

SIMULACIJA LETA RAKETE

Skolan, Sandi

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:982783>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-11**



VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
Karlovac University of Applied Sciences

Repository / Repozitorij:

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE

SANDI SKOLAN

SIMULACIJA LETA RAKETE

ZAVRŠNI RAD

KARLOVAC, 2021.

KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED
SCIENCES
MECHANICAL ENGINEERING DEPARTMENT
PROFESSIONAL UNDERGRADUATE STUDY OF MECHATRONICS

SANDI SKOLAN

ROCKET FLIGHT SIMULATION

FINAL WORK

KARLOVAC, 2021.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE

SANDI SKOLAN

SIMULACIJA LETA RAKETE

ZAVRŠNI RAD

Mentor: dr. sc. Lulić Slaven, prof. v. š.

KARLOVAC, 2021.

IZJAVA

Izjavljujem da sam ovaj završni rad izradio samostalno, koristeći znanje stečeno tijekom studija, služeći se navedenom stručnom literaturom.

Ovim putem bih se htio zahvaliti mentoru Slavenu Luliću na danj prilici i pomoći kod izrade završnog rada. Također bih se htio zahvaliti profesorici Marini Tevčić na motivaciji i vjerovanju da ću uspjeti završiti ovaj studij.

Karlovac, 2.6.2021.

Potpis: _____

SAŽETAK

U ovom završnom radu napraviti ćemo matematički model putanje rakete i uz pomoć Python programa, izračunati i grafički predočiti rezultate. Prije nego što počnemo opisivati matematički model gibanja bilo bi dobro znati nešto općenito o raketama. Na početku završnog rada stoga imamo uvod u numeričke metode koje, kada opisujemo gibanje rakete, budu vrlo korisne. Zatim općenito o raketama gdje, što kraće i razumljivije objašnjavamo namjenu i dijelove rakete. Kod dijelova rakete opisani su samo oni najosnovniji dijelovi koji su također potrebni za shvaćanje matematičkog modela gibanja. Zbog tog razloga nećemo ulaziti u kompleksnije teme kako što su navigacijski sustavi, elektronika, aerodinamika ili materijali.

Ključne riječi: Raketa, simulacija leta rakete, numeričke metode, dijelovi rakete

SUMMARY

In this final paper we will make a mathematical model of the rocket trajectory and with the help of the Python program, calculate and graphically present the results. Before we begin to describe the mathematical model of motion it would be good to know something in general about rockets. At the beginning of the final work we therefore have an introduction to numerical methods which, when describing the motion of a rocket, are very useful. Then we will, as briefly and understandably as possible, explain in general the purpose and parts of a rocket. Only the most basic parts of a rocket, that are also needed to understand the mathematical model of motion are described. For this reason, we will not go into more complex topics such as navigation systems, electronics, aerodynamics or materials.

Key words: Rocket, rocket flight simulation, numerical methods, rocket parts

SADRŽAJ

1. Uvod.....	1
2. Općenito o raketama.....	2
2.1. Povijest raketa.....	2
2.2. Generalna namjena.....	3
2.3. Dijelovi rakete.....	4
2.3.1. Turbo pumpe.....	5
2.3.2. Motorni ciklusi.....	6
2.3.2.1. Otvoreni ciklus (generator plina).....	6
2.3.2.2. Zatvoreni ciklus (bogat kisikom).....	7
2.3.2.3. Zatvoreni ciklus (bogat gorivom, dupla osovina).....	8
2.3.2.4. Ciklus punog protoka (stupnjeviti ciklus izgaranja).....	9
2.3.3. Mlaznica.....	10
2.3.4. Gorivo.....	12
3. Opis matematičkog modela.....	14
3.1. Ovisnost omjera konačne brzine i brzine mlaza plina o omjeru masa rakete i goriva.....	14
3.2. Ubrzanje, brzina i put rakete u toku rada motora.....	15
3.3. Gibanje rakete s gravitacijom uzetom u obzir.....	17
4. Rješavanje problema uz pomoć Python programa.....	18
5. Rezultati.....	23
5.1. Prvi problem.....	23
5.2. Drugi problem.....	24
5.3. Treći problem.....	26
6. Zaključak.....	28
Literatura.....	29

POPIS SLIKA

Slika 1. Najstariji poznati prikaz raketnih strijela.....	2
Slika 2. Prikaz Hubble Space Telescope-a i James Webb Space Telescope-a.....	3
Slika 3. Dijelovi rakete.....	4
Slika 4. Pumpe vodika i tekućeg kisika.....	5
Slika 5. Otvoreni ciklus (generator plina).....	7
Slika 6. Zatvoreni ciklus (bogat kisikom).....	8
Slika 7. Zatvoreni ciklus (bogat gorivom, dupla osovina).....	9
Slika 8. Ciklus punog protoka (stupnjeviti ciklus izgaranja).....	10
Slika 9. Prikaz dijagrama de Laval mlaznice.....	11
Slika 10. Ovisnost tlaka naspram brzini ispušnog plina u Raptor motoru.....	11
Slika 11. Simulacija odvajanje protoka.....	12
Slika 12. Grafički prikaz ovisnosti omjera konačne brzine i brzine mlaza plina o omjeru masa rakete i goriva.....	23
Slika 13. Grafički prikaz ubrzanja, brzine i puta rakete u toku rada motora.....	24
Slika 14. Grafički prikaz gibanja rakete s gravitacijom uzetom u obzir.....	26

POPIS TABLICA

Tablica 1. Teoretski maksimalni specifični impulsi nekih goriva.....	13
Tablica 2. Primjeri omjera početne i konačne mase raketa.....	15

POPIS OZNAKA

OZNAKA	OPIS	MJERNA JEDINICA
a	Ubrzanje	m/s^2
a_g	Ubrzanje rakete kada je uzeto u obzir djelovanje gravitacije	m/s^2
a_{20}	Ubrzanje rakete nakon 20 sekundi leta kada je uzeto u obzir djelovanje gravitacije	m/s^2
F	Sila potiska rakete	N
g	Gravitacijska konstanta	m/s^2
I	Specifični impuls	s
k	Koeficijent brzine izgaranja goriva	kg/s
m_1	Reakcijska masa 1	kg
m_2	Reakcijska masa 2	kg
m_k	Krajnja masa rakete (masa prazne rakete)	kg
m_0	Početna masa rakete (masa rakete i goriva)	kg
Δm	Promjena mase	kg/s
Δm_2	Promjena reakcijske mase 2	kg/s
m_g	Masa goriva	kg
v	Brzina rakete	m/s
v_0	Brzina ispušnih plinova	m/s
v_g	Brzina rakete kada je uzeto u obzir djelovanje gravitacije	m/s
v_1	Brzina reakcijske mase 1	m/s
v_2	Brzina reakcijske mase 2	m/s
Δv_1	Promjena brzine reakcijske mase 1	m/s^2
v_k	Konačna brzina rakete	m/s
v_{20}	Brzina rakete nakon 20 sekundi leta kada je uzeto u obzir djelovanje gravitacije	m/s
x_g	Prijeđeni put rakete kada je uzeto u obzir djelovanje gravitacije	m
x_{20}	Prijeđeni put rakete nakon 20 sekundi leta kada je uzeto u obzir djelovanje gravitacije	m

1. UVOD

Razvojem društva i znanosti u današnje vrijeme automatsko upravljanje je postalo neizbježno. U tu svrhu postavlja se zahtjev da je potrebno poznavati dinamiku tih sustava. Dinamika sustava opisuje se diferencijalnim jednadžbama za koje možemo reći da su „uzrok problema“ koji nastaje prilikom njihove primjene. Diferencijalne jednadžbe mogu postati vrlo složene za analitičko rješavanje, te se tada moramo koristiti analognim modelom. Na modelu se vrše mjerenja koja se onda prevode u uvjete sustava kojeg ispitujemo. Promjene parametara sustava na modelu se vrlo lako realiziraju što znači da se i brzo može ocijeniti utjecaj tih parametara na promjene fizikalnih varijabli. Prednost modela se očituje i u činjenici što se fizikalna zbivanja prikazuju u nekom vremenskom području koje odgovara toj fizikalnoj stvarnosti.

Možemo reći kako je modeliranje proces analize stvarnih problema te stvaranje matematičkog opisa u svrhu predviđanja ponašanja određenog sustava. Modeliranje možemo definirati kao otkrivanje i testiranje matematičkih prikaza ili modela stvarnih predmeta ili procesa

Kod modeliranja nekog problema imamo nekoliko koraka kojih se moramo pridržavati:

1. Analiza problema (identificira se problem da bi se napravio matematički model)
2. Formuliranje problema (prikupljaju se podaci o ponašanju sustava, ispituju se pretpostavke koje pojednostavljuju problem, određuju se varijable i mjerne jedinice, pronalaze se odnosi između varijabla i podmodela, definiraju se funkcije i jednadžbe)
3. Rješavanja problema
4. Testiranje i potvrda točnosti
5. Izvještaj o modelu (analiziraju se okolnosti u kojima je problem riješen, opisuju se tehnike koje su se koristile pri rješavanju problema, objašnjavaju se rezultati i donosi zaključak o rješenjima koja daje model).

Sam model, kao i elementi modela simuliraju dijelove realnog sustava kojeg se ispituje. Stoga možemo reći kako se uređaji na kojima se ostvaruju modeli nazivaju simulatori, a sam postupak gradnje modela simulacijom.

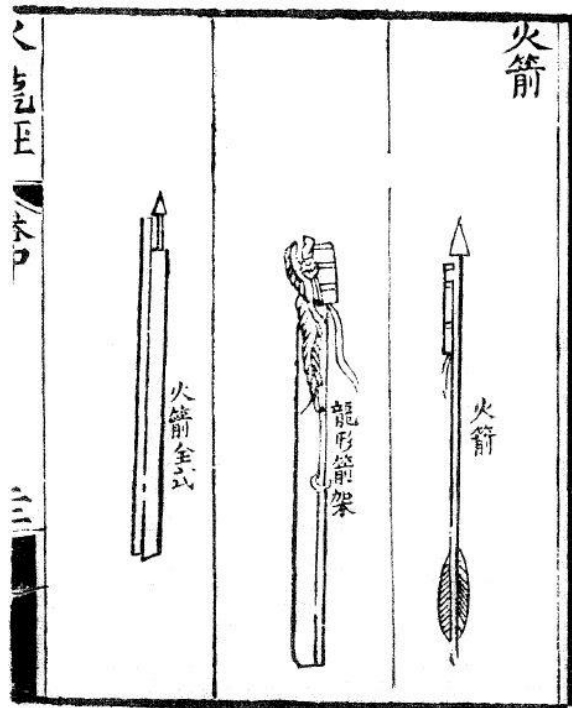
Simulacija je model nekog stvarnog sustava koji dopušta dinamičko izvršavanje i manipulaciju istog.

2. OPĆENITO O RAKETAMA

2.1. Povijest raketa

Prvo korištenje raketa započinje izumom baruta u Kini u 13. stoljeću [1]. Tada su se koristile u ratne svrhe kao eksplozivni projektili ili su služile kao pogon za strijele.

Rakete su se koristile u ratne svrhe sve do 1861. godine kada je William Leitch prvi predložio koncept korištenja raketa u svrhu omogućavanja leta ljudima [2]. Moderne rakete su nastale 1926. godine kada je Robert Goddard stavio nadzvučnu (de Laval) sapnicu na izlaz komore gdje dolazi do sagorijevanja goriva. Te sapnice pretvaraju vrući plin iz komore za sagaranje u hladniji, nadzvučni, vrlo usmjereni mlaz plina, te je tako dobio više nego dupli potisak i povisio je korisnost motora s 2% na 64%. Također je njegovo korištenje tekućih goriva umjesto baruta uvelike smanjilo težinu i povećalo efektivnost raketa [3].



Slika 1. Najstariji poznati prikaz raketnih strijela [4]

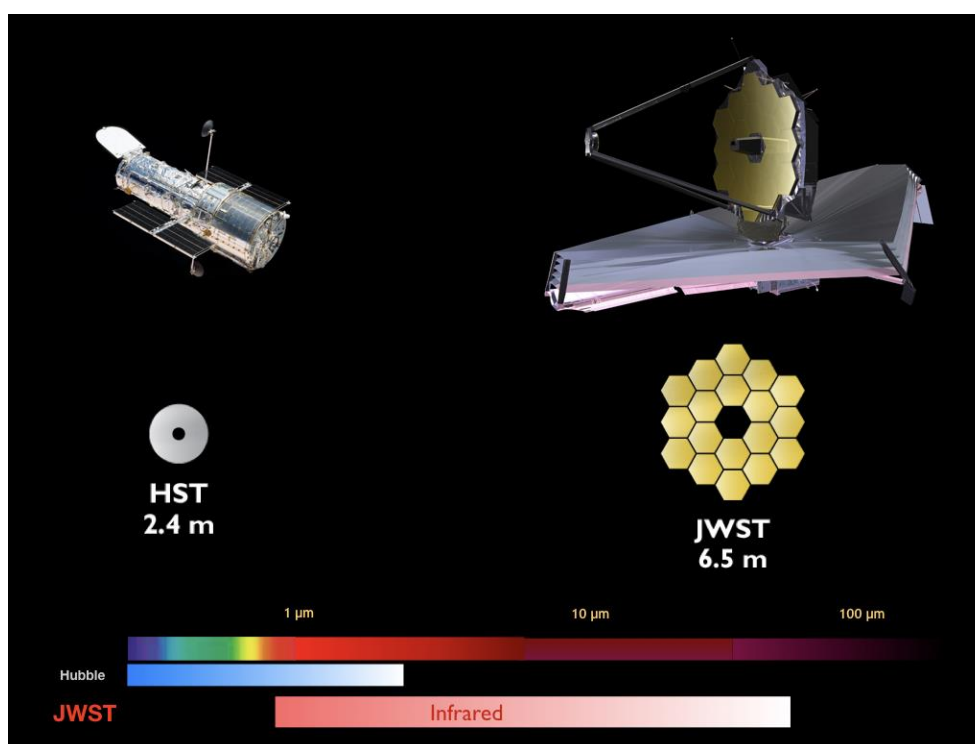
U današnje vrijeme razvoj raketa je više fokusiran u komercijalne i istraživačke svrhe gdje su najmodernije rakete Space Launch System (NASA) i Falcon9 (SpaceX) gdje se Falcon9-ov prvi stupanj može koristiti više puta.

SpaceX također razvija novu ponovno iskoristivu raketu Starship s ciljem drastičnog smanjenja cijene lansiranja i mogućnosti lansiranja ljudi na Mars.

2.2. Generalna namjena

Osim što se i danas rakete koriste u ratne svrhe, kao što je navedeno na prijašnjoj stranici, više se koriste za komercijalne razloge, pa se tako raketama mogu lansirati GPS sateliti u geostacionarne orbite gdje se satelit uvijek nalazi iznad iste točke na planeti, teleskopi kao što je Hubble Space Telescope ili James Webb Space Telescope te sateliti za davanje raznih informacija o Zemlji kao što su informacije o oblacima, oceanima, zemlji i ledu.

Također postoje sateliti koji mjere plinove u atmosferi, kao što je ozon ili ugljikov dioksid, i količinu energije koju Zemlja apsorbira ili emitira. K svemu tome još mogu nadzirati požare, vulkane i njihov dim [5].



Slika 2. Prikaz Hubble Space Telescope-a i James Webb Space Telescope-a [6]

Raketama se mogu slati probe na površine drugih planeta ili u orbitu oko njih u svrhu proučavanja.

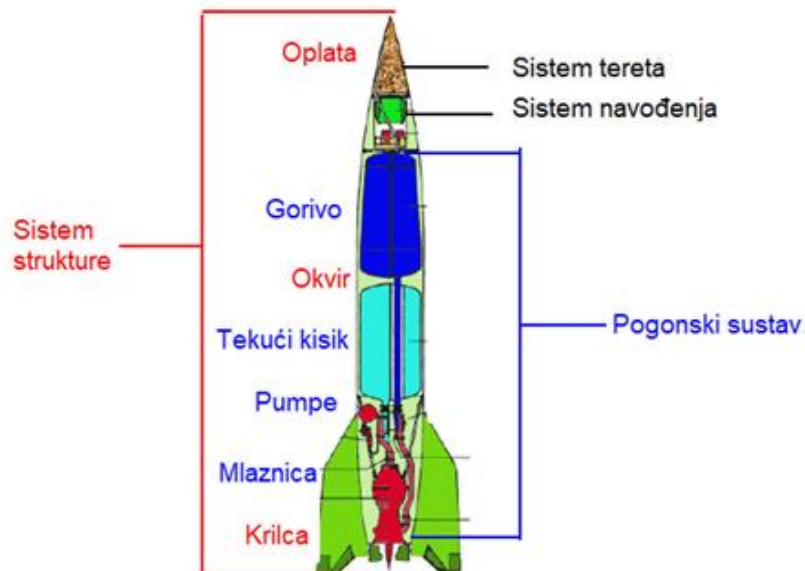
Služe za lansiranje ljudi na Internacionalnu Svemirsku Stanicu (ISS) gdje se provode razni eksperimenti, a u novije vrijeme se pojavljuje i svemirski turizam gdje obični ljudi plate kartu za boravak na ISS-u ili za let u svemir bez postizanja orbite. Također se u nadolazećim godinama planira slati ljude na Mjesec i na Mars.

Uz pomoć raketa direktno se može testirati Einsteinova opća teorija relativnosti. Opća

teorija relativnosti kaže da dolazi do sporijeg protoka vremena uslijed putovanja blizu relativističkih brzina i ako se tijelo nalazi u gravitacijskom polju. Ta razlika u mjerenju vremena se odnosi na tijela od kojih se jedno giba relativističkim brzinama, a drugo ne. Djelovanje gravitacijskog polja se može testirati jedino ako imamo velike razlike u visinama tako da je razlika u gravitaciji dovoljno velika da se napravi mjerenje. Tu razliku izmjerimo tako da se satelit s atomskim satom pošalje u vrlo ekscentričnu orbitu gdje je razlika između najviše i najniže nadmorske visine više tisuća kilometara. Upravo to su znanstvenici izmjerili 2014. godine i još čvršće potvrdili Einsteinovu teoriju o generalnoj relativnosti [7].

2.3. Dijelovi rakete

Raketa se sastoji od pogonskog goriva, spremnika za gorivo i mlaznice. Također imaju jedan ili više raketnih motora, uređaj za usmjerenu stabilizaciju (kao što su krilca, nonijski motori ili hidraulički usmjeravani raketni motori za vektorsku kontrolu potiska i žiroskopi) i strukturu koja drži sve te komponente na okupu. Rakete namijenjene za vrlo velike brzine imaju aerodinamičnu oplatu na vrhu rakete, u kojoj se uobičajeno nalazi teret [8].



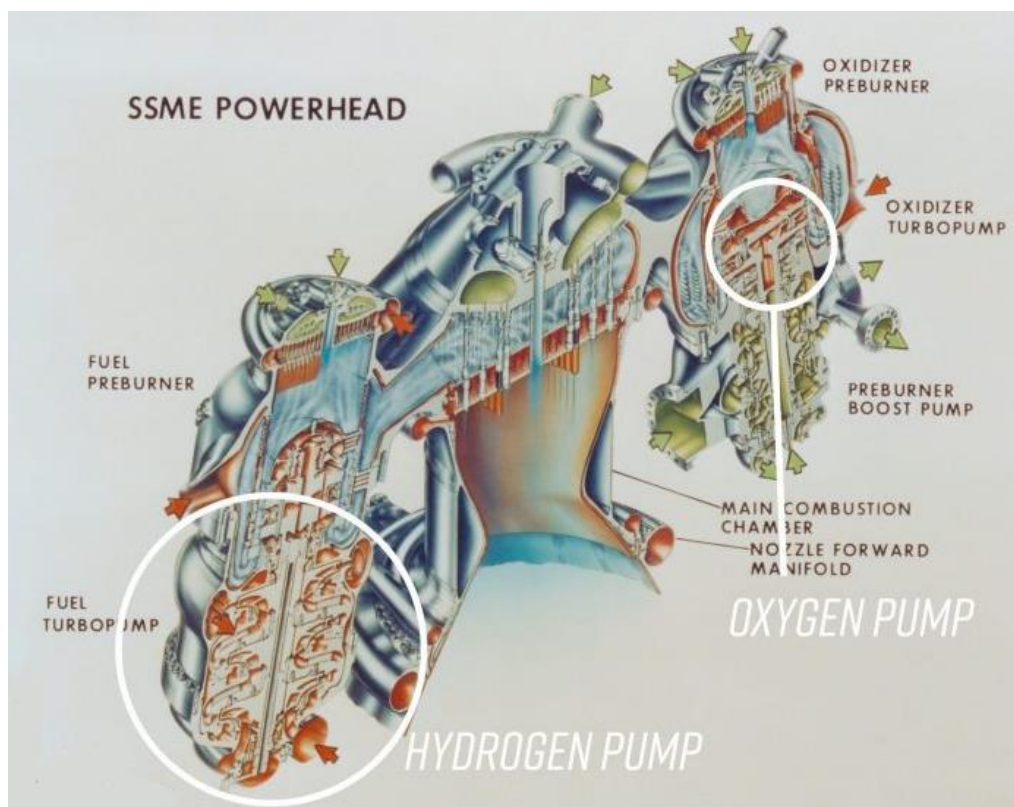
Slika 3. Dijelovi rakete [9]

Rakete mogu imati i broj drugih komponenta, kao što su krila (ako je riječ o raketnim avionima kao što je bio Space Shuttle ili nadolazeći Starship) ili padobrani. Raketna vozila često sadrže navigacijske sustave i sustave navođenja koji uobičajeno koriste satelitsku navigaciju i inercijske navigacijske sustave.

2.3.1. Turbo pumpe

Kada gorivo sagorijeva u komori za izgaranje dolazi do porasta tlaka u toj komori. Znamo da kada imamo neku tvar pod većim tlakom taj tlak će se htjeti izjednačiti tako da će ići iz područja višeg tlaka prema području nižeg tlaka. Pošto je spremnik s gorivom direktno spojen s komorom za izgaranje, tlak goriva u spremniku mora uvijek biti veći od tlaka u komori za izgaranje. Mogli bi spremiti gorivo pod vrlo visokim tlakom, ali onda dolazimo do problema da moramo podebljati zidove spremnika goriva dodatnim materijalom kako ne bi došlo do puknuća spremnika. To dovodi do dodatka mase raketi što je vrlo nepoželjno. Ojačavanje spremnika dodatnim materijalom bi moglo funkcionirati kod manjih raketa gdje domet nije toliko bitan jer tako smanjujemo kompleksnost pa time i cijenu rakete, ali kod raketa koje moraju postići orbitu, omjer mase prazne rakete i goriva je ključan, stoga moramo naći drugo rješenje.

Ugradnjom turbo pumpi goriva i oksidansa postižemo upravo to, mogućnost spremanja goriva pod niskim pritiskom pa tako i korištenje lakših spremnika.



Slika 4. Pumpe vodika i tekućeg kisika [10]

Pošto te turbo pumpe moraju moći stvoriti vrlo velike pritiske i protoke mase, zahtijevaju veliku snagu za pokretanje [10]. Mogli bi staviti elektromotor za pokretanje, ali nam je

onda također potreban izvor struje u obliku baterija za startanje elektromotora, a pošto baterije imaju vrlo mali omjer energije naspram mase, korištenje elektromotora bi dovelo do prevelikog dodatka mase (naravno postoje izvedbe s elektromotorima, ali za manje rakete).

Rješenje leži u tome da se za izvor energije za pokretanje turbo pumpi koristi pomoćni raketni motor koji koristi isto gorivo i oksidans kao i glavni motor. Time dolazimo do motornih ciklusa.

2.3.2. Motorni ciklusi

Vrsta motornog ciklusa ovisi o tome kako je ulaz i izlaz pomoćnog motora spojen s ostatkom sustava.

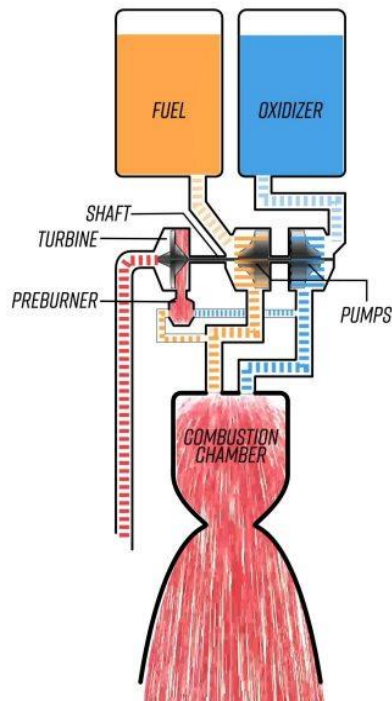
Izvedba može biti jednostavnija što nam daje manju korisnost motora ili može biti kompleksnija pa tada dobijemo veću korisnost motora.

Postoje puno vrsta motornih ciklusa od kojih su najčešće korištena 4 koja ćemo ukratko opisati u nastavku.

2.3.2.1. Otvoreni ciklus (generator plina)

Kod ciklusa generatora plina ispušni plinovi pomoćnog motora su usmjereni prema van i ne pridonose značajno potisku rakete. Razlog tome je taj što mješavina oksidansa i goriva mora biti bogata gorivom kako produkt izgaranja ne bi bio toliko vruć da rastopi dijelove motora, a pošto je mješavina bogata gorivom produkt izgaranja bude pun čađe koja bi, kada bi ispuh spojili s glavnom komorom za izgaranje, zaštopala sve mlaznice goriva koje se nalaze na vrhu komore [10].

Taj ciklus se koristi u kombinaciji s RP-1 (Rocket Propellant 1) gorivom, no u nekim slučajevima se koristi s vodikom (tada je jedini produkt ispušnih plinova voda). Generator plina je najjednostavniji motorni ciklus što ga čini najjeftinijim za implementaciju.



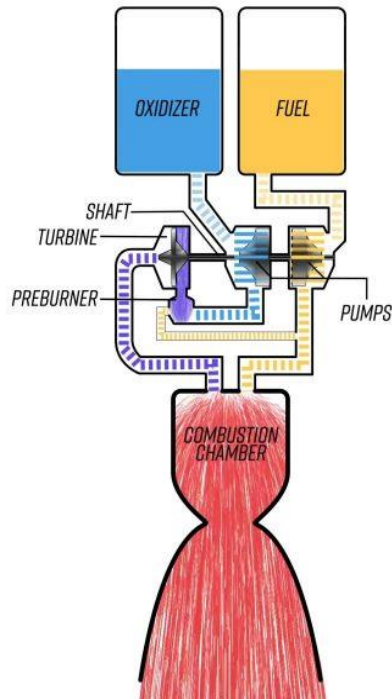
Slika 5. Otvoreni ciklus (generator plina) [10]

2.3.2.2. Zatvoreni ciklus (bogat kisikom)

Kod zatvorenog ciklusa gdje je mješavina goriva bogata kisikom sav kisik prolazi kroz pomoćni motor gdje se dodaje točno onolika količina goriva koja je potrebna kako bi se stvorila dovoljna snaga da zavrti turbinu tako da stvori točan pritisak u pumpi koji će u konačnici izjednačiti tu povratnu vezu.

Kada imamo mješavinu goriva bogatu kisikom izgaranjem takve mješavine se razvijaju ogromne topline, toliko velike da nam je potrebna posebna legura metala koja može izdržati te ekstremne topline.

Kod ovog ciklusa sve gorivo iz spremnika je potrošeno na potisak rakete [10].



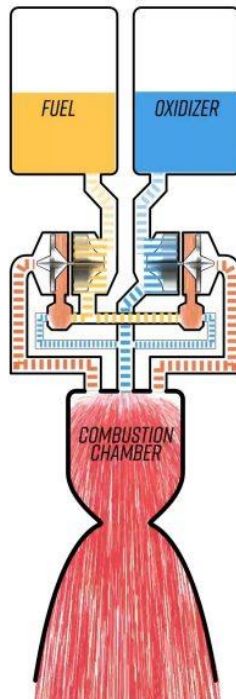
Slika 6. Zatvoreni ciklus (bogat kisikom) [10]

2.3.2.3. Zatvoreni ciklus (bogat gorivom, dupla osovina)

Kao što je spomenuto kod generatora plina kada imamo mješavinu bogatu gorivom tada je njen produkt izgaranja čađav. To je istina kada koristimo goriva s velikim udjelom ugljika kao što je slučaj s RP-1.

Za ovaj ciklus se primarno koristi vodik. Vodik u tekućem obliku ima vrlo malu gustoću, stoga kako bi dobili dovoljno velik protok mase potrebna nam je velika turbo pumpa dok za kisik nam treba puno manja. Razlika veličina tih pumpi se može vidjeti na slici 4. Zato se u ovom ciklusu koriste odvojene turbo pumpe.

Ovaj ciklus, pošto se koristi vodik ima također problem brtvljenja na strani pumpe kisika gdje može doći do curenja vrućeg neizgorenog vodika u pumpu kisika što bi dovelo do eksplozije. Za to nam je potrebna složena brtva kod koje se, osim mehaničke prepreke, koristi i helij koji se stavlja na sredinu, između kisika i vrućeg vodika, pod većim pritiskom tako da, ako bi došlo do curenja, curio bi samo inertni helij [10].



Slika 7. Zatvoreni ciklus (bogat gorivom, dupla osovina) [10]

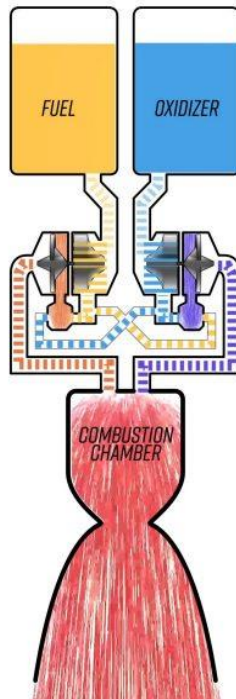
2.3.2.4. Ciklus punog protoka (stupnjeviti ciklus izgaranja)

Ciklus punog protoka također koristi dva pomoćna motora, gdje je jedan bogat gorivom a drugi bogat kisikom. Pomoćni motor kod kojeg se koristi mješavina goriva bogata gorivom pokreće pumpu goriva, dok pomoćni motor kod kojeg se koristi mješavina goriva bogata kisikom pokreće pumpu kisika. To znači da ciklus punog protoka mora riješiti problem, vruće, kisikom bogate mješavine, što je opet riješeno proizvodnjom vrlo jakih metalnih legura.

Prednost ovog ciklusa je ta što gorivo i oksidans dolaze u komoru za izgaranje kao vrući plin, zbog čega dolazi do boljeg izgaranja pa se tako mogu ostvariti veće temperature što u konačnici dovodi do većih brzina ispušnih plinova.

Ne zahtijeva složenu brtvu kao što je slučaj kod zatvorenog ciklusa jer pumpa goriva može doći u kontakt samo s više goriva dok pumpa kisika može doći u kontakt samo s više kisika.

Do sada su napravljena samo 3 motora s ovim ciklusom od kojih je samo jedan ostvario polijetanje te se aktivno koristi, a to je SpaceX-ov Raptor motor. Uzimajući sve u obzir, ciklus punog protoka je najsloženiji ciklus pa time i najučinkovitiji [10].



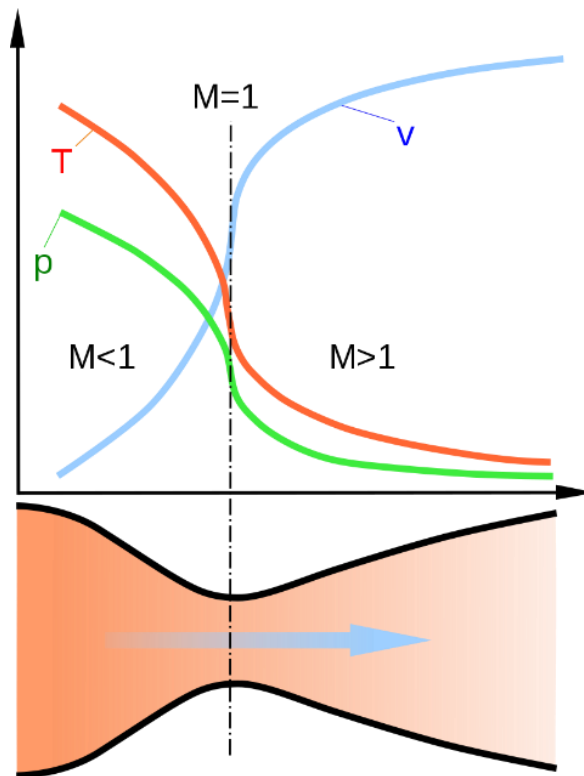
Slika 8. Ciklus punog protoka (stupnjeviti ciklus izgaranja) [10]

2.3.3. Mlaznica

Mlaznice funkcioniraju tako da plin pod visokim pritiskom s molekulama koje idu u svim smjerovima pretvore u tok vrlo velike brzine gdje je taj tok, u idealnim uvjetima, usmjeren točno suprotno od smjera u kojem raketa putuje. To možemo ostvariti tako da suzimo prolaz (grlo) u mlaznici, a zbog toga što je protok mase konstantan plinovi na tom suženju će morati ubrzati.

Mogli bi zaključiti da je bolje imati što manju površinu grla, no u praksi to nije tako. Kada brzina plinova u grlu prijeđe lokalnu brzinu zvuka dolazi do prigušenja protoka, tako da je idealno da brzina plinova u grlu bude što bliža lokalnoj brzini zvuka. Ta lokalna brzina zvuka raste s korijenom temperature pa nam je jedhina granica te brzine temperatura tališta materijala mlaznice.

Zbog velikih temperatura u mlaznici lokalna brzina zvuka može biti 5 do 10 puta veća od brzine zvuka u zraku [11]. Slika 9 prikazuje temperaturu, tlak i brzinu u ovisnosti na lokaciju u mlaznici.

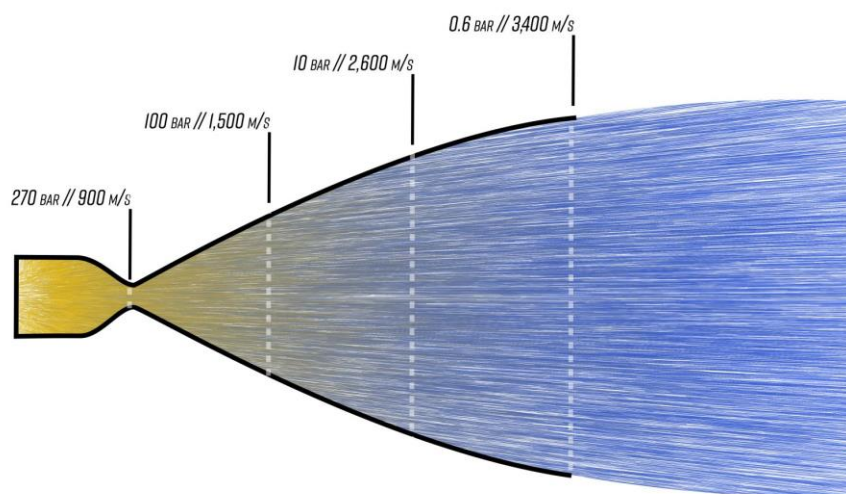


Slika 9. Prikaz dijagrama de Laval mlaznice [12]

Inženjeri dizajniraju mlaznice tako da budu savršenog oblika za pretvaranje toplinske energije u kinetičku energiju.

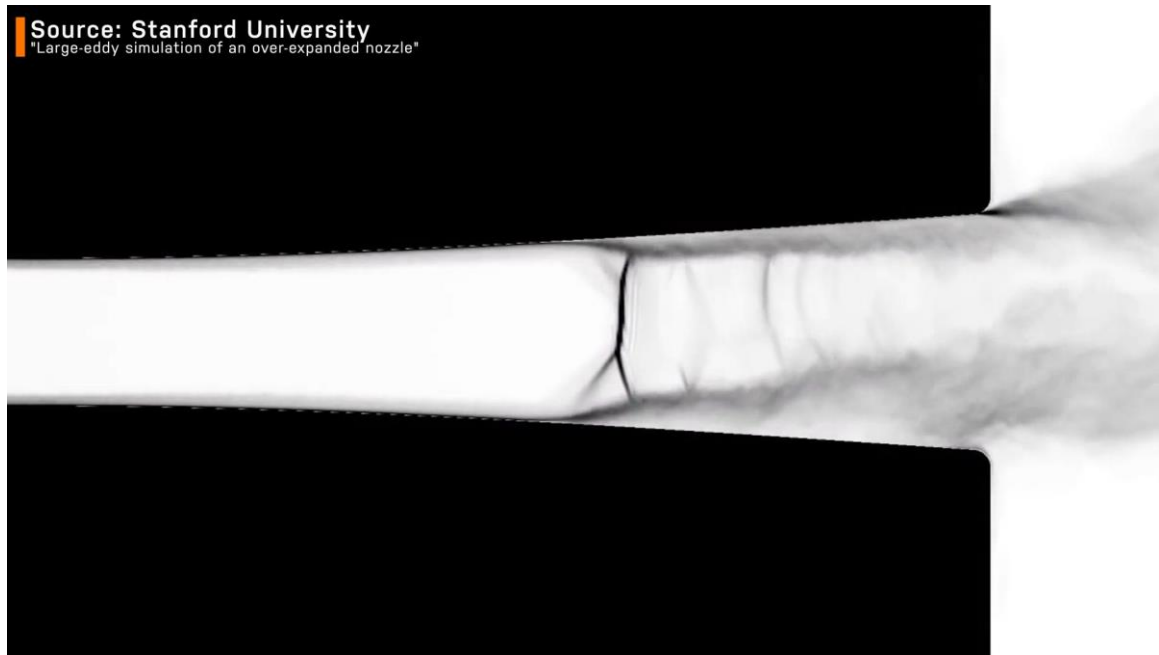
Kako se površina poprečnog presjeka mlaznice povećava, dolazi do širenja volumena plinova pa time i do smanjenja tlaka i temperature tih plinova. Zbog razlika tlaka dolazi do ubrzanja plinova gdje područje većeg tlaka gura plinove u području nižeg tlaka. Stoga što je manji tlak na izlazu iz mlaznice to ćemo više ubrzati ispušni plin.

APPROXIMATE PRESSURE & VELOCITY



Slika 10. Ovisnost tlaka naspram brzini ispušnog plina u Raptor motoru [11]

Ali tada nastaje novi problem. Kako lansiramo rakete u atmosferi koja je na 1 bar, a tlak ispušnih plinova nam je blizu 0 bara dolazi do toga da nam zrak ulazi u mlaznicu. Ta pojava se zove odvajanje protoka i može vrlo lako uništiti mlaznicu.



Slika 11. Simulacija odvajanje protoka [11]

Ispušni plinovi mogu biti maksimalno 40% manjeg tlaka od atmosferskog (1 bar) prije nego što dođe do odvajanja protoka pa se mlaznice motora za rad u atmosferi prave tako da im je tlak ispušnog plina na izlazu mlaznice 0.6 bara.

Moguće je postići razliku tlakova od 54% prije nego što dođe do odvajanja protoka tako da se zidovi mlaznice blago saviju prema unutra kao što je bio slučaj kod glavnih motora Space Shuttle-a [11].

2.3.4. Gorivo

Kada govorimo o gorivu koje rakete mogu koristiti, razlikujemo dvije glavne vrste:

- Kruto gorivo
- Tekuće gorivo

Kruto gorivo je upravo to, kruto (zapravo više nalikuje gumi). Napravljeno je uglavnom od mješavine granula krutog oksidansa, kao što je amonijev nitrat, amonijev dinitolmid, amonijev perklorat, ili kalijeva salitra u polimernom vezivom sredstvu, s pahuljicama ili

prahom energetskih spojeva goriva. Plastifikatori, stabilizatori, i/ili modifikatori brzine izgaranja se također mogu dodati.

Prednost ovog goriva je ta što je jeftino i jednostavno je s njime rukovati i skladištiti ga. Koriste se kod prvog stupnja, koji se nalazi sa strane rakete (paralelni stupanj), kod kojeg je potrebna velika snaga da raketa što prije izađe iz atmosfere. Također jednom kada se to gorivo zapali ne može se ugasiti jer je oksidans umješan direktno u gorivo.

I naravno imamo još tekuće gorivo koje je najzastupljenije. Prednost tekućeg goriva je ta što mogu razviti veće brzine ispušnih plinova pa time i veći specifični impuls. To je zato što tekući oksidansi imaju bolje performanse od krutih oksidansa. Korištenjem tekućeg oksidansa, tijekom izgaranja, razvijaju se puno veće temperature pa se time mogu dobiti i veće brzine ispušnih plinova. Također motori koji koriste tekuće gorivo gdje se oksidans ubrizgava mogu smanjivati i povećavati potisak, te se mogu ugasiti i ponovno upaliti [13].

Dobro je spomenuti da još postoje hibridna goriva gdje se kruto gorivo koristi s tekućim oksidansom, i inertna pogonska goriva gdje gorivo služi kao reakcijska masa koja je ubrzana uz pomoć magnetnog polja ili je zagrijavana ili je pod pritiskom.

Kada govorimo o gorivu raketa neizbježno je da se nešto ne kaže o specifičnom impulsu. Specifični impuls I nam kaže koliko efikasno raketni motor pretvara reakcijsku masu u potisak, a mjerna jedinica mu je s (sekunda). Vrijednost specifičnog impulsa rakete možemo dobiti tako da integriramo silu potiska rakete po vremenu ili podijelimo brzinu ispušnih plinova s gravitacijom (to vrijedi ako je mlaz plina savršeno suprotno usmjeren od gibanja rakete). Svako gorivo ima drugačiji teoretski maksimalni specifični impuls koji ovisi o gustoći kemijske energije goriva i o molarnoj masi [14].

1. Teoretski maksimalni specifični impulsi nekih goriva [14]

Gorivo	Oksidans	Teoretski maksimalni specifični impuls
Vodik	Kisik	532.5 s
Metan	Kisik	458.7 s
Kerozin	Kisik	470.2 s

3. OPIS MATEMATIČKOG MODELA

U ovom poglavlju ćemo opisati matematički model i navesti formule koje su nam potrebne za rješavanje 3 problema. Želimo naći ovisnost omjera konačne brzine i brzine mlaza plina o omjeru mase rakete i goriva. Zatim ubrzanje, brzinu i put rakete u toku rada motora, te za zadnji problem želimo vidjeti kako se raketa giba kada uzmemo u obzir djelovanja gravitacije sve dok ne padne natrag na zemlju.

3.1. Ovisnost omjera konačne brzine i brzine mlaza plina o omjeru masa rakete i goriva

Gibanje rakete funkcionira na principu očuvanja količine gibanja. Zamislimo da imamo eksploziju u zatvorenoj kutiji. Ta eksplozija, u biti predstavlja vrlo brzu ekspanziju komprimiranog plina koji pritišće kutiju jednoliko sa svih strana. Sada zamislimo da u toj istoj kutiji imamo otvor na dnu. Pošto ta eksplozija pritišće sve strane kutije jednoliko, sila na vrhu kutije nije izbalansirana sa silom na dnu kutije jer sada ne postoji dno od kojeg bi se mogla odgurivati.

Rezultat je da kutija putuje okomito s obzirom na otvor zbog sile koju stvara ekspandirajući plin na suprotnoj strani otvora.

Prema Newton-ovim zakonima gibanja, očuvanje količine gibanja glasi:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

Pa možemo zapisati:

$$\Delta v_1 = v_2 \frac{\Delta m_2}{m_1} \quad (2)$$

Ovom formulom možemo naći promjenu brzine samo za djelomična odbacivanja mase, ali kako raketa konstantno odbacuje vrlo sitne dijelove mase, konačna brzina se računa prema formuli [15]:

$$v_k = v_0 \cdot \ln \frac{m_0}{m_k} \quad (3)$$

Gdje je:

v_k - Konačna brzina rakete

v_0 - Brzina ispušnih plinova

m_0 - Početna masa rakete

m_k - Konačna masa rakete

Iz izraza (3) možemo naći ovisnost omjera konačne brzine i brzine mlaza plina o omjeru masa rakete i goriva, a naći ćemo ovisnost tako da će nam dvije proizvoljne varijable biti stalne, za treću ćemo uzeti više vrijednosti s kojima ćemo dobiti vrijednosti četvrte varijable. Zatim s tako dobivenim vrijednostima izračunamo omjere.

Tablica 2. Primjeri omjera početne i konačne mase raketa

Raketa	Masa tijekom polijetanja	Krajnja masa	Omjer početne i krajnje mase
Ariane 5 (raketa + teret)	746 tona [16]	2.7 + 16 tona [16]	39.9
Titan 23G prvi stupanj	117.02 tona [17]	4.76 tona [17]	24.6
Saturn V (raketa + teret)	3079.895 tona [18]	13.3 + 180 tona [18]	15.9
Space shuttle (raketa + teret)	2029.633 tona [19]	99.117 + 24.4 tona [19]	16.4
Saturn 1B prvi stupanj	448.648 tona [20]	41.594 tona [20]	10.8

Dobro je napomenuti da tereti iz tablice 2. mogu varirati ovisno o tome na koju visinu se trebaju poslati.

3.2. Ubrzanje, brzina i put rakete u toku rada motora

Za drugi problem nam je potrebno znati ubrzanje, brzinu i put u određenom vremenu. Ubrzanje je promjena brzine podijeljena s promjenom vremena, stoga ubrzanje rakete možemo dobiti tako da izraz (2) podijelimo s vrlo kratkim vremenom Δt :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v_0 \frac{\Delta m / \Delta t}{m} \quad (4)$$

$\Delta m/\Delta t$ nam predstavlja masu plinova koju raketa izbaci u jednoj sekundi, odnosno to je masa goriva koja sagori pa time i masa koju raketa izgubi u jednoj sekundi. Zbog jednostavnosti naša raketa će jednoliko gubiti masu odnosno sagorijevati gorivo, stoga $\Delta m/\Delta t$ možemo zapisati kao koeficijent k pa je tada masa rakete u nekom trenutku t , $m=m_0-k\cdot t$, zatim ubrzanje rakete u bilo kojem trenutku iznosi [15]:

$$a(t) = v_0 \frac{k}{m_0 - k \cdot t} \quad (5)$$

Iz izraza (5) možemo primijetiti da ubrzanje rakete nije stalno, već se povećava kako raketa gubi masu. U praksi je potrebno paziti da brzina rakete ne bude prevelika dok putuje kroz atmosferu zbog stvaranja dinamičkog pritiska koji može uništiti raketu. Taj dinamički pritisak je veći pri većoj brzini i pri većoj gustoći zraka. Stoga rakete koje putuju kroz atmosferu i koje imaju motore velike snage moraju imati mogućnost smanjenja potiska. Za naše potrebe zbog jednostavnosti ćemo zanemariti otpor zraka a potisak rakete će nam biti stalno maksimalan. Taj potisak je zapravo stalan što se možemo uvjeriti tako da izraz (5) pomnožimo s $m=m_0-k\cdot t$ pa ćemo dobiti formulu za silu [15]:

$$F = m \cdot a = v_0 \cdot k \quad (6)$$

Nadalje, brzinu rakete u nekom trenutku ćemo jednostavno dobiti integriranjem izraza (5) pošto je brzina jednaka površini ispod grafa (t , a):

$$v(t) = v(0) + v_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - k \cdot t} \quad (7)$$

Isto tako ćemo dobiti i put rakete, pošto je put površina ispod (t , v) grafa, izraz (7) možemo integrirati:

$$x(t) = v_0 \cdot t(\ln(m_0) + 1) + \frac{v_0}{k} [(m_0 - k \cdot t) \ln(m_0 - k \cdot t) - m_0 \cdot \ln(m_0)] \quad (8)$$

3.3. Gibanje rakete s gravitacijom uzetom u obzir

Za zadnji problem uzimamo u obzir djelovanje gravitacije. Pošto je gravitacija konstantna i djeluje u suprotnom smjeru od ubrzanja rakete, izraz (5) oduzmemo s vrijednosti ubrzanja gravitacije:

$$a_g(t) = v_0 \frac{k}{m_0 - k \cdot t} - g \quad (9)$$

Integriranjem izraza (9) u svrhu dobivanja formule za brzinu dobivamo:

$$v_g(t) = v(0) + v_0 \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - k \cdot t} - g \cdot t \quad (10)$$

Za dobivanje puta rakete integriramo izraz (10):

$$x_g(t) = v_0 \cdot t(\ln(m_0) + 1) + \frac{v_0}{k} [(m_0 - k \cdot t) \ln(m_0 - k \cdot t) - m_0 \cdot \ln(m_0)] - \frac{g^2 \cdot t}{2} \quad (11)$$

Nakon što potroši sve gorivo (za naš slučaj će biti poslije 20 sekundi), raketa se ponaša kao projektil ispaljen uvis, stoga vrijede druge formule [15]:

$$a_{20}(t) = -g \quad (12)$$

$$v_{20}(t) = v_0(20) - g \cdot t \quad (13)$$

$$x_{20}(t) = x_0(20) + v_0(20) \cdot (t - 20) - \frac{g^2 \cdot (t - 20)^2}{2} \quad (14)$$

Ove vrijednosti i dalje ne reflektiraju stvarne vrijednosti jer smo zanemarili otpor zraka. Međutim kako se raketa uspinje tako joj se povećava brzina, a ujedno se i smanjuje otpor zraka, još k svemu tome temperatura zraka nije uvijek ista pa i to igra ulogu u gustoći zraka. Tako da ne postoji jedinstvena formula koja bi mogla opisati silu trenja koja se stvara tijekom leta rakete. Također smo zanemarili i smanjenje gravitacije, ali pošto se gravitacija u najvišoj točki leta smanji za par posto njen doprinos je neznačajan.

4. RJEŠAVANJE PROBLEMA UZ POMOĆ PYTHON PROGRAMA

Vrijednosti s kojima ćemo računati će biti:

$$m_0 = 200 \text{ kg}$$

$$v_0 = 2000 \text{ m/s}$$

$$k = 5 \text{ kg/s}$$

$$m_g = 100 \text{ kg (masa goriva)}$$

Probleme ćemo riješiti uz pomoć Pythona i rezultate prikazati u obliku grafova.

Program:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mg = np.linspace(20, 195, 1000) # Lista koja predstavlja masu od 20 do 195 kg
podijeljena na 1000 jednakih dijelova

vp = 2000 # Brzina ispušnih plinova [m/s]
k = 5 # Brzina izbacivanja mase [kg/s]
m = 200 # Masa rakete s gorivom [kg]

vk = vp * np.log(m / (m - mg))

fig1, ax1 = plt.subplots()

vo = vk / vp
mo = m / (m - mg)

ax1.plot(mo, vo)
ax1.set_title("Ovisnost omjera konačne brzine i brzine mlaza plina o omjeru masa
rakete i goriva ")
ax1.set_xlabel("m/mk")
ax1.set_ylabel("vk/vp")
```

```

ax1.axhline(color = 'black')
ax1.axvline(color = 'black')
ax1.grid(True)

t = [] # Lista vremena
a = [] # Lista ubrzanja
v = [] # Lista brzine
x = [] # Lista položaja

i = 0
while i <= 2000:
    vrijeme = i / 100
    t.append(vrijeme)
    i += 1

j = 0
for i in t:
    b = vp * (k / (m - k * t[j]))
    c = (vp * np.log(m / (m - k * t[j]))) / 1000
    d = (vp * t[j] * (np.log(m) + 1) + (vp / k) * ((m - k * t[j]) * np.log(m - k * t[j]) - m *
np.log(m))) / 1000
    j += 1
    a.append(b)
    v.append(c)
    x.append(d)

# Izrada grafova a o t, v o t, x o t

fig2, ax2 = plt.subplots(3, 1)

ax2[0].plot(t, a)
ax2[0].set_xlabel("t [s]")
ax2[0].set_ylabel("a [m/s^2]")
ax2[0].set_title("Ovisnost ubrzanja rakete o vremenu")
ax2[0].axhline(color = 'black')

```

```
ax2[0].axvline(color = 'black')
ax2[0].grid(True)
```

```
ax2[1].plot(t, v)
ax2[1].set_xlabel("t [s]")
ax2[1].set_ylabel("v [km/s]")
ax2[1].set_title("Ovisnost brzine rakete o vremenu")
ax2[1].axhline(color = 'black')
ax2[1].axvline(color = 'black')
ax2[1].grid(True)
```

```
ax2[2].plot(t, x)
ax2[2].set_xlabel("t [s]")
ax2[2].set_ylabel("x [km]")
ax2[2].set_title("Ovisnost puta rakete o vremenu")
ax2[2].axhline(color = 'black')
ax2[2].axvline(color = 'black')
ax2[2].grid(True)
```

```
# Uzimanje gravitacije u obzir
```

```
g = 9.81 # Ubrzanje uslijed djelovanja gravitacije [m/s^2]
```

```
t = [] # Lista vremena
a = [] # Lista ubrzanja
v = [] # Lista brzine
x = [] # Lista položaja
tp = [] # Lista pomoćnog vremena
```

```
i = 0
```

```
while i <= 27101:
```

```
    vrijeme = i / 100
```

```
    t.append(vrijeme)
```

```
    i += 1
```

```

j = 0
i = 0
while j <= 27101:

    while j <= 2000: # Unutar petlje se računaju točke ubrzanja, brzine i puta rakete dok
je vrijeme manje od 20 sekundi,
        # odnosno prije nego što raketa potroši sve gorivo
        ubrzanje_rakete = (vp * (k / (m - k * t[j]))) - g
        brzina_rakete = ((vp * np.log(m / (m - k * t[j])) - (g * t[j]))) / 1000
        polozaj_rakete = ((vp * t[j] * (np.log(m) + 1) + (vp / k) * (
            (m - k * t[j]) * np.log(m - k * t[j]) - m * np.log(m))) - ((g * t[j] * t[j]) / 2)) / 1000
        j += 1
        a.append(ubrzanje_rakete)
        v.append(brzina_rakete)
        x.append(polozaj_rakete)

    tp.append(t[j] - 20.01)
    b = - g
    nova_brzina = brzina_rakete - (g * tp[i]) / 1000
    novi_polozej = polozaj_rakete + brzina_rakete * tp[i] - ((g * tp[i] * tp[i]) / 2) / 1000
    a.append(b)
    v.append(nova_brzina)
    x.append(novi_polozej)
    i += 1
    j += 1

# Izrada grafova a o t, v o t, x o t

fig3, ax3 = plt.subplots(3, 1)

ax3[0].plot(t, a)
ax3[0].set_xlabel("t [s]")
ax3[0].set_ylabel("a [m/s^2]")
ax3[0].set_title("Ovisnost ubrzanja rakete o vremenu")
ax3[0].axhline(color = 'black')

```



```
ax3[0].axvline(color = 'black')
ax3[0].grid(True)
```

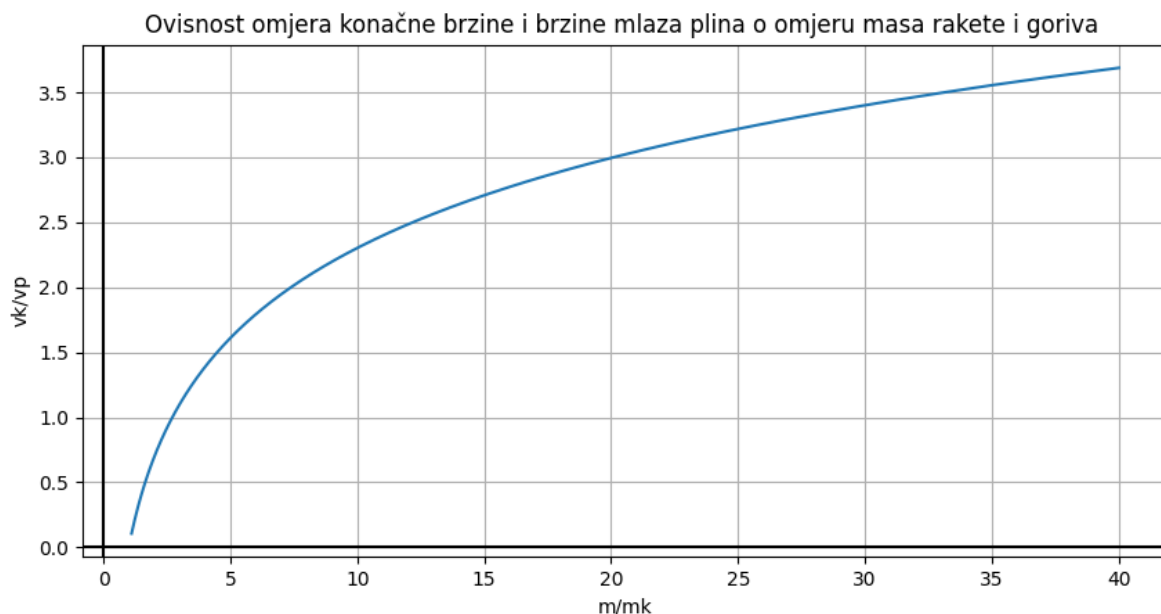
```
ax3[1].plot(t, v)
ax3[1].set_xlabel("t [s]")
ax3[1].set_ylabel("v [km/s]")
ax3[1].set_title("Ovisnost brzine rakete o vremenu")
ax3[1].axhline(color = 'black')
ax3[1].axvline(color = 'black')
ax3[1].grid(True)
```

```
ax3[2].plot(t, x)
ax3[2].set_xlabel("t [s]")
ax3[2].set_ylabel("x [km]")
ax3[2].set_title("Ovisnost puta rakete o vremenu")
ax3[2].axhline(color = 'black')
ax3[2].axvline(color = 'black')
ax3[2].grid(True)
```

```
plt.show()
```

5. REZULTATI

5.1. Prvi problem



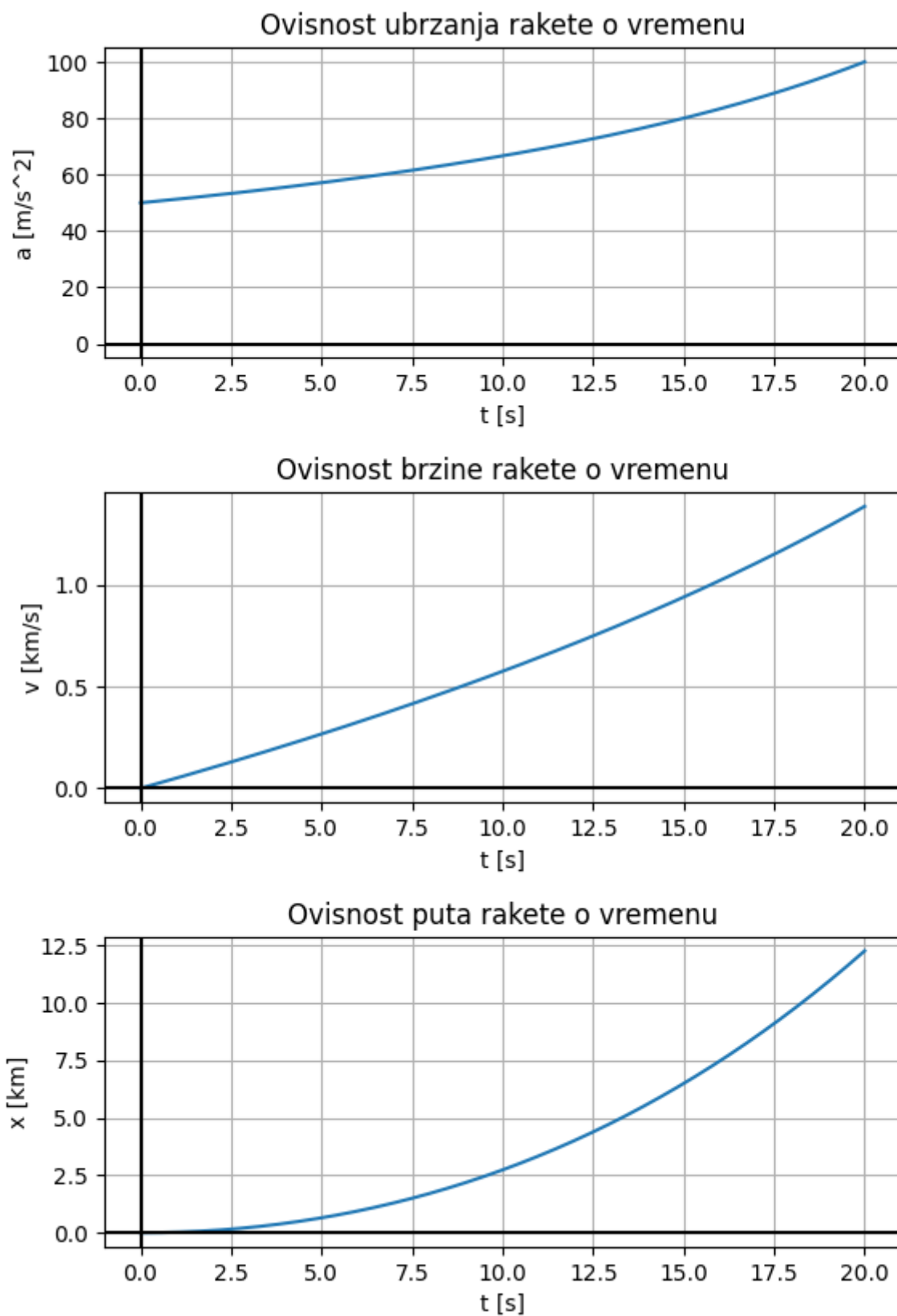
Slika 12. Grafički prikaz ovisnosti omjera konačne brzine i brzine mlaza plina o omjeru masa rakete i goriva

Za računanje omjera smo uzeli vrijednosti brzine ispuha plina od 2000 m/s, masu rakete 200 kg i mijenjali smo masu goriva od 20 do 195 kg kako bi dobili raspon omjera od 1.11 do 40 (simulirali smo vrijednosti do 40 kako bi vidjeli okvirno omjere konačne brzine i brzine ispušnog plina raketa iz tablice 2). Vrijednosti tog raspona omjera masa smo pridružili vrijednostima omjera krajnje brzine rakete i brzine ispušnih plinova gdje smo krajnju brzinu rakete izračunali preko tog raspona masa goriva. To je rezultiralo grafom na slici 12.

Te vrijednosti smo uzeli kako bi nam program bio jednostavniji, no mogli smo uzeti bilo koje druge vrijednosti brzine ispušnog plina i masa rakete i goriva. U konačnici bi dobili istu krivulju s istim vrijednostima.

Iz dobivenog grafa možemo očitati koju će krajnju brzinu naša raketa imati. Omjer mase i goriva naše rakete iznosi 2 i očitavanjem s grafa dobivamo omjer krajnje brzine i brzine ispušnog plina od 0.693, a pošto nam je brzina ispušnog plina 2000 m/s, konačna brzina rakete nam iznosi 1386 m/s.

5.2. Drugi problem



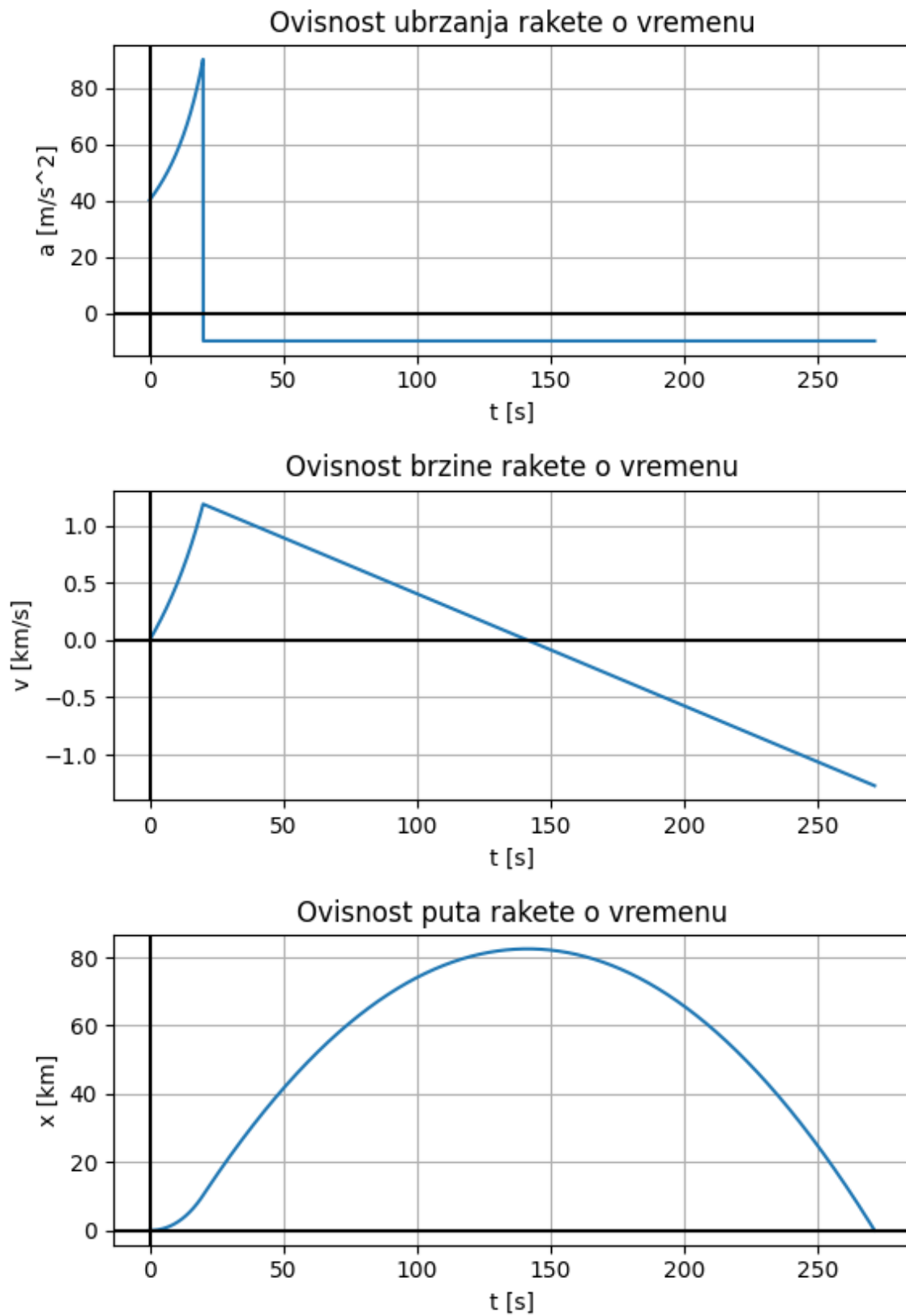
Slika 13. Grafički prikaz ubrzanja, brzine i puta rakete u toku rada motora

Kako smo spomenuli u 3.2. da se raketi povećava ubrzanje kako troši gorivo pa time i smanjuje težinu, upravo to možemo vidjeti u ovim grafovima. Sila potiska je stalna i u našem slučaju iznosi 10 kN prema formuli iz izraza (6). U početku leta rakete, masa rakete iznosi 200 kg pa će ubrzanje iznositi 50 m/s^2 jer je $a=F/m$, a na kraju leta masa iznosi 100 kg, duplo manje nego na početku stoga će i ubrzanje biti duplo veće odnosno 100 m/s^2 . Točno to i možemo očitati iz grafa.

Grafove ovisnosti brzine rakete o vremenu i ovisnosti puta rakete o vremenu smo dobili iz izraza (7) i (8) respektivno. Uvrštavanjem $t=20$ u formule dobivamo vrijednosti 1386 m/s za brzinu rakete i 12274 m za prijeđeni put rakete, što se poklapa s grafovima i možemo zaključiti da je program ispravno programiran.

Naravno ove vrijednosti vrijede u idealnom slučaju kada na raketu ne djeluje sila teža ili otpor zraka stoga smo odlučili napraviti još jedan set grafova da vidimo kako će se ponašati putanja rakete kada ubacimo djelovanje gravitacije u formule.

5.3. Treći problem



Slika 14. Grafički prikaz gibanja rakete s gravitacijom uzetom u obzir

Sada kada smo uzeli u obzir djelovanje gravitacije vrijednosti u 20-oj sekundi su promijenjene za otprilike 10%, ali kako sada djeluje gravitacija možemo simulirati putanju rakete sve dok ne padne na tlo.

Nakon 20 sekundi raketa potroši sve gorivo što znači da više ne stvara potisak odnosno prestane ubrzavati tako da joj sada zbog djelovanja gravitacije ubrzanje iznosi -9.81 m/s^2 s obzirom na zemlju (počinje usporavati).

Isto tako vrijedi i za brzinu. Pošto je ubrzanje negativno raketa nakon 20 sekundi svake sekunde uspori za 9.81 m/s . To se na grafu očituje kao pravac s negativnim nagibom. Kada je brzina pozitivna raketa putuje od zemlje, a kada pređe x os, otprilike 140 sekundi nakon polijetanja, postane negativna što znači da počinje padati prema zemlji. Na grafu puta rakete u ovisnosti o vremenu to se može i vidjeti. Kada je brzina rakete pozitivna visina na kojoj se raketa nalazi raste, kada je brzina 0 tada možemo vidjeti da se nalazi na najvišoj točki, a kada je brzina negativna visina se počinje smanjivati.

6. ZAKLJUČAK

U današnje vrijeme razvoj raketa je znatno ubrzao zahvaljujući SpaceX-ovom trudu. To postižu tako da svakim novim letom prikupljaju podatke uz pomoć kojih poboljšavaju rakete za sljedeća lansiranja. Još k tome njihove rakete se mogu koristiti više puta što smanjuje troškove izrade novih raketa. Pošto su modelne rakete vrlo skupe za ovaj završni rad nemamo na raspolaganju rakete kojima bi mogli usporediti naš model sa stvarnim podacima. Tako da smo ovim završnim radom htjeli dati uvid u osnove funkcioniranja raketa i modeliranja njihovog gibanja.

LITERATURA

- [1] A brief history of rocketry, dostupno na: <https://science.ksc.nasa.gov/history/rocket-history.txt>, pristupljeno 12.5.2021.
- [2] Leitch, W.: *God's Glory in the Heavens*, 1862.
- [3] Goddard, R.: *A Method of Reaching Extreme Altitudes*, 1919.
- [4] Fire arrow, dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Fire_arrow, pristupljeno 31.5.2021.
- [5] NASA, dostupno na: <https://www.nasa.gov/audience/forstudents/5-8/features/nasa-knows/what-is-a-satellite-58.html>, pristupljeno 13.5.2021.
- [6] Twitter, dostupno na: <https://twitter.com/aaronkemmer/status/1245622616955613186>, pristupljeno 31.5.2021.
- [7] Wayward Satellites Test Einstein's Theory of General Relativity, dostupno na: <https://www.scientificamerican.com/article/wayward-satellites-test-einsteins-theory-of-general-relativity/#:~:text=Einstein's%20theory%20predicts%20time%20will,is%20known%20as%20gravitational%20redshift.>, pristupljeno 19.5.2021.
- [8] Rocket parts, dostupno na: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/rockpart.html>, pristupljeno 31.5.2021.
- [9] NASA, dostupno na: <https://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/conghand/vehicles.htm>, pristupljeno 13.5.2021.
- [10] Is SpaceX's Raptor engine the king of rocket engines? , dostupno na: <https://everydayastronaut.com/raptor-engine/>, pristupljeno 14.5.2021.
- [11] Are Aerospike Engines Better Than Traditional Rocket Engines?, dostupno na: <https://everydayastronaut.com/aerospikes/>, pristupljeno 19.5.2021.
- [12] de Laval nozzle, dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/De_Laval_nozzle, pristupljeno 31.5.2021.
- [13] NASA, dostupno na: <https://history.nasa.gov/conghand/propelnt.htm>, pristupljeno 27.5.2021.
- [14] The upper limit of specific impulse for various rocket fuels, dostupno na: <https://thephysicsofspacex.files.wordpress.com/2016/07/isp-upper-limits.pdf>, pristupljeno 27.5.2021.
- [15] Babić, E., Karmelić, A.: Numeričko modeliranje složenih gibanja, 1988.
- [16] Technical features, dostupno na: <https://ariane5.cnes.fr/en/technical-features-0>,

pristupljeno 28.5.2021.

[17] Titan 23G Data Sheet, dostupno na:

<https://www.spacelaunchreport.com/titan2.html>, pristupljeno 28.5.2021.

[18] Saturn V, dostupno na: <http://www.astronautix.com/s/saturnv.html>, pristupljeno 28.5.2021.

[19] Space Shuttle, dostupno na: <http://www.astronautix.com/s/spaceshuttle.html>, pristupljeno 28.5.2021.

[20] Saturn IB, dostupno na: <http://www.astronautix.com/s/saturnib.html>, pristupljeno 28.5.2021.

