se proučavaju geometrijska svojstva kretanja tijela, te se kinematika naziva još i geometrijom kretanja. Pod mehaničkim kretanjem podrazumijeva se promjena položaja koje tokom vremena jedno materijalno tijelo vrši u odnosu na drugo materijalno tijelo. Mehaničko kretanje tijela je moguće proučiti samo ako postoji drugo tijelo (promatrač) u odnosu na koje se vrši uspoređivanje, tzv. referentno tijelo. Pri proučavanju kretanja u kinematičkom smislu, referentno tijelo se uvijek može smatrati nepokretnim. Kada analitički opisujemo položaj tijela, referentno tijelo (promatrača) predstavi točkom B, a prostor u odnosu na koji se tijelo kreće se prikazuje prostornim koordinatnim sustavom. [8]



Slika 7. Koordinatni i inercijski sustav tijela. [4]

Kinematika gibanja povezuje pomični koordinatni sustav vezan uz tijelo s onim nepomičnim. Stanje vozila u operacijskom prostoru, odnosno njegov položaj i orijentaciju. Gdje je naznačena translacijska ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) i kutna ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) brzina tijela.

U kinematici se proučava kretanje krutih tijela, tj. tijela koja ne mijenjaju svoj oblik. Kretanje nekog tijela se prepoznava kad se prepoznava položaj svake točke tog tijela u toku vremena kretanja. Zbog toga je potrebno prvo proučiti kretanje točke, a zatim i tijela. Kinematika se dijeli na:

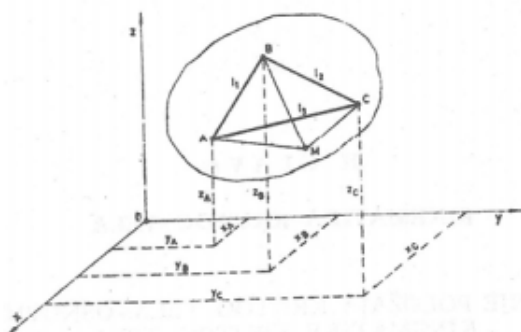
1. kinematika krutog tijela
2. kinematika točke

## 2.2 Kinematika krutog tijela

Kinematika krutog tijela u mehanici se podrazumijeva tijelo koje ne mijenja svoj geometrijski oblik. Pod položajem krutog tijela u prostoru podrazumijeva se položaj svih točaka tijela u odnosu na utvrđeni sustav referencije. Iz geometrije je poznato da je položaj krutog tijela u prostoru određen položajima tri nekolinearne točke tog tijela. Pri kretanju krutog tijela, položaj svih točaka tijela u odnosu na točke A, B i C jednoznačno je određen i stoga je za definiranje položaja krutog tijela u prostoru dovoljno da se zna položaj tri nekolinearne točke A, B i C tijela. Od tuda dolazi, da ako je poznat položaj tri nekolinearne točke krutog tijela, onda je moguće odrediti položaj točke tijela za vrijeme kretanja tijela u prostoru. Položaj slobodnog krutog tijela pri kretanju u prostoru u odnosu na proizvoljni sustav referencije određen je sa šest nezavisnih parametara. [8]

Podjela kretanja krutog tijela :

1. ravno kretanje
2. translacijsko kretanje
3. okretanje oko nepokretne osi
4. okretanje oko nepokretne točke
5. složeno kretanje
6. opće kretanje



$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = l_1^2$$

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = l_2^2$$

$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = l_3^2$$

Slika 8. Kinematika krutog tijela i izvod jednadžba. [8]

### 2.3 Kinematika točke

Kinematika točke rješava dva osnovna sustava problema, odnosno ustanovljavanje analitičkih postupaka za definiranje kretanja točke u odnosu na utvrđeni sustav referencije i određivanje na osnovu zadanog zakona kretanja, svih kinematičkih karakteristika kretanja točke u koje spadaju: krivulja točke, brzina i ubrzanje točke. Zavisnost između proizvoljnog položaja točke u prostoru i vremena određuje zakon kretanja točke, pa je osnovni zadatak kinematike točke proučavanje zakona kretanje tačke. Putanja ili krivulja točke je zamišljena neprekidna linija koju opisuje pokretna točka u prostoru. Dio putanje između dva uzastopna položaja točke naziva se prijeđeni put. Zavisno od oblika putanje točke, razlikuje se pravolinijsko i krivolinijsko kretanje točke. [8]

Za definiranje proizvoljnog krivolinijskog kretanja točke u prostoru, primjenjuju se tri postupka:

1. analitički
2. vektorski
3. prirodni

**Tablica 1. Izvod jednadžba za vektorski, koordinatni (analitički) i prirodni postupak prilikom određivanja brzine i ubrzanja. [8]**

Postupak		Zakon kretanja	Brzina	Ubrzanje
Vektorski postupak		$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$
Koordinatni postupak	Dekartove koordinate	$x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$	$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$ $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$	$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}, \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$ $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$
	Polarne koordinate	$r = r(t)$ $\varphi = \varphi(t)$	$\vec{v} = \dot{v}_r + \dot{v}_\varphi = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ $v = \sqrt{\dot{v}_r^2 + \dot{v}_\varphi^2}$	$\vec{a} = \ddot{a}_r + \ddot{a}_\varphi$ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$ $a = \sqrt{\ddot{a}_r^2 + \ddot{a}_\varphi^2}$
Prirodni postupak		$s = s(t)$	$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t = \dot{s}\vec{e}_t$ $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	$\vec{a} = \ddot{a}_t + \ddot{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$ $a = \sqrt{\ddot{a}_t^2 + \ddot{a}_n^2}$

## 2.4 Dinamika tijela

Dinamika je dio mehanike koji proučava uzroke gibanja i utjecaj sile i mase na gibanje. Osnovne zakone dinamike formirao ih je Newton 1687. godine u svom djelu „Matematički osnovi prirodne filozofije“ i ti zakoni su nazvani Newtonov-i zakoni ili zakoni kretanja. Newtonov-i zakoni su objektivni zakoni prirode, ustanovljeni na osnovu opažanja i eksperimenata kako samog Newtona tako i njegovih prethodnika.



Sir Isaac Newton Birthplace  
Born December 25, 1642

**Sir Isaac Newton (1642. – 1727.)** by Sir Godfrey Kneller, painted in 1689.



**Slika 9. Sir Isaac Newton. [7]**

**Tri Newtonova zakona glase:**

Prvi Newtonov zakon (zakon inercije) - svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok je ukupna vanjska sila djelovanja na njega jednaka nuli. Djelovanje sile na tijelo - promjena brzina tijela. Inercija je prirodno svojstvo tijela da ostaje u mirovanju ili jednolikom pravocrtnom gibanju. Masa je kvantitativna mjera inercije. Tijelo veće inercije ima veću masu. Si jedinica je  $[kg]$ .

Drugi Newtonov zakon (zakon kretanja) - ubrzanje tijela razmjerno je vanjskoj sili koja djeluje na njega i obrnuto razmjerno njegovoj masi. Smjer ubrzanja je u smjeru ukupne sile koja djeluje na tijelo. Ukupna vanjska sila djeluje na tijelo mase  $m$ . Drugi Newtonov zakon omogućava izračunavanje jačine sile. Taj zakon opisuje činjenicu da je promjena kretanja (ubrzanje) nekog tijela moguća jedino djelovanjem sile i povezuje silu koja djeluje na tijelo sa njegovom masom i ubrzanjem kojim se kreće. Sila je srazmjerna proizvodu mase tijela i njegovog ubrzanja i ima isti smjer kao i ubrzanje. Jedinica za silu je  $[N]$ .

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} [N] \quad (1)$$

Treći Newtonov zakon (zakon akcije i reakcije) – ako jedno tijelo djeluje nekom silom na drugo tijelo, onda i drugo tijelo djeluje silom jednakog iznosa ali suprotnog smjera na prvo tijelo. Treba nadodati da se te sile uzajamno ne poništavaju, već djeluju u različitim referentnim sustavima, vezanim za tijelo koje je načinilo akciju i tijelo koje je reagiralo.

Dinamiku možemo podijeliti na dva djela:

1. dinamiku materijalne točke (ako se dimenzije tijela pri kretanju mogu zanemariti, onda kažemo da je u pitanju materijalna točka, koja se razlikuje od geometrijske točke time što ima konačnu masu)
2. dinamiku sustava materijalnih točaka i krutog tijela (pod materijalnim sustavom podrazumijeva se sustav materijalnih točaka, koje zahvaljujući postojanju veza između točaka ne mogu se kretati nezavisno jedna od druge. Kruto tijelo je ono koje pod djelovanjem sila ne mijenja svoj oblik i dimenzije. [8])

## 2.5 Dinamika materijalne točke

Dinamika materijalne točke podrazumijeva materijalno tijelo određene konačne mase, a malih dimenzija, tako da se može smatrati da je cijelo ukupna masa koncentrirana u jednoj geometrijskoj točki. Zadatak dinamike točke je postavljanje diferencijalnih jednadžba kretanja i njihovo integriranje. Diferencijalne jednadžbe kretanja materijale točke izvode se iz osnovnog zakona dinamike - II Newtonov-og zakona. Da bi se proučavanje kretanja materijalne točke pojednostavilo i da bi se u pojedinim tehničkim problemima odredile samo određene veličine, kao npr. brzina u određenom položaju ili brzina u određenom vremenskom intervalu, a da se pri tome problem kretanja ne proučava u cjelini, izvedeni su opći zakoni dinamike točke. Njihovom primjenom izbjegava se integriranje diferencijalnih jednadžbi kretanja. Opći zakoni povezuju osnovne dinamičke veličine koje karakteriziraju kretanje (kinetičku energiju, količinu kretanja, moment količine kretanja) sa veličinama koje karakteriziraju djelovanje sila (rad sile, impuls sile, moment sile). [8]

Osnovni zakoni dinamike materijalne točke:

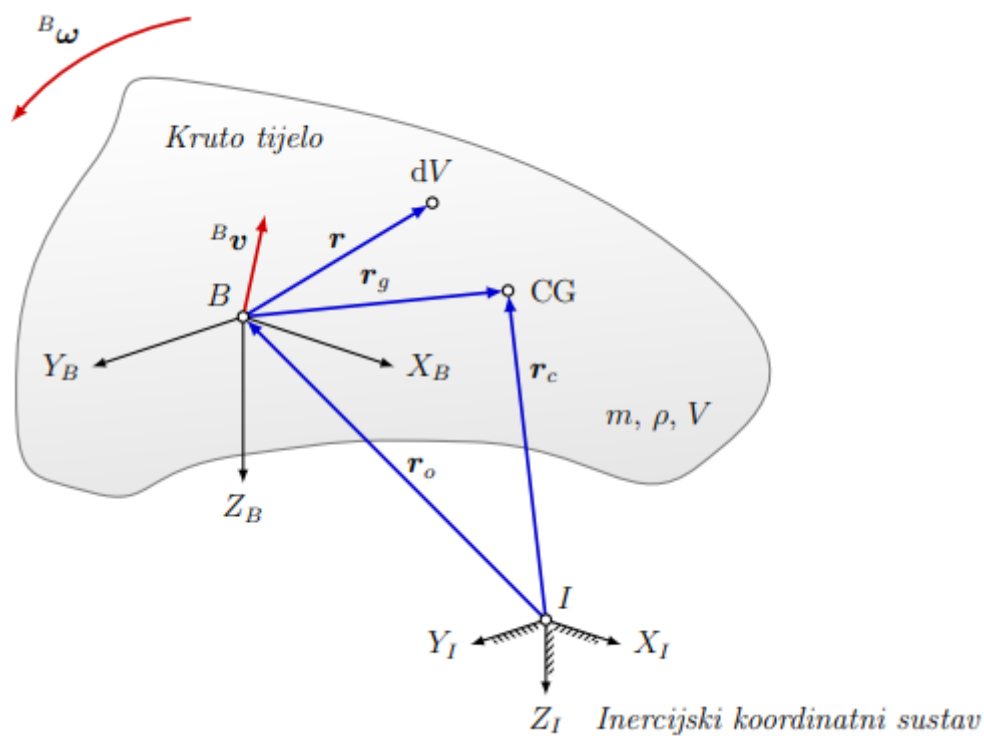
1. zakon o promjeni kinetičke energije materijalne točke
2. zakon o promjeni količine kretanja
3. zakon o promjeni momenata količine kretanja

## 2.6 Dinamika sustava materijalnih točaka i krutog tijela

Materijalni sustav (sustav materijalnih točaka) podrazumijeva konačan broj materijalnih točaka koje su na određeni način povezane. Analiza sustava materijalnih točaka je veoma važna jer u prirodi i tehnici postoje kretanja u kojim sudjeluje više tijela, a ta tijela možemo idealizirati materijalnim točkama koje određuju materijalni sustav. Diskretan materijalni sustav određuju materijalne točke koje se nalaze na međusobno konačnim razmacima. Ako su mase neprekidno raspoređene u nekom dijelu prostora, tada točaka ima beskonačno mnogo. Ovlast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja materijalno tijelo. Materijalni sustav može biti određen, ne samo od skupa materijalnih točaka, već i od skupa materijalnih tijela. [8]

Sve sile koje djeluju na točke sustava mogu se podijeliti:

1. vanjske sile – sile u kojima materijalne točke ili tijela ne ulaze u sustav, a djeluju na materijalne točke
2. unutrašnje sile – sile u kojima djeluju jedna na drugu na materijale točke (tijela) promatranog sustava



Slika 10. Pomični i fiksni koordinatni sustav, određene točke i brzine na krutom tijelu u pokretu. [4]

### 3. KINEMATIKA I DINAMIKA CESTOVNIH VOZILA

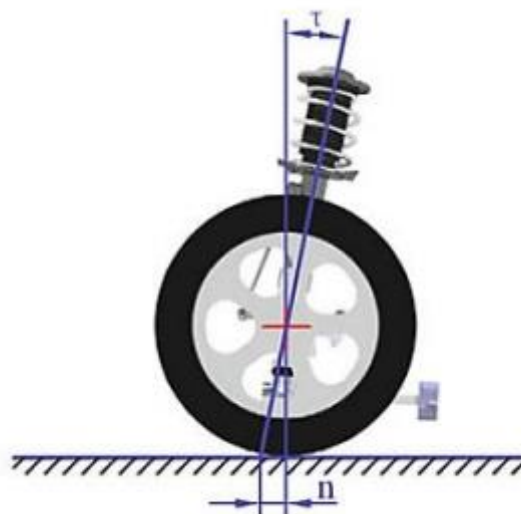
#### 3.1 Kinematika cestovnih vozila

Sustav ovjesa općenito je složen. Velik je broj parametara koji utječu na vozilo te mijenjanje karakteristika pojedinog parametra može lošije ili bolje utjecati na ponašanje vozila, ali i na njegovo ponašanje prilikom nailaska na nepravilnost na podlozi i pod djelovanjem vibracija. Promjena karakteristika parametara utječe na kinematiku ovjesa te samu dinamiku vozila. Glavni zahtjev na ovjes je da mora osigurati kontinuirani kontakt gume s podlogom jer jedino tada je moguće ostvariti kontroliranu vožnju – ubrzanje, usporenje, skretanje, prijelaz preko nepravilnosti, konstantnu vožnju. Ovjes je neprestano izložen raznim promjenama opterećenja i pobudama, odnosno vibracijama. Sukladno situacijama koje se javljaju prilikom vožnje iz čega se može zaključiti o njegova važnost za vozilo pri razradi i konstrukciji te djelovanju. Potrebno je osigurati što je manje moguće akceleracije, vibracije i opterećenja koja se prenose na ostatak vozila. Zbog načina vožnje i konfiguracije terena, iznosi opterećenja, vibracija, brzina i mase samih kotača, ovjes je dosta važan i značajan kod cestovnih vozila. Određivanjem položaja karakterističnih točaka, a time i određivanjem parametara kinematikeovjesa, utvrđuje se geometrija kotača. Prikaz veličina za gibanje kotača te veličine vezane za cijelo vozilo koja utječu na kinematiku. Mehaničko djelovanje je udaljenost između osi zakretanja kotača i središte doticajne površine gume. [6]

Pozitivno i negativno vođenje:

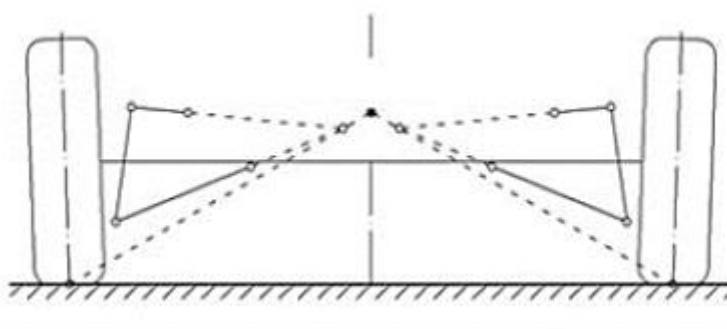
1. pozitivno mehaničko vođenje kod kojega se sjecište nalazi ispred točke dodira s podlogom
2. negativno mehaničko vođenje kod kojega se sjecište nalazi iza točke dodira s podlogom





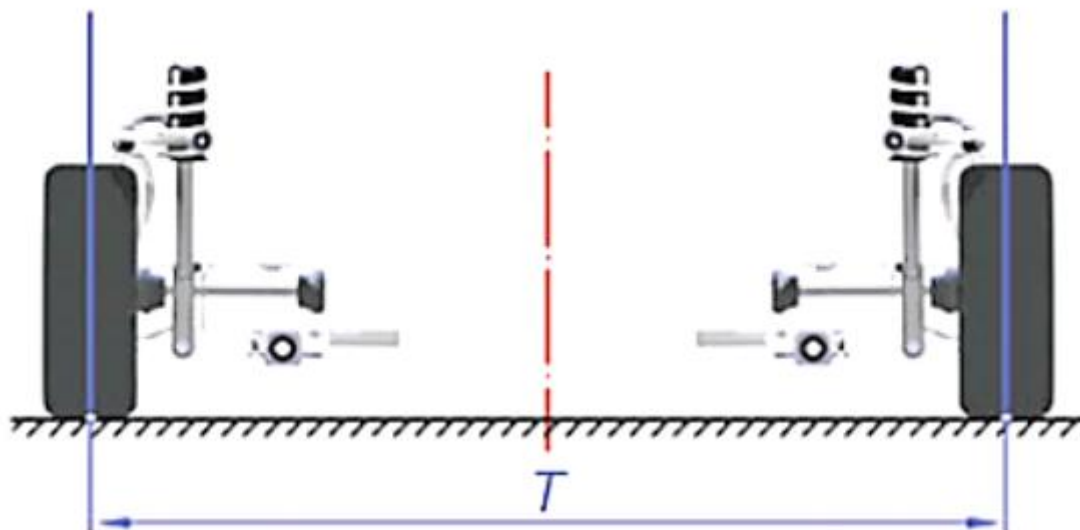
**Slika 11. Mehaničko vođenje i uzdužna nagibna os. [6]**

Središte valjanja je točka u poprečnoj ravnini koja prolazi kroz simetralu osovine oko koje se valja ovješena masa pod utjecajem centrifugalne sile. Položaj točke je trenutni, mijenja se tijekom sabijanja i rastezanja opruge. Kretanjem preko neravnina kotačem na podlozi, opruga tu ima jako veliku funkciju i značajku koja ovisi o ublažavanju udarca (zavisno o brzini i masi kotača), tj. vibracijama uzrokovana nepravilnosti. Kroz središte, bočne sile s dodirom gume i podloge se prenose na šasiju. Takvo se sjecište naziva trenutno središte rotacije (dodira). Presjecište linije i simetrale vozila određuje točku koja se zove središte valjanja. [6]



**Slika 12. Središte valjanja. [6]**

Trag kotača je udaljenost u ravnini između sredine dodirnih površina kotača na jednoj osovini (prednjih ili stražnjih).



Slika 13. Trag kotača. [6]

### 3.2 Dinamika cestovnih vozila

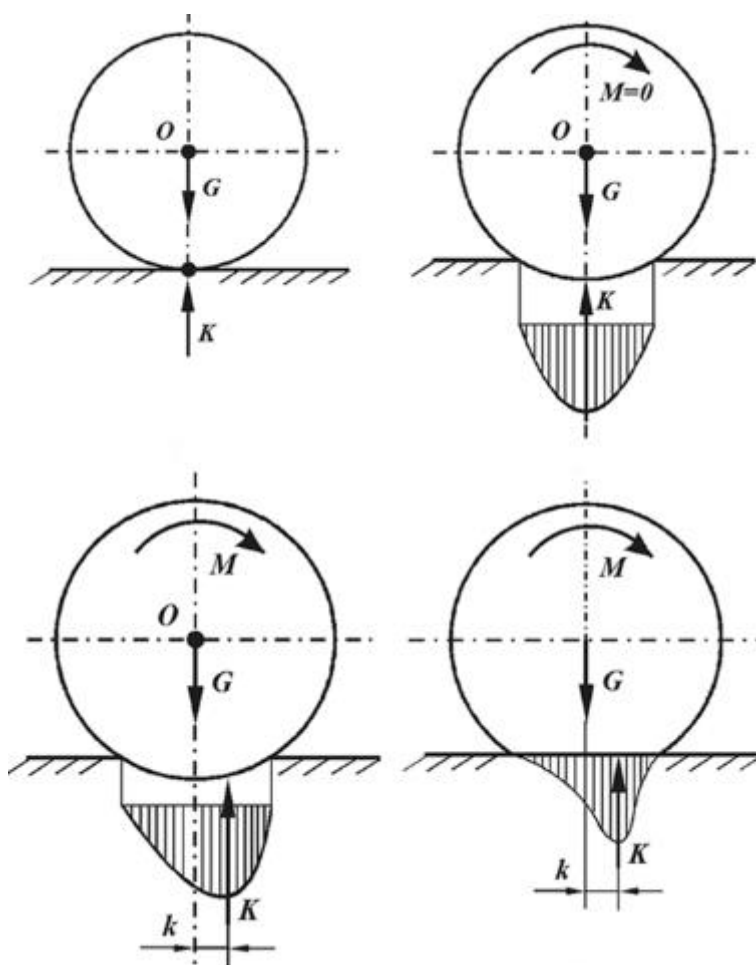
Dinamika vozila opisuje djelovanje sila i momenata na vozilo i gibanje vozila pod djelovanjem tih sila i momenata, odnosno proučava sile i gibanja vozila. Vozilo se giba složeno, stoga je njegovo gibanje podijeljeno na 3 smjera (uzdužna os, poprečna os, vertikalna os) s pripadajućim translacijama i rotacijama.

Određene sile i momenti koja djeluju na vozilo svrstane su u tri grupe :

1. kontakt između podloge i gume (uzdužna sila, bočna sila, vertikalna sila, moment stabilizacije)
2. inercijske i gravitacijske (centrifugalna sila, težina vozila)
3. aerodinamičko opterećenje

Ovješena masa je dio mase koji se oslanja na opruge vozila. Ovješena masa sastoji se od: šasije/karoserijske, tereta (vozač), motora i svih ostalih dijelova oslonjenih na opruge koje mijenjaju svoj položaj u odnosu na kretanje. Neovješena masa je dio mase koji se ne oslanja na opruge vozila. Neovješena masa sastoji se od: pneumatika, kotača, nosača kotača, ležaja kotača, kočnica (ako je na kotaču) te oko mase vodilica kotača, osovine kotača, opruga i amortizera. Što je neovješena masa manja, to je manji utjecaj vibracija kotača na ovješenu masu (karoserijsku/šasiju) te su manje oscilacije samog kotača.

Zbog toga je oprugama (nelinearnim ili linearnim) i amortizerima lakše osigurati kontinuiran kontakt i dodir između kotača i podloge. Krutost ovjesa je vertikalna sila po jedinici vertikalnog pomaka točke na kontaktu gume i podloge u odnosu na šasiju. Za beskonačno krutu gume i krutost kotača imale bi iste vrijednosti. Krutost gume je bitna također u pogledu vibracija i njezinih samih djelovanja na nju, te kako se prenosi na ostatak vozila (šasiju). Za realnu gumu, krutost vožnje uvijek je manja od krutosti kotača. Krutost šasije govori o tome koliko se šasija savija ili uvija za vrijeme vožnje i njezino odnos podnošenja vibracija uzrokovana nepravilnostima na podlogi. Šasiju se može zamisliti kao jednu veliku oprugu koja spaja prednji i stražnji ovjes. Krutost šasije mora biti dovoljno velika i zadovoljavajuća kako se vozilo ne bi ponašalo poput mekše opruge, tj. da ne bi oscilacije bile bi prevelike i vožnja bi zbog toga bila neugodna i nestabilna. Mala krutost šasije bi prenosila prevelika opterećenja i vibracije na ovjes vozila. Krutost šasije može se povećati dodavanjem poprečnih i dijagonalnih elmenata. [6]



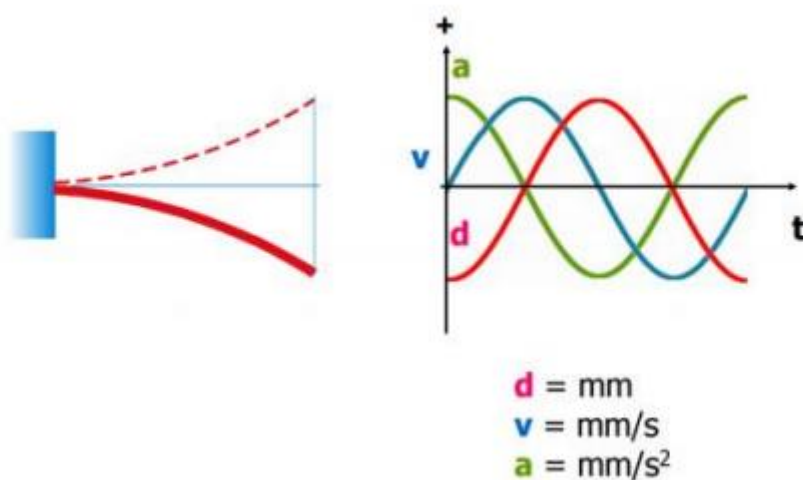
**Slika 14. Prikaz deformacije kotača nailaskom na određene nepravilnost na podlozi. [9]**

Kad se tvrdi kotač kotrlja po tvrdoj podlozi, tada nema deformacija u kontaktu te je kontaktna površina mala, a komponenta težine ima reakciju podloge, istog iznosa suprotnog smjera, u istoj osi. Ako postoje velike deformacije u kontaktu gume i asfalta, neovisno je li riječ o tvrdom kotaču/mekanoj podlozi (prvi red desno i drugi red lijevo) ili postoji mekani kotač/tvrdu podlogu (drugi red desno) kontaktna površina postaje velika i raspored pritiska gume na asfaltnu podlogu poprima određeni oblik. Nailaskom kotačem određenom brzinom na nepravilnost, dolazi do vibracija kotača koja se prenose na šasiju te ih je potrebno dovesti na prihvatljivu vrijednost. [9]

## 4. VIBRACIJE

### 4.1 Teorijske osnove analize vibracija

Vibracije su mehanički oscilacije sustava (konstrukcija, strojeva, vozila) s malim amplitudama, dok su oscilacije općenito periodično gibanje bilo koje amplitude. Katkad se upotrebljava i naziv titranje za vibracije napete strune, štapa, membrane i promjene stanja položaja. Proučavanje mehaničkih vibracija ima veliko značenje u svim granama tehnike, npr. u strojarstvu, građevinarstvu, brodogradnji, gradnji zrakoplova, gdje se periodično gibanje tijela ili njihovih dijelova gotovo uvijek zbiva s malim amplitudama. Vibracije se proučavaju unutar grane mehanike koja se naziva teorija vibracija ili teorija oscilacija. U strojevima, vozilima i općenito u konstrukcijama uzrokuju poremećaje u radu i lomove te nepotrebno troše mehaničku energiju. S druge strane, vibracije su katkad i korisne jer su osnova nekih mehaničkih i tehnoloških postupaka. Mehaničke vibracije jesu ponovljena gibanja mehaničkih sustava oko nekog srednjeg, najčešće ravnotežnog položaja. Jednostavan primjer vibracija jest gibanje tijela mase  $m$  (gume) koje se giba i nailazi na nepravilnost na podlozi te svojim udaranjem o nepravilnu podlogu izaziva reakciju stvaranja vibracija koja se dalje prenosi na karoseriju/šasiju. Mjere vibracija koje se mogu direktno mjeriti su brzina, pomak i ubrzanje te iz tih mjera mogu se dobiti ostale vibracijske karakteristike kao prigušenje i frekvencija. [2]



Slika 15. Prikaz temeljnih vibracijskih veličina. [3]

Gdje su :

$d$  – Fazni pomak

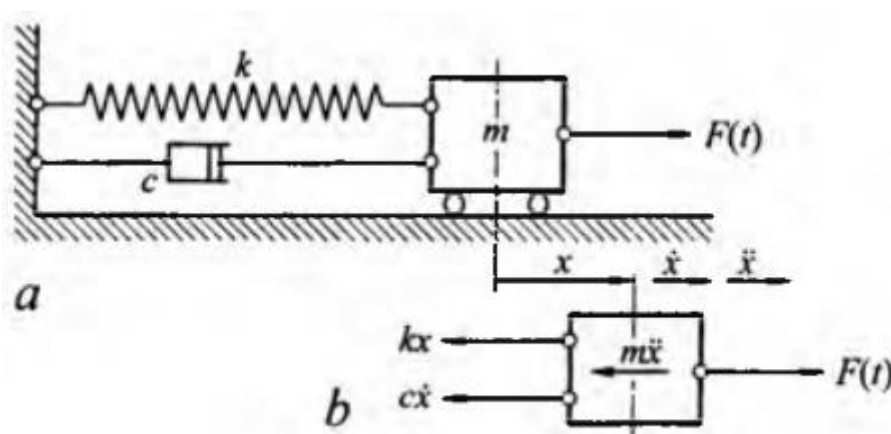
$v$  – Vibracijska brzina

$a$  – Vibracijsko ubrzanje

Krutom se tijelu za vrijeme vibriranja određuje položaj pomoću koordinata položaja. Najmanji broj međusobno nezavisnih koordinata kojima su određeni položaji svih tijela u sustavu koji vibrira jesu stupnjevi slobode. Položaj jednog tijela općenito je određen sa šest nezavisnih koordinata, pa je to najveći broj stupnjeva slobode s kojima može vibrirati kruto tijelo. S toliko stupnjeva slobode vibrira npr. karoserija automobila, koja se, vezana na osovine kotača pomoću elastičnih i prigušenih članova, promatra kao kruto tijelo. U mehaničkim sustavima u kojima svako tijelo ima jedan stupanj slobode, i to translacijski, tijela se promatraju kao čestice odgovarajućih masa. Sustav može sadržavati i tijela koja vibriraju na rotacijski način (npr. remenice, kotači vozila), kojima je tada umjesto mase odgovarajuća veličina moment tromosti oko osi rotacije, a položaj im je određen kutnom koordinatom. Mehanički sustavi u kojima se tijela promatraju kao da su kruta vibriraju s jednim, dva ili s više stupnjeva slobode, no taj je broj uvijek konačan (vibracije diskretnih sustava). [2]

## 4.2 Vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja

Jednostavan model vibracijskog sustava s jednim stupnjem slobode sastoji se od tijela mase  $m$  koje klizi po podlozi bez trenja. Tijelo je za podlogu vezano oprugom konstante  $k$  i prigušivačem koji ima faktor prigušenja  $c$ .



Slika 16. Vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode. [2]

Na slici 16. se vidi diferencijalna jednačina gibanja pri slobodnim prigušnim vibracijama sustava s jednim stupnjom slobode koja glasi:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

m - masa

c - faktor prigušenja

k - konstanta opruge (konstanta krutost)

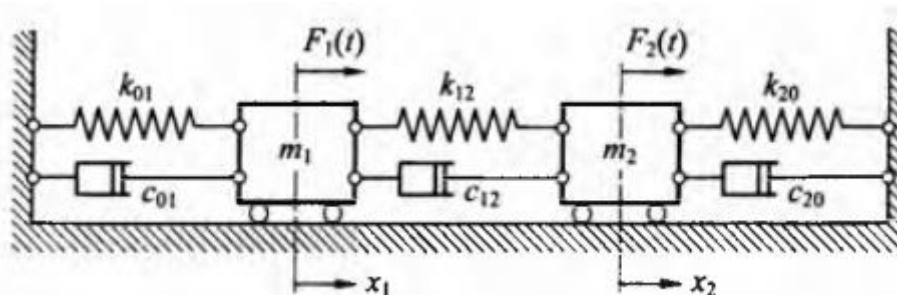
x - produljenje opruge

Ako na sustav djeluje poremećajna sila i ako je faktor prigušenja (koeficijent) c zanemarivo malen (slobodne vibracije bez prigušenja), gornja jednačina glasi:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3)$$

### 4.3 Vibracijski sustav s dva stupnja slobode gibanja

Kada je položaj jednog tijela određen s dva podatka (koordinate) ili kada se sustav sastoji od dvije koncentrirane mase od kojih je svakoj položaj određen jednim podatkom (npr. translacijskim pomakom  $y$  ili kutom  $\varphi$ ) sustav ima dva stupnja slobode gibanja. Jednačbe gibanja takvih sustava mogu se postaviti na klasičan način ili primjenom Lagrangeovih jednačbi druge. [2]



Slika 17. Vibracijski sustav s dva stupnja slobode gibanja. [2]

Izraz sa slike 18. zapis u matričkom obliku glasi :

$$[m][\ddot{x}] + [c][\dot{x}] + [k][x] = [F] \quad (4)$$

$[m]$ ,  $[c]$ ,  $[k]$  – matrice tromosti, prigušenja, krutosti koje su kvadratne i simetrične, a imaju sljedeće matrice:

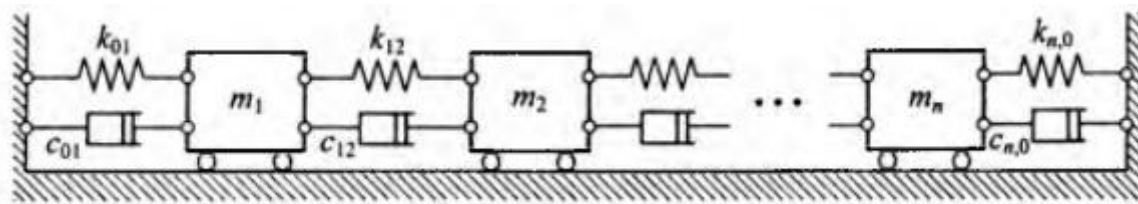
$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{01} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} + c_{20} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} + k_{20} \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 4.4 Vibracijski sustav s konačnim brojem stupnjeva slobode gibanja

Vibracijskom sustavu koji ima  $n$  stupnjeva slobode odgovara isto toliki broj jednadžbi gibanja. Za uzdužni sustav slike 19. odgovarajuće jednadžbe glase:



Slika 18. Vibracijski sustav s konačnim brojem stupnja slobode gibanja. [2]

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_{01} + c_{12}) \dot{x}_1 - c_{12} \dot{x}_2 + (k_{01} + k_{12}) x_1 - k_{12} x_2 = F_2(t) \quad (8)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_{12} \dot{x}_1 + (c_{12} + c_{23}) \dot{x}_2 - c_{23} \dot{x}_3 - k_{12} x_1 + (k_{12} + k_{23}) x_2 - k_{23} x_3 = F_2(t) \quad (9)$$

$$m_n \ddot{x}_n - c_{n-1,n} \dot{x}_{n-1} + (c_{n-1,n} + c_{n,0}) \dot{x}_n - k_n \ddot{x}_{n-1} + (k_{n-1,n} + k_{n,0}) x_n = F_n(t) \quad (10)$$



## 5. NUMERIČKE METODE RJEŠAVANJA KRUTIH TIJELA

### 5.1 Eksplicitna integracija

Jedna od numeričkih metoda integracije je eksplicitna metoda. Sastoji se o toga da se predvidi stanje u trenutku  $t + \Delta t$  na osnovu poznatog stanja u trenutku  $t$ . U metodi eksplicitne integracije nije potrebo računati matricu krutosti. Na prvu se to može činiti dobro, no upravo je to razlog samo uvjetne stabilnosti ove metode. Kako bi se zadovoljio uvjet stabilnosti eksplicitne metode, korak integracije mora biti dovoljno mali što diktira veličina najmanjeg konačnog elementa. Najčešće se koristi za kratke analize (npr. udarac, sudar, nepravilnosti i slično). Kada se govori o integraciji jednadžbi gibanja za sustave diskretizirane konačnim elementima, među najpoznatijim eksplicitnim metodama integracije je metoda centralnih razlika.[12] Aproksimacija prve i druge derivacije pomaka po vremenu se metodom središnjih razlika mogu pisati u obliku:

$$\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t} \left( \dot{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} - \dot{u}^{t-\frac{1}{2}\Delta t} \right) \quad (11)$$

$$\dot{u}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (u^{t+\Delta t} - u^t) \quad (12)$$

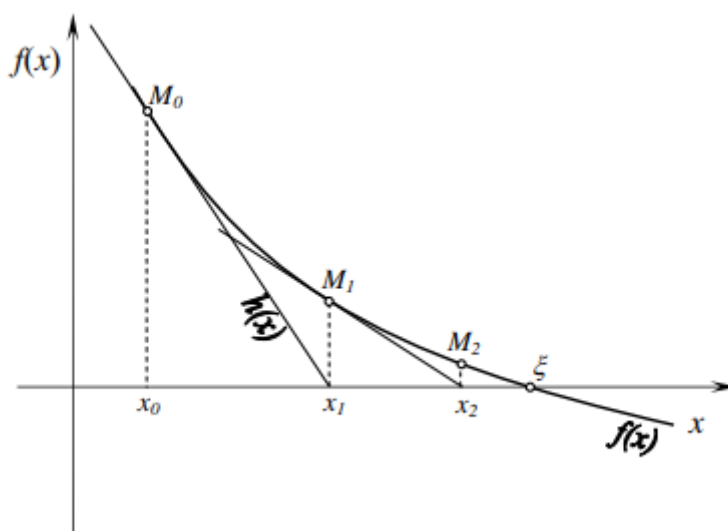
### 5.2 Metoda centralnih razlika

Ova metoda najčešće se koristi kada se može izraziti dijagonalna matrica masa i time efikasno, uz relativno mali korak diskretizacije provoditi integracija uz zanemarivanje prigušenja. Kod metode centralnih razlika ne treba računati matrica krutosti čitavog sklopa konačnih elemenata, jer se može rješavati na nivou elementa, čime se efektivno mogu rješavati sustavi velikog reda. Nedostatak eksplicitne metode je to, da bi se postigla stabilnost rješenja, korak integracije mora biti dovoljno malen, tj. mora biti zadovoljen određen uvjet gdje je  $T_n$  – najmanji period oscilacije sklopa konačnih elemenata, a  $n$ - broj stupnjeva slobode. Metoda centralnih razlika nema nikakvo numeričko prigušenje što pri odabiru jako malog može rezultirati velikim oscilacijama u vremenskoj domeni zbog obuhvaćanja fenomena pojave jako visokih frekvencija.[12] Prikaz jednadžbe glasi:

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (13)$$

### 5.3 Newtonova metoda

Newtonova metoda je jedna od najpoznatija metoda za numeričko rješavanje jednačja. Newtonova metoda je metoda drugog reda točnosti, što u praksi znači da se sa svakom integracijom udvostručava broj značajnih rješenja. Ipak, veoma je važno da početna aproksimacija bude što bliže rješenju, pošto se može dogoditi da procedura konvergira prema nekom drugom korijenu ili da divergira. Ipak, prilikom korištenja Newtonove metode treba imati na umu da je za neke funkcije vrlo teško analitički izračunati prvi izvod, a za neke funkcije to u opće nije moguće. Ova metoda je originalno predstavljena kao bezuvjetno stabilna integracijska shema s konstantnim prosječnim ubrzanjem i u tom slučaju je  $\alpha = 1/4$  te  $\delta = 1/2$ . Ukoliko nije moguć prvi izvod Newtonove metode, u takvim slučajevima koriste se neke druge metode, kao što je modifikovana Newtonova metoda.



Slika 19. Grafički prikaz Newtonove metode. [10]

### 5.4 Eulerova metoda

Eulerova metoda predstavlja najjednostavniju metodu za rješavanje inicijalnog problema oblika:

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0 \quad (14)$$

Eulerovu metodu je metoda reda 1, jer se u donjoj jednačbi pojavljuje prva potencija od  $h$ . To u ujedino znači da je Eulerova metoda nije jako točna i sporo konvergira prema rješenju, a oblik jednačbe je:

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - f(x, y(x)) = O(h) \quad (15)$$

Razlikujemo implicitnu i eksplicitnu Eulerovu metodu.

### 1) Implicitna Eulerova metoda

Formula za implicitnu Eulerovu metodu se dobiva ako se promatra točka sa indeksom  $(n + 1)$  i u njoj primijeni formula za diferenciranje unazad, pa se dobije konačan gotovi oblik implicitne Eulerove metode:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (16)$$

Osnovne karakteristike implicitne Eulerove metode su:

- potrebna je samo jedna poznata točka, pa metoda spada u jednokoračne metode
- potrebno je samo jedno izračunavanje izvoda funkcije po koraku
- vrijednost  $y_{n+1}$  zavisi od vrijednosti  $f_{n+1}$ , pa je metoda implicitna
- može se pokazati da je greška izračunavanja vrijednosti  $y_{n+1}$  drugog reda, pa je greška koja se akumulira nakon  $N$  koraka, prvog reda

### 2) Eksplicitna Eulerova metoda

Formula za eksplicitnu Eulerovu metodu se može jednostavno dobiti iz jednadžbe Cauchyjevog problema, ako se prvi izvod aproksimira pomoću formule za diferenciranje unaprijed, pa se dobije konačni gotovi oblik eksplicitne Eulerove metode:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad (17)$$

Osnovne karakteristike eksplicitne Eulerove metode su:

- potrebna je samo jedna poznata točka, pa metoda spada u jednokoračne metode (metode jedne poznate točke)
- potrebno je samo jedno izračunavanje izvoda funkcije po koraku
- metoda je eksplicitna, jer  $f_n = f(t_n, y_n)$  ne zavisi od  $y_{n+1}$
- može se pokazati da je greška izračunavanja vrijednosti  $y_{n+1}$  drugog reda (ova greška se pravi u svakom iterativnom koraku i naziva se lokalna greška), pa je greška koja se akumulira nakon  $N$  koraka, (tzv. globalna greška) prvog reda [10]

## 5.5 Numerička metoda rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednačina

Mnogi problemi u praksi uključuju nekoliko zavisno (promjenljivih), od kojih je svaka funkcija jedne te iste nezavisne (promjenljive) i jedne ili više zavisnih (promjenljivih), i od kojih se svaka može opisati običnom diferencijalnom jednačinom. Tako se dobiva sustav običnih diferencijalnih jednačina, kao oblik sustava prvog reda sljedećeg zapisa:

$$y' = f(t, y, z) \quad (18)$$

$$z' = f(t, y, z) \quad (19)$$

Diferencijalne jednačine višeg reda mogu se svesti u sustav diferencijalnih jednačina prvog reda. Na taj način, obje vrste problema se mogu numerički riješiti na isti način, tj. korištenjem istih metoda. Svaka od diferencijalnih jednačina u sustavu jednačina se može riješiti kao pojedinačna diferencijalna jednačina koristeći različite numeričke metode. Jedina razlika je u tome što se mora voditi posebna pažnja o redosljedu računanja. Također, veličina koraka mora biti jednaka za sve jednačine. [10]

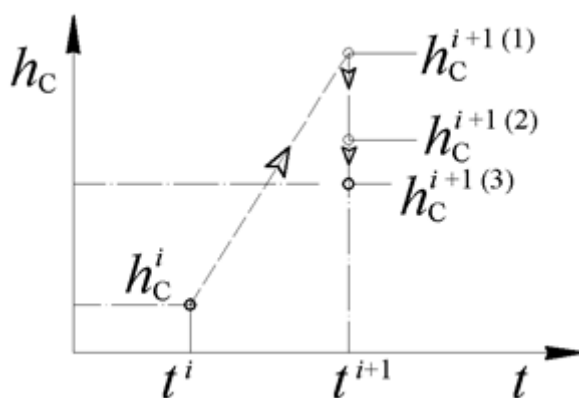
## 5.6 Metoda pretpostavljenog rješenja

Jedna od najstarijih metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednačina je metoda pretpostavljenog rješenja. U toj metodi pretpostavlja se oblik rješenja diferencijalne jednačine prema očekivanom obliku, parametrima jednačine i fizici problema. U jednokoračnim metodama je cilj pronaći dovoljno dobro rješenje, za primjerice pomak, nakon jednog vremenskog koraka koristeći podatke iz trenutnog, dok se u višekoračnim metodama koriste podaci iz nekoliko prethodnih koraka, što doprinosi točnosti i stabilnosti metode. Višekoračne metode imaju značajnu prednost u slučaju računanja vibracijskog odziva sustava u mnogo ciklusa, jer se greška u svakom koraku može pribrajati grešci prethodnog koraka, ako metoda nema dobro postavljenu kontrolu greške. U primjeru nailaska vozila na prepreku očekivano je nekoliko (manje od 5 u većini slučajeva) prigušenih ciklusa vibracija, stoga mogu zadovoljiti i jednokoračne metode jer i uz veću nakupljenu grešku još uvijek imamo kao rješenje proračuna prihvatljivo velika greška jer im je prednost jednostavnog i manji broj operacija računanja po vremenskom koraku.

U ovom primjeru će biti korištena metoda pretpostavljenog rješenja vrlo sličog principa kao i metoda konačnih elemenata. U metodi konačnih elemenata, koja rješava probleme s prostornim derivacijama, primjenjuje se pretpostavljeno rješenje po konačnom elementu, uz zadovoljavanje rubnih uvjeta. Kontrola greške je u integralnom smislu. Kolokacijske metode su jednostavnije računski od integralnih jer zahtijevaju manje operacija za isti broj jednažbi, pa će se ovdje koristiti kolokacijska metoda, tj. zadovoljavanje uvjeta ravnoteže u konačnom broju točaka u vremenu. Metoda se temelji na dijeljenju ukupnog vremena analize (vremenu u kojem se izračunava vibracijski odziv) na unaprijed određene „dijelove“ ili „elemente“ vremena, kojima je trajanje određeno pretpostavljenim rješenjem i rubnim uvjetima, ili uvjetima neprekidnosti. Opravdanost i kvaliteta takve metode je provjerena na sličnom problemu vibracijskog odziva krutog tijela za koje je poznato analitičko rješenje. Ovdje nije prikazana ta provjera radi kratkoće prikaza, sažetosti. [11]

## 5.7 Konvergencija rješenja u svakom vremenskom koraku

Za rješavanje vibracijskog odziva je kao najjednostavnija metoda odabrana eksplicitna Eulerova metoda. U svakom vremenskom koraku proračun je proveden iterativno, po principu prediktor – korektor. To znači da je za prediktor, predviđanje promjene neke veličine, npr. pomaka središta osovine klackalice, uzeta promjena te veličine uslijed konstantne promjene položaja vozila stalnom brzinom gibanja  $v_x$ , dodana na prethodno konvergirani položaj. U idućem koraku, ispravljanju, tj. korektor koraku, izračunate su ponovno. [12]

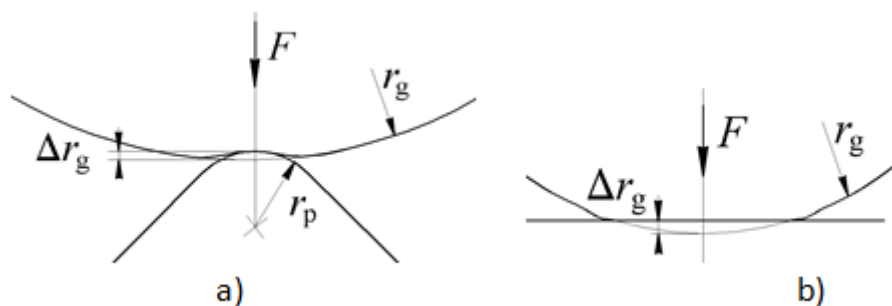


Slika 20. Konvergencija rješenja za položaj u vremenskom koraku  $i+1$ .

## 6. NUMERIČKI PRORAČUN

### 6.1 Određivanje karakteristike pritiska gume na podlogu

Karakteristika sila – pomak za gumu pri nominalnom pretlaku od 2 bara je određena pritiskanjem gume na odabranu geometriju podloge koja predstavlja najčešći oblik ruba na površinama vožnje opisanog vozila (prikolice) i mjerenjem promjene radijusa (udubljenja) pri određenoj sili. Guma koja je korištena pri mjerenju je 20x1,75“ za slučaj pritiska na izbočenu podlogu, kako je prikazano na slici 1. a), te 12x1,75“ za slučaj pritiska na ravnu podlogu, kako je prikazano na slici 1. b). Za slučaj prema slici 1. a) geometrija podloge je parametara  $r_p = 10$  mm i kuta između stijenki  $90^\circ$  s radijusom gume je  $r_g = 251$  mm, a za slučaj prema slici 1. b) radijus gume je  $r_g = 151$  mm. Rezultati mjerenja prikazani su u dijagramu na slici 23. i 24.



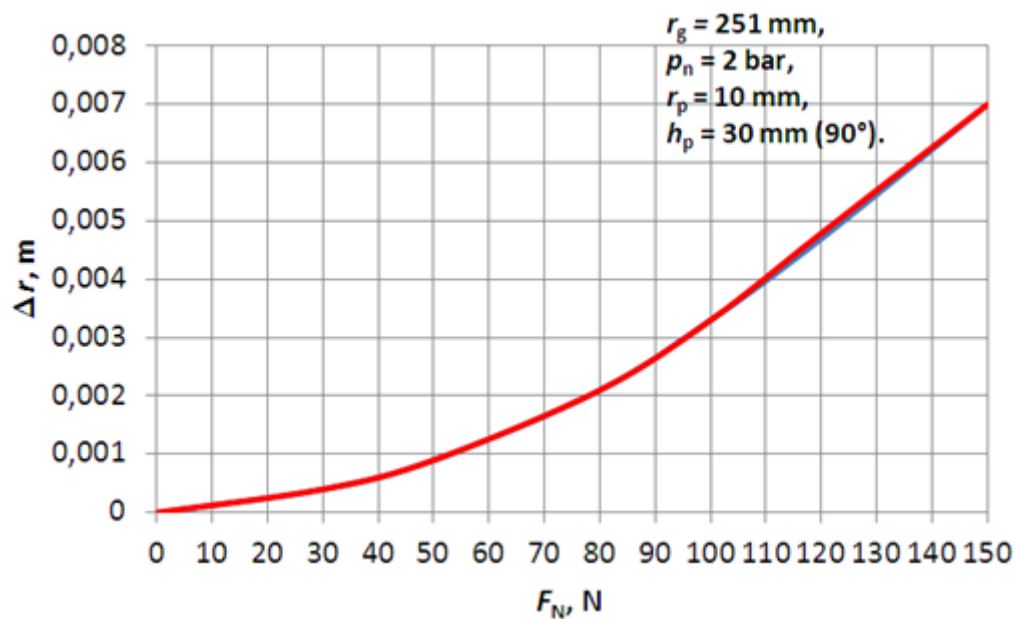
**Slika 21. Određivanje karakteristike pritiskanja kotača:  
a) kotač na izbočenu podlogu, b) kotač na ravnu podlogu.**

Na slici 22. je prikazana promjena geometrije mjerene gume 20x1,75“ na prepreci, odnosno na izbočenoj podlozi.

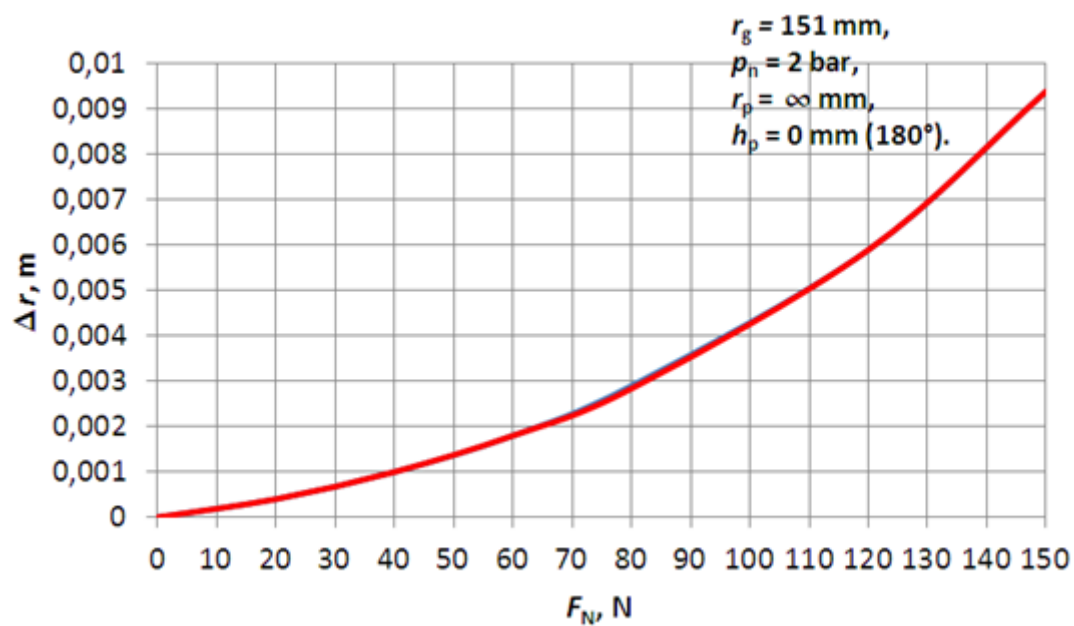


**Slika 22. Mjerenje promjene geometrije gume 20x1.75" na izbočenoj podlozi.**

Na slici 23. prikazana je promjena geometrije gume 20 x 1,75“, tj. spljoštenje prilikom pritiska na izbočenu poglodu. Parametri podloge su opisani uz krivulju u dijagramu. Crvena krivulja predstavlja interpolirane podatke mjerenja, dok je plava krivulja aproksimacija podataka polinomom 4. stupnja za potrebe numeričkog proračuna, tj. računanja promjene radijusa gume pri određenoj sili. Na slici 24. prikazana je promjena geometrije gume 12x 1,75“, tj. spljoštenje prilikom pritiska na ravnu poglodu. Crvena krivulja predstavlja interpolirane podatke mjerenja, dok je plava krivulja aproksimacija podataka polinomom 4. stupnja za potrebe numeričkog proračuna, tj. računanja promjene radijusa gume pri određenoj sili.



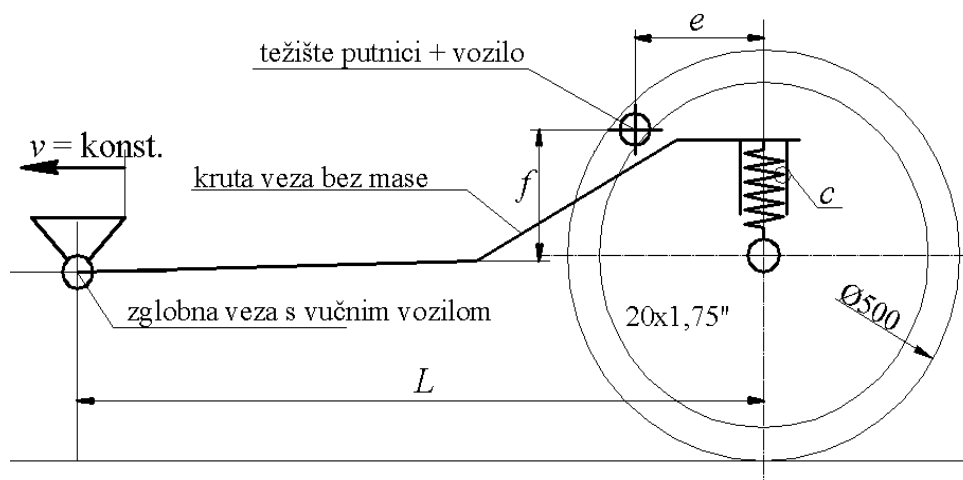
Slika 23. Ovisnost promjene geometrije gume 20x1,75" pri pritisku na izbočenu podlogu.



Slika 24. Ovisnost promjene geometrije gume 12x1,75" pri pritisku na ravnu podlogu.



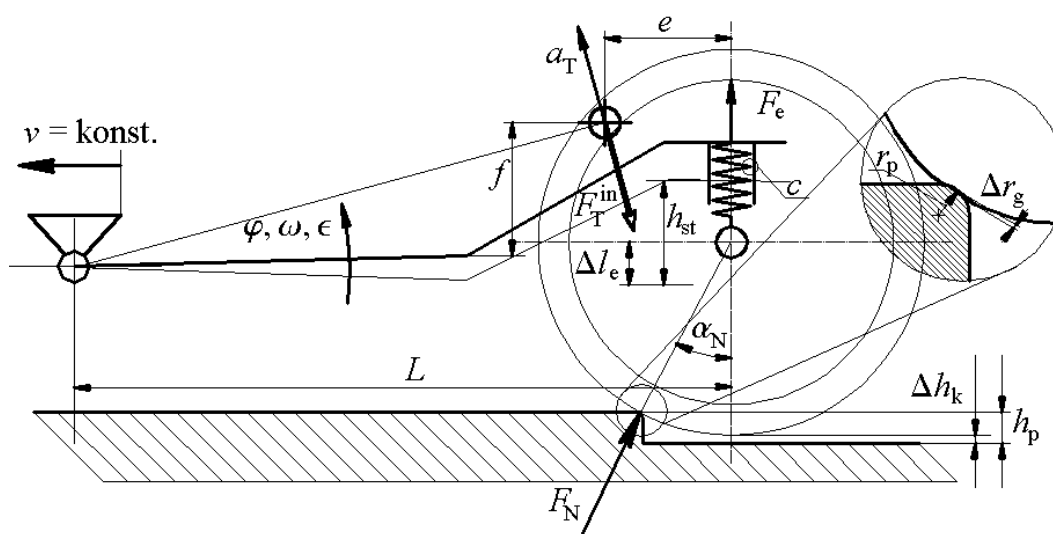
Na slici 25. prikazan je model proračuna osnovnog vozila u kojem je zbrojeno težište putnika i samoga vozila, udaljenost (zglobna veza) s vučom vozila te kruta veza bez mase.



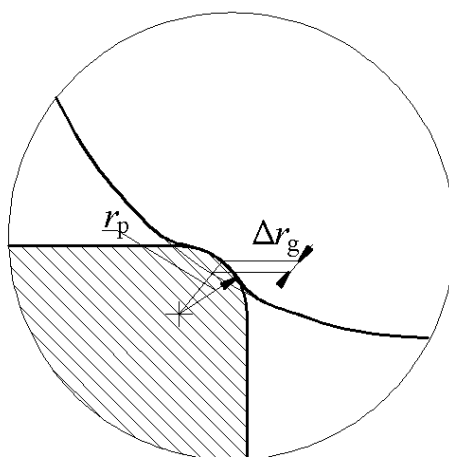
Slika 25. Proračunski model osnovnog vozila.

## 6.2 Prikaz kinematike i dinamike proračunskog modela cestovnog vozila

Krutost gume može biti od velikog utjecaja na ukupno djelovanje oslanjanja i njezino deformiranje nailaskom na napravnost podloge pri određenom pritisku. Kako postoji vremenska razlika između nailaska na neravninu prednjeg kraja i nailaska stražnjeg kraja vozila na istu neravninu, tj. prednji kraj vozila udara prepreku prije stražnjeg kraja, vozilo će rotirati oko poprečne osi ako su frekvencije prednjeg i stražnjeg kraja jednake. Očito je kako će vozilo rotirati oko poprečne osi sve dok se oscilacije ne priguše.

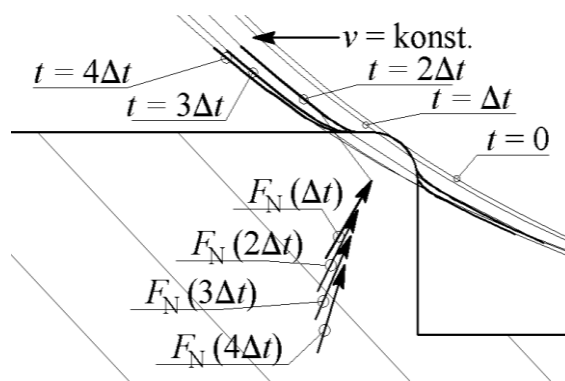


Slika 26. Kinematika i dinamika cestovnog vozila.

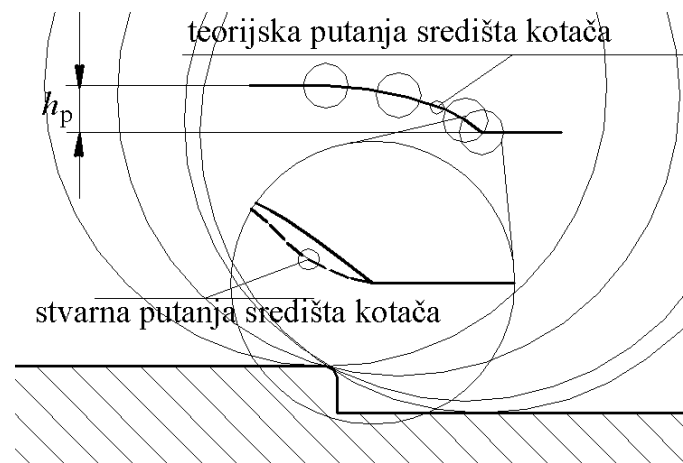


**Slika 27. Detalj (sa slike 26.) deformiranja gume pri pritisku na nepravilnost podloge.**

Za određivanje krutosti potrebno je prvo odrediti frekvenciju vožnje koja pokazuje koliko puta će se u određenom vremenskom periodu ponoviti neka radnja. Primjer je nailazak vozila na neravninu kada dolazi do gibanja ovješene mase u vertikalnom smjeru gore-dolje. Deformacija gume je različita u različitim vremenskim trenucima i mijenja se sa vremenskim razmacima te pod određenim pritiscima sile ( koje su različite ovisno o obliku nepravilnosti podloge ) mijenja svoje oblike (deformiranja).



**Slika 28. Deformiranje gume pri pritisku na nepravilnost podloge kao funkcija vremena.**

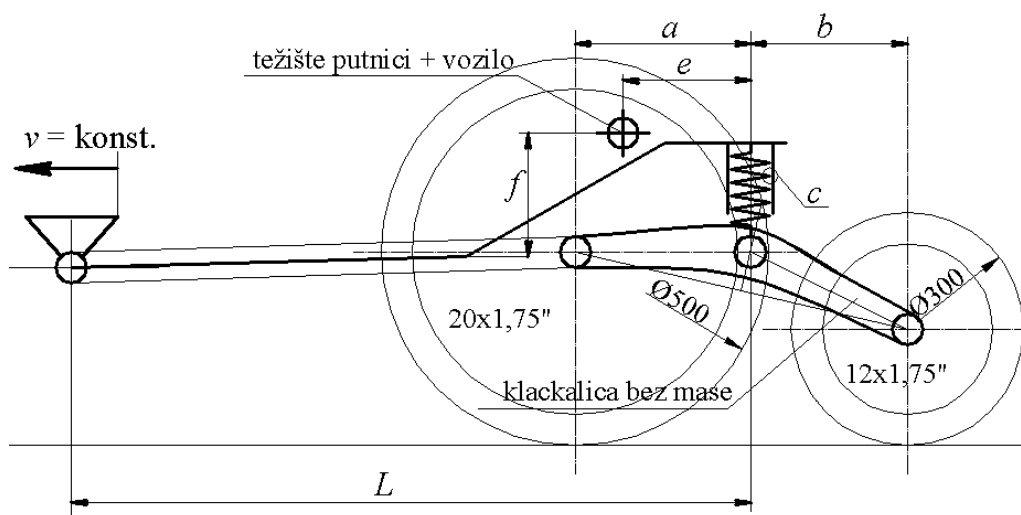


**Slika 29. Usporedba kinematike gume pri pritisku na nepravilnost podloge - bez i sa deformiranjem.**

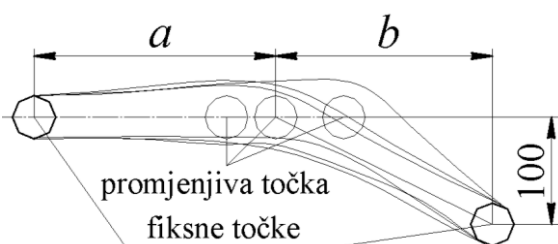
## 7. PRORAČUNSKI MODEL CESTOVNOG VOZILA POMOĆU KLACKALICE

### 7.1 Proračunski model

Kod oslanjanja kojima je opruga (i/ili amortizer) izravno spojena na poprečnu vodilicu, razlikujemo (uobičajenu inačicu) oprugu na donju poprečnu vodilicu i spoj opruge na gornju poprečnu vodilicu. Uobičajena inačica potonjeg tipa je 'klackalica' kod koje je opruga spojena s unutrašnje strane oslonaca vodilice. Mehanizmi koji su mehanizam 'klackalice' za oslanjanje lijeve i desne strane međusobno povezanih sustava, na njih djeluje samo jedna opruga i amortizer. Na proračunski model osnovnog cestovnog vozila dodan je sustav klackalica sa kotačem (gumom) dimenzije 12x1,75" koja je korištena pri mjerenju proračunskog modela vozila s oslanjanjem pomoću klackalice.



Slika 30. Proračunski model vozila s oslanjanjem pomoću klackalice.

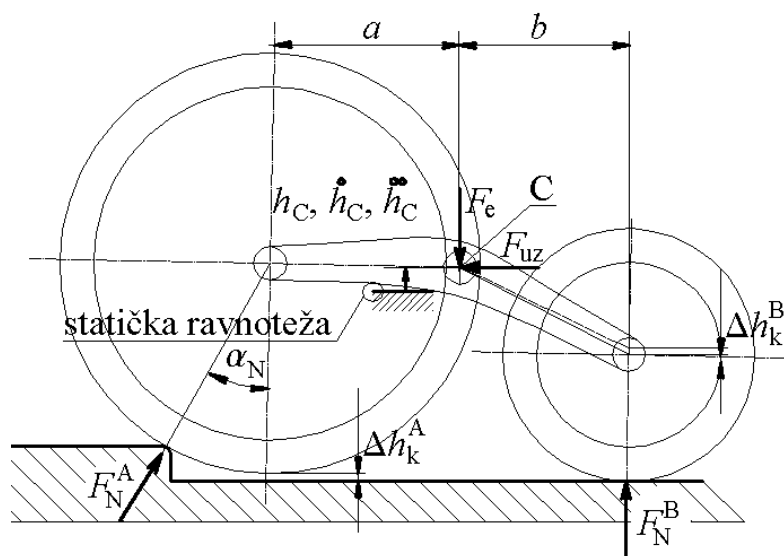


Slika 31. Geometrija karakteristike klackalice.

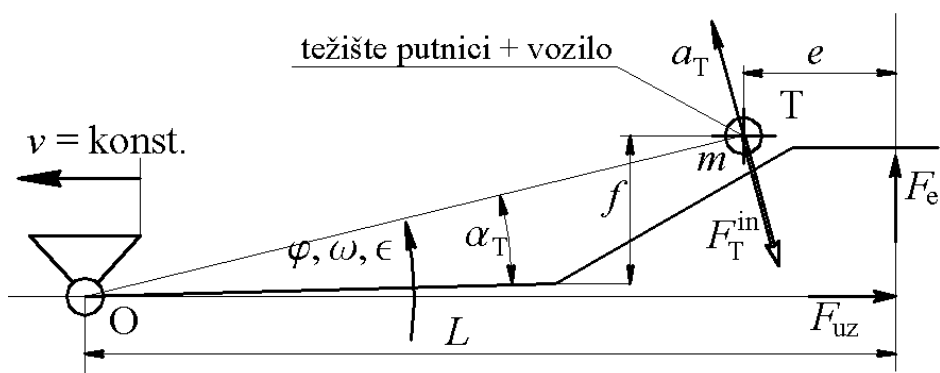
## 8. PRORAČUN DINAMIKE I KINEMATIKE KLACKALICE

### 8.1 Jednadžba proračunskog modela dinamike klackalice

Na slikama 32. i 33. ucratne su odgovarajuće sile, statičke razvnoteže, duljine (razmaci), mase i određeni kutevi koji su potrebni pri samom izračunu jednadžbe proračunskog modela cestovnog vozila pomoću klackalice.



Slika 32. Dinamika klackalice.



Slika 33. Dinamika vozila.

Jednadžba ravnoteže dinamičkih sila prema slikama 32. i 33. jednaka je:

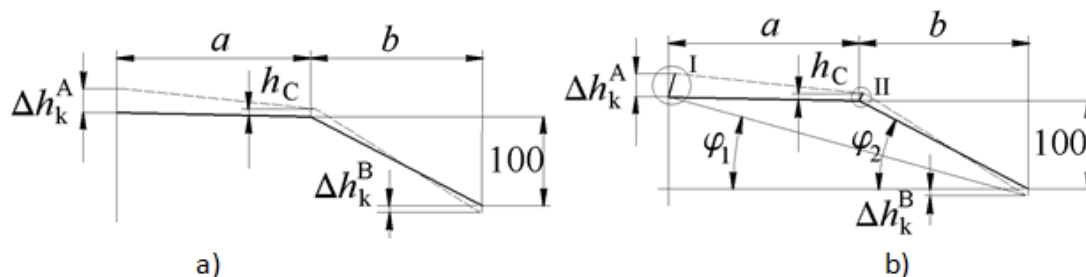
$$F_N^A \cos(\alpha_n) a = F_N^B b \quad (20)$$

$$F_e = F_N^A \cos(\alpha_N) + F_N^B = F_N^A \cos(\alpha_N) + F_N^A \cos(\alpha_n) \frac{a}{b} = F_N^A \cos(\alpha_N) \left(1 + \frac{a}{b}\right) \quad (21)$$

Numerička metoda jednadžbe rješavanja vibracijskih problema sa slike 33. glasi:

$$\sum M_0^{in} = 0 \rightarrow F_e L = F_T^{in} \sqrt{(L - e)^2 + f^2}, m \varepsilon \sqrt{(L - e)^2 + f^2} = F_T^{in} \quad (22)$$

## 8.2 Jednadžba proračunskog modela kinematike klackalice



Slika 34. Kinematika klackalice:

a) vektorski pomaci, b) proračunski model.

Pomoću slika 27., 32., i 34. dobivene su jednadžbe za proračun kinematike klackalice koje su opisane na sljedeći dobiveni oblik uz pomoć oblika:

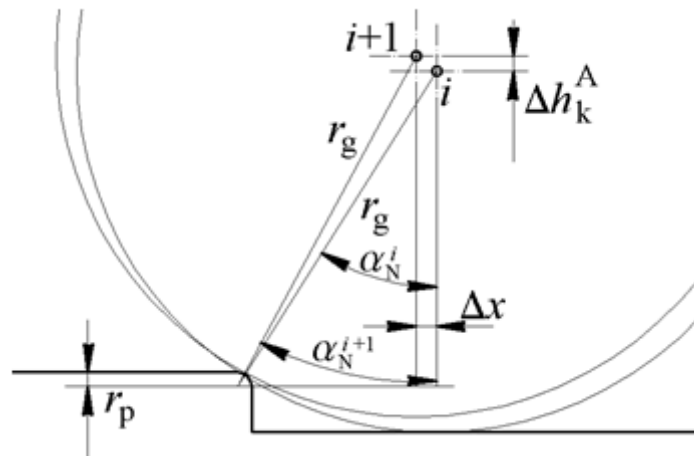
$$\Delta h_k^B; \Delta h_k^A \rightarrow \varphi_1 = \arctan\left(\frac{100}{a+b}\right), \varphi_2 = \arctan\left(\frac{100}{b}\right) \quad (23)$$

se dobije sljedeće:

$$\sqrt{(a+b)^2 + 100^2} \Delta \varphi \cos(\varphi_1) = \Delta h_k^A; \Delta h_c = \sqrt{b^2 + 100^2} \Delta \varphi \cos(\varphi_2) \quad (24)$$

$$\Delta h_c = \frac{\sqrt{b^2 + 100^2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{(a+b)^2 + 100^2} \cos(\varphi_1)} \Delta h_k^A = k_g \Delta h_k^A \rightarrow h_c = \Delta h_c - \Delta h_k^B \quad (25)$$

$$F_N^A \cos(\alpha_N) \left(1 + \frac{a}{b}\right) L = m \varepsilon ((L - e)^2 + f^2) \quad (26)$$



Slika 35. Proračun promjene kinematike kotača A unutar vektorskog koraka.

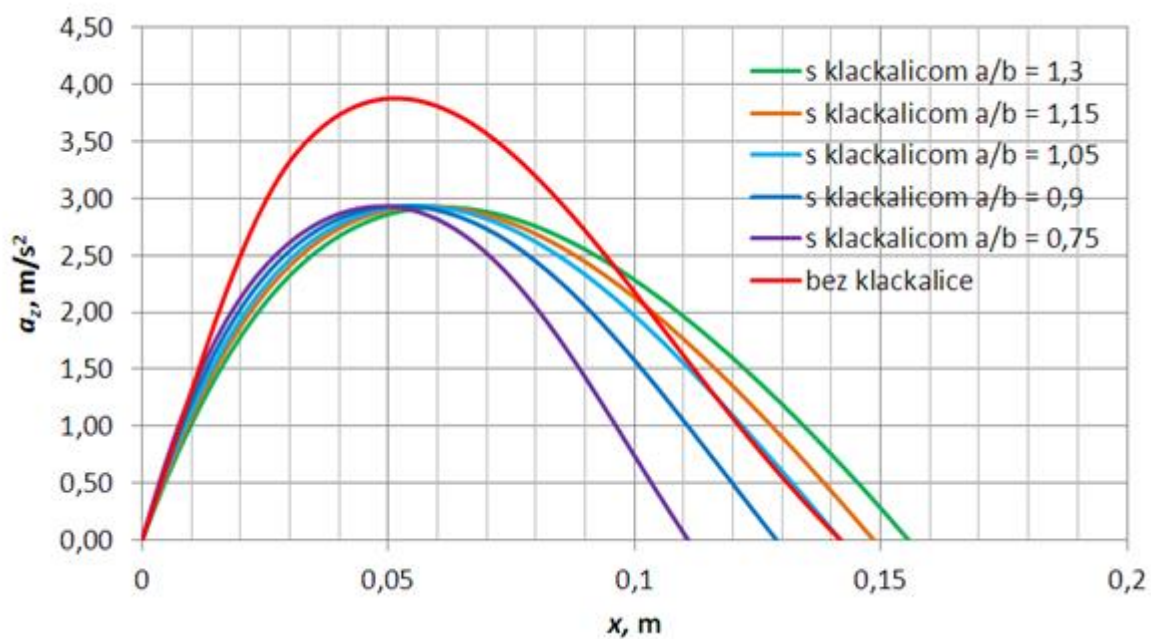
$$\Delta x = (r_g + r_p) \sin(\alpha_N^i) - (r_g + r_p) \sin(\alpha_N^{i+1}) = (r_g + r_p)(\sin(\alpha_N^i) - \sin(\alpha_N^{i+1})) \quad (27)$$

$$\sin(\alpha_N^{i+1}) = \frac{(r_g + r_p) \sin(\alpha_N^i) - \Delta x}{r_g + r_p} \quad (28)$$

$$\Delta h_k^{A,1} = (r_g + r_p) \cos(\alpha_N^{i+1}) - (r_g - r_p) \cos(\alpha_N^i) = (r_g + r_p)(\cos(\alpha_N^{i+1}) - \cos(\alpha_N^i)) \quad (29)$$

### 8.3 Rezultati simulacije proračunskog modela

Na slici 36. prikazana je promjena vertikalne komponente ubrzanja putnika pri naletu na izbočenu podlogu opisanu paramterima na slici 23. Parametri pri proračunu za izračun vertikalnog ubrzanja su: brzina gibanja vozila (pretpostavljena kao stalna pri prolazu prepreke)  $v = 15 \text{ km/h}$ , karakteristika opruge  $c = 10 \text{ N/mm}$ , položaj položaj težišta vozila i putnika zbrojeno, prema slici 33.,  $e = 0,09$ ,  $f = 0,11 \text{ m}$ , koji su određeni mjerenjem, te udaljenost osovine klackalice (osovine kotača) od prihvata za vučno vozilo  $L = 1,12 \text{ m}$ . Parametri a i b, prema slici 34. su varirani u cilju dobivanja utjecaja tih parametara na najveće vertikalno ubrzanje putnika kao najznačajniji kriterij pri ocjeni kvalitete konstrukcijskog rješenja.



Slika 36. Vertikalno ubrzanje putnika pri naletu na izbočenu podlogu.



## 9. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu prikazana je kinematika i dinamika kao cjelina krutih tijela i njihovo djelovanje na njih samih te kako se odnose na sustave oslanjanja cestovnih vozila oblika kotač-opruga, odnosno na mehanizam vođenja kotača prilikom nailaska na nepravilnosti podloge. Svaki od tih sustava ima svoje prednosti i nedostatke koji pridonose različitim performansama prijenosa kinematike i dinamike na samo cestovno vozilo. Ovisno o brzini nailaska na nepravilnost podloge (mekanu/tvrdu) kotač poprima određen oblik te se deformira. Uslijed toga dolazi do vibracijskog odziva koji se prenose na šasiju te imaju veliki značaj na sam sustav cestovnog vozila i konstrukciju. Za proračun i sam numerički izračun odabrana je i korištena metoda pretpostavljenog rješenja koja je vrlo slična metodi konačnih elemenata te sama opravdanost i kvaliteta te metode je provjerena. Proračun je izveden u svakom vremenskom koraku nailaska gume na nepravilnost podloge sa klackalicom, odnosno rezultati su uspoređeni sa kotačem izravno na opruzi te sa dva kotača povezana klackalicom. Veličina na kojoj je temeljna usporedba kvalitete dvaju sustava je vertikalno ubrzanje putnika pri naletu na izbočenu/udubljenu podlogu.

Kao dodatno poboljšanje pri smanjenju najvećeg vertikalnog ubrzanja za rješenje s klackalicom može se dodati opruga koja povezuje osovinu klackalice i kotače, tj. spojnica treba biti izvedena kao lisnata opruga.

## 10. LITERATURA

- [1] [http://vujicnikola.weebly.com/uploads/3/4/8/0/3480733/sistem\\_za\\_oslanjanje.pdf](http://vujicnikola.weebly.com/uploads/3/4/8/0/3480733/sistem_za_oslanjanje.pdf), 30.04.2019.
- [2] <http://tehnika.lzmk.hr/tehnickaenciklopedija/vibracije.pdf>, 18.05.2019.
- [3] <https://repozitorij.vuka.hr/islandora/object/vuka:903/preview>, 04.05.2019.
- [4] [http://repozitorij.fsb.hr/911/1/18\\_02\\_2010\\_Diplomski\\_rad\\_-\\_Teodor\\_Tomic.pdf](http://repozitorij.fsb.hr/911/1/18_02_2010_Diplomski_rad_-_Teodor_Tomic.pdf), 12.05.2019.
- [5] <https://www.scribd.com/document/105999210/Vje%C5%BEbe-simulacija-modela-ovjesa-automobila>, 22.05.2019.
- [6] [http://repozitorij.fsb.hr/8543/1/Milanovi%C4%87\\_2018\\_diplomski.pdf](http://repozitorij.fsb.hr/8543/1/Milanovi%C4%87_2018_diplomski.pdf), 17.05.2019.
- [7] [http://phy.grf.unizg.hr/media/download\\_gallery/F1\\_dinamika\\_Newtonovi%20aksiomi\\_vrste%20sila\\_2slide.pdf](http://phy.grf.unizg.hr/media/download_gallery/F1_dinamika_Newtonovi%20aksiomi_vrste%20sila_2slide.pdf), 14.05.2019.
- [8] [http://mf.unibl.org/upload/documents/Dokumenti/Predmeti/Mehanika%202/Skripta\\_Mehanika%202.pdf](http://mf.unibl.org/upload/documents/Dokumenti/Predmeti/Mehanika%202/Skripta_Mehanika%202.pdf), 09.05.2019.
- [9] [https://autoportal.hr/clanak/abeceda\\_dinamike\\_vozila\\_2\\_otpor\\_kotrljanja\\_kotaca](https://autoportal.hr/clanak/abeceda_dinamike_vozila_2_otpor_kotrljanja_kotaca), 10.05.2019.
- [10] [http://ptf.unze.ba/wp/wp-content/uploads/2018/10/AK\\_NM\\_B5\\_090426.pdf](http://ptf.unze.ba/wp/wp-content/uploads/2018/10/AK_NM_B5_090426.pdf), 16.05.2019.
- [11] Skupina Autora: Inženjerski Priručnik - IP1, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
- [12] Sorić Jurica: Metoda Konačnih elemenata, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [13] Sorić Jurica: Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [14] Stegić Milenko: Teorija vibracija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2009.
- [15] Krpan Dragutin: Motorna vozila, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1965.
- [16] Mikulić Dinko: Motorna vozila, II izdanje, Veleučilište Velika Gorica, Velika Gorica, 2016.