

# ANALIZA SVOJSTAVA ELIPTIČNOG FILTRA

---

**Lacković, Nikola**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:715722>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-10**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
STROJARSKI ODJEL  
STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE

NIKOLA LACKOVIĆ

**ANALIZA SVOJSTAVA ELIPTIČNOG  
FILTRA**

ZAVRŠNI RAD

KARLOVAC, 2021.

KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES  
MECHANICAL ENGINEERING DEPARTMENT  
PROFESSIONAL UNDERGRADUTE STUDY OF MECHATRONICS

NIKOLA LACKOVIĆ

**ELLIPTIC-FUNCTION FILTER  
PROPERTIES**

FINAL PAPER

KARLOVAC, 2021.

KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES  
STROJARSKI ODJEL  
STRUČNI STUDIJ MEHATRONIKE

NIKOLA LACKOVIĆ

**ANALIZA SVOJSTAVA ELIPTIČNOG  
FILTRA**

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

dr.sc. Anamarija Kirin

KARLOVAC, 2021.



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES  
Trg J.J.Strossmayera 9  
HR-47000, Karlovac, Croatia  
Tel. +385 - (0)47 - 843 - 510  
Fax. +385 - (0)47 - 843 - 579



## VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

Stručni studij: Mehatronika

Usmjerenje:.....Karlovac, .....

## ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

Student:Nikola Lacković

Matični broj:0112615039

Naslov: Analiza svojstava eliptičnog filtra

Opis zadatka: U Završnom radu opisati postupak projektiranja filtra korištenjem eliptične aproksimacije. Primijeniti opisani postupak na konkretan filter. Usporediti svojstva eliptičnog filtra s filterima dobivenim drugim aproksimacijama. Analizirati ovisnost reda eliptičnog filtra o specifikacijama filtra.

Koristiti se stručnom literaturom, radnim materijalima, Zakonima i Pravilnicima, ostalom stručnom literaturom i konzultirati se s mentorom. Završni rad izraditi sukladno Pravilniku VUKA.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datum obrane:

23.3.2021.

.....

10.9.2021.

Mentor:

Predsjednik Ispitnog povjerenstva:



## **PREDGOVOR**

U izradi ovog završnog rada proširio sam svoje znanje iz područja obrade signala te sam shvatio koliko je truda potrebno da bi se projektirao analogni filter koristeći metode aproksimacije. Znanje i iskustvo stečeno pisanjem ovog rada će mi uvelike pomoći u nastavku studiranja. Želim se, prije svega, zahvaliti mentorici Anamariji Kirin na pomoći i velikom razumijevanju prilikom pisanja rada, čime mi je puno pomogla. Na kraju, želim se zahvaliti svima koji su mi na bilo koji način pomogli da privedem svoj studij i ovaj završni rad kraju.

## **SAŽETAK:**

U ovom završnom radu opisati ću i usporediti svojstva Eliptične metode aproksimacije analognih filtara s ostalim metodama aproksimacija koje smo obradili na kolegiju Obrada Signala. U drugom poglavlju ću objasniti postupak projektiranja analognog filtra i kako ga transformirati u željeni oblik. U trećem poglavlju ću obraditi ostale metode aproksimacije, a u četvrtom ću usporediti sve metode, te vidjeti kako neki parametri utječu na njihov odziv.

Ključne riječi: eliptični filter, metode aproksimacije, usporedba odziva, projektirane filtra



## **ABSTRACT:**

In this final paper I will describe and compare the Elliptic-function filter properties with all other approximation filter types which we studied during the course of Signal Processing. In the second chapter I will explain the procedure of designing an analog filter and transforming it into the desired form. In the third chapter I will go through the other analog filter approximation methods, and in the fourth chapter I will compare all the methods and see how some parameters affect their response.

Keywords: elliptical filter, approximation methods, response comparison, designing filters

## SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	1
<b>2. PROJEKTIRANJE FILTRA ELIPTIČNOM APROKSIMACIJOM</b> .....	2
2.1. Projektiranje niskopropusnog prototipa .....	2
2.2. Transformacija prijenosne funkcije niskopropusnog prototipa.....	5
<b>3. PRIKAZ I OPIS OSTALIH METODA APROKSIMACIJE</b> .....	7
3.1. Butterworth-ov filter .....	7
3.2. Čebiševljevi I filter .....	8
3.3. Čebiševljevi II filter.....	10
<b>4. USPOREDBA SVOJSTAVA FILTRA DOBIVENIM RAZLIČITIM TRANSFORMACIJAMA</b> .....	13
4.1. Utjecaj reda na odziv filtera .....	16
4.2. Utjecaj promjene frekvencije na odziv filtera.....	17
4.3. Utjecaj promjene gušenja u propusnom području na odziv filtera .....	19
4.4. Utjecaj promjene gušenja u području gušenja na odziv filtera .....	20
<b>5. ZAKLJUČAK</b> .....	22
<b>6. DODATCI</b> .....	23
<b>7. LITERATURA</b> .....	27
<b>8. POPIS SLIKA</b> .....	28
<b>9. POPIS TABLICA</b> .....	29

## 1. Uvod

Filtar (lat. *Filtrum*) u općem smislu riječi znači cjedilo, dok u elektrotehnici označava sklop ili uređaj koji služi za obradu električnih signala kojima zadržava ili ističe željene karakteristike, a neželjene umanjuje. Analogni filtri obrađuju analogni ili kontinuirani signal, a po konstrukciji su vrlo raznoliki. Pasivni filtri su sačinjeni od zavojnica, kondenzatora i otpornika, a sastavni dijelovi aktivnih filtara su kondenzatori i integrirana pojačala. Projektiranje klasičnih analognih filtara bazira se na metodama aproksimacije amplitudnih ili faznih specifikacija, koje se prikazuju, pomoću polinoma ili racionalnih funkcija. Digitalni filtri su precizniji od analognih i s razvojem tehnologije njihova primjena postaje sve šira [1].

Koristimo metode aproksimacije za projektiranje analognih filtara (Butterworth, Čebiševljevi I, Čebiševljevi II (Inverzni) i eliptični). Metode aproksimacije nam omogućavaju realizaciju filtara koji se svojim svojstvima približavaju idealnom filtru, ali nikad ne mogu u potpunosti postati idealni. Idealni filtar je filtar koji ima sveukupno propuštanje svih frekvencija u području propuštanja, a sveukupno gušenje svih frekvencija u području gušenja i to s naglim prijelazom iz područja propuštanja u područje gušenja. Ovaj filtar postoji samo u teoriji, jer je nemoguće postići njegove karakteristike, stoga se koristi za usporedbu sa stvarnim (praktični mogućim) filtrima, koristi se i u ovom radu za prikaz odstupanja metoda aproksimacije od idealnog filtra. (slika 4., 5. i 6.)

U ovom radu razmatramo metode aproksimacije analognih filtara, njihove karakteristike, proces proračuna za svaku metodu, te uspoređujemo njihov odziv na promjenu parametara.

## 2. Projektiranje filtra eliptičnom aproksimacijom

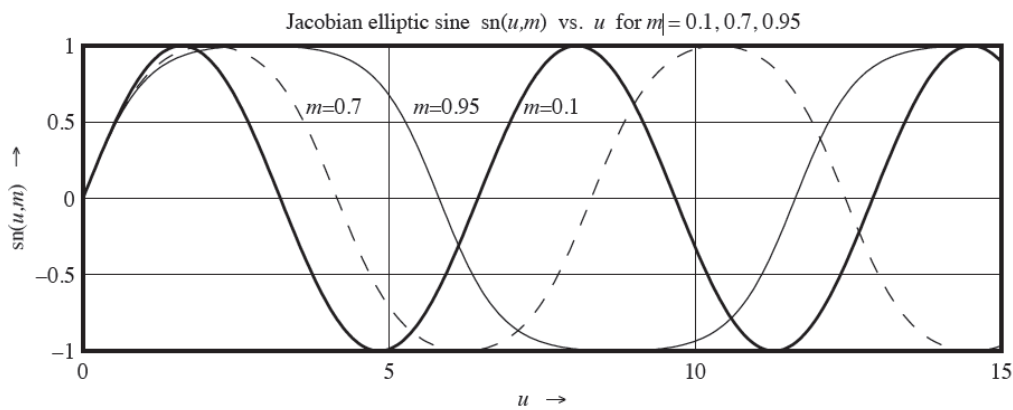
### 2.1. Projektiranje niskopropusnog prototipa

Eliptični filter valovit je i u području propuštanja i u području gušenja, te ima najbrži prijelaz („pad“) iz jednog u drugo područje. Valovitosti su izražene racionalnim funkcijama. U aproksimacijama se koristimo Čebiševljevim racionalnim funkcijama i „Jacobian“ eliptičnim funkcijama. Kalkulator ovih funkcija dostupan je na poveznicama

<https://keisan.casio.com/exec/system/1180573433>

i

<https://keisan.casio.com/exec/system/1180573451>.



**Slika 1.** „Jacobian“ eliptični sinus [2]

Frekvencijska karakteristika niskopropusnog prototipa za eliptičnu aproksimaciju dana je izrazom

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(v, \delta)}, \quad (1)$$

gdje je  $R_n^2(v, \delta)$  Čebiševljeva racionalna funkcija. Za projektiranje eliptičnog filtra, potrebni su nam sljedeći parametri:

$\varepsilon$  – valovitost u području propuštanja

$$\varepsilon^2 = 10^{0,1A_p} - 1, \quad (2)$$

$\delta$  – valovitosti u području gušenja

$$\delta^2 = (10^{0,1A_s} - 1) / \varepsilon^2, \quad (3)$$

$K(m)$  – potpuni eliptični integral prve vrste

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 x)^{-1/2} dx, \quad (4)$$

$K'(m)$  – komplementarni potpuni eliptični integral prve vrste  $\int_0^{\pi/2} (1 - m' \sin^2 x)^{-1/2} dx$ ,

$$K'(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m' \sin^2 x)^{-1/2} dx, \quad (5)$$

$k$  – modul takav da vrijedi  $k^2 = m$ , ( $k'^2 = 1 - k^2$ , komplementarni modul)

$m$  – parametar, ( $m' = 1 - m$ , komplementarni parametar  $m$ ).

Jednadžba za red eliptičnog filtra (zaokružuje se na prvi veći broj):

$$n = \frac{K\left(\frac{1}{v_s^2}\right) K'\left(\frac{1}{\delta^2}\right)}{K'\left(\frac{1}{v_s^2}\right) K\left(\frac{1}{\delta^2}\right)}. \quad (6)$$

Jednadžbe prigušenja za  $n$ -ti red eliptičnog filtra:

$$A_{dB}(v) = 10 \log[1 + \varepsilon^2 R_n^2(v, \delta)] \quad [\text{dB}]. \quad (7)$$

Jednadžba prigušenja na rubu područja propuštanja.

$$A_p = 10 \log(1 + \varepsilon^2). \quad (8)$$

Jednadžba prigušenja na rubu područja gušenja.

$$A_s = 10 \log(1 + \varepsilon^2 \delta^2). \quad (9)$$

Pomoću Čebiševljevog racionalnog polinoma iterativno pronalazimo konstantu  $C$ , polove  $p$  i nule  $z$  iz:

$$R_n^2(v, \delta) = C v^N \prod_{k=1}^{n/2} \frac{v^2 - z_k^2}{v^2 - p_k^2}, \quad (10)$$

pri čemu je  $N=0$  za parne  $n$ , a  $N=1$  za neparne  $n$ . Konstantu  $C$  tražimo iz uvjeta  $R_n^2(v, \delta) = 1$ , na kružnoj frekvenciji od 1 rad/s, čime dolazimo do:

$$C = \prod_{k=1}^{n/2} \frac{1 - z_k^2}{1 - p_k^2}, \quad \text{za } k=1 \dots n. \quad (11)$$

Polovi i nule filtra su imaginarni, a njihova lokacija ovisi o redu filtra  $n$

$$p_k = \frac{v_s}{z_k}, \quad k=1, 2, 3, \dots, (n/2), \quad (12)$$

gdje je  $v_s$  prva vrijednost  $v$  za koju vrijedi  $R_n(v, \delta) = \delta$ . Nule su za neparni  $n$  dane izrazom

$$z_k = sn \left[ \frac{2kK(m)}{n}, m \right], k=1,2,3,\dots,(n/2), \quad (13)$$

a za parne  $n$

$$z_k = sn \left[ \frac{(2k-1)K(m)}{n}, m \right], k=1,2,3,\dots,(n/2). \quad (14)$$

„Jacobian“ eliptični sinus se ponaša kao i trigonometrični sinus, samo što je spljošten po X-osi i produžen po Y-osi, time ima dulje trajanje maksimalne vrijednosti i dulji period. „Jacobian“ eliptični sinus je prikazan na slici 1.

Budući da su nam potrebne točne vrijednosti područja propuštanja, iterativno tražimo vrijednost  $v_s$  i  $K\left(\frac{1}{v_s^2}\right)$  koje zadovoljavaju vrijednosti za odabrani  $n$ . Za pronalazak prijenosne funkcije  $H_p(s) = \frac{KP(s)}{Q(s)}$  počinjemo s  $|H(v)^2|$ :

$$|H(v)^2| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(v, \delta)} = \frac{\prod^{n/2} (v^2 - z_k^2)^2}{\prod^{n/2} (v^2 - p_k^2)^2 + \varepsilon^2 C^N \prod^{n/2} (v^2 - z_k^2)^2}. \quad (15)$$

Zamjenom identiteta  $v^2 = -s^2$ , dobivamo prijenosnu funkciju u obliku  $H_p(s)H_p(-s)$ .

$$H_p(s)H_p(-s) = \frac{\prod^{n/2} (s^2 + p_k^2)^2}{\prod^{n/2} (s^2 + p_k^2)^2 + (-s^2)^N \varepsilon^2 C \prod^{n/2} (s^2 + z_k^2)^2}, \quad (16)$$

pri čemu je  $N=0$  za parne  $n$ , a  $N=1$  za neparne  $n$ .

Brojnik  $P(s)$  pronalazimo pomoću konjugiranih simetričnih korijena ( $\pm jp_k$ ):

$$P(s) = \prod_{k=1}^{n/2} (s^2 + p_k^2). \quad (17)$$

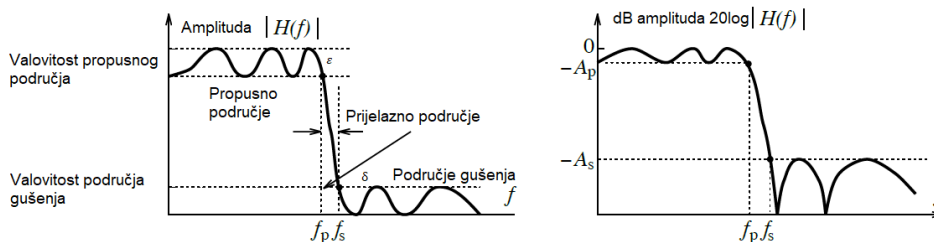
Nazivnik  $Q(s)$  pronalazimo u korijenima iz lijeve poluravnine:

$$Q(s)Q(-s) = 0 = \prod^{n/2} (s^2 + p_k^2)^2 + (-s^2)^N \varepsilon^2 C \prod^{n/2} (s^2 + z_k^2)^2, \quad (18)$$

pri čemu je ponovno  $N=0$  za parne  $n$ , a  $N=1$  za neparne  $n$ .

Ukoliko je  $n > 2$ , računanje korijena ove jednadžbe postaje zamorno, zbog puno ponavljanja, te nerijetko zahtijeva određene numeričke metode. Za pojačanje istosmjerne komponente, uzimamo  $K=Q(0)/P(0)$ , pošto je  $R_n(0, \delta)=0$  za neparne  $n$ , a  $R_n(0, \delta)=1$  za parne  $n$ ,  $H(0)=1$  za neparne  $n$ , a  $H(0)=1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$  za parne  $n$ . Prema tome, za vršnu vrijednost istosmjerne

komponente, uzimamo  $K=Q(0)/P(0)$  za neparne  $n$ , a  $K=Q(0)/[P(0) \sqrt{1 + \varepsilon^2}]$  za parne  $n$ . Slika 2. prikazuje odziv eliptičnog filtra.

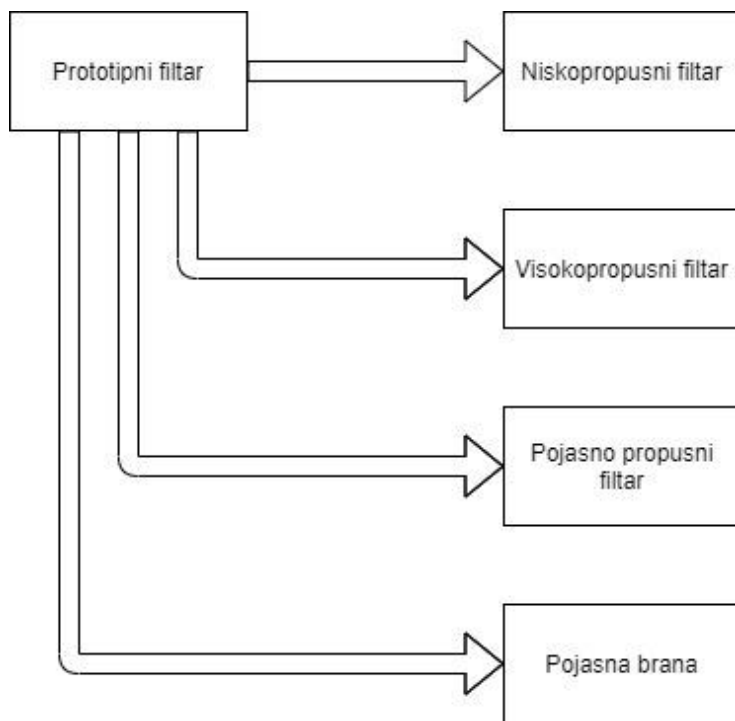


**Slika 2.** Odziv eliptičnog filtra [2]

## 2.2. Transformacija prijenosne funkcije niskopropusnog prototipa

Prijenosnu funkciju niskopropusnog prototipa potrebno je transformirati u prijenosnu funkciju željene vrste filtra. To činimo sljedećim transformacijama (slika 3.):

- prijenosnu funkciju prototipa pretvaramo u prijenosnu funkciju niskopropusnog filtra korištenjem zamjene  $s \Rightarrow \frac{s}{\omega_p}$
- prijenosnu funkciju prototipa pretvaramo u prijenosnu funkciju visokopropusnog filtra korištenjem zamjene  $s \Rightarrow \frac{\omega_p}{s}$
- prijenosnu funkciju prototipa pretvaramo u prijenosnu funkciju pojasnopropusnog filtra korištenjem zamjene  $s \Rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$ , gdje je  $\omega_0 = \omega_2 * \omega_3$ , geometrijska sredina pojasa propuštanja, a  $B$  je širina pojasa propuštanja  $B = \omega_3 - \omega_2$
- prijenosnu funkciju prototipa pretvaramo u prijenosnu funkciju pojasne brane korištenjem zamjene  $s \Rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$ , gdje je  $\omega_0 = \omega_1 * \omega_4$ , geometrijska sredina pojasa brane, a  $B_s$  je širina pojasa brane  $B = \omega_1 - \omega_4$ .



**Slika 3.** Transformacije prijenosne funkcije niskopropusnog prototipa u željenu vrstu filtra



### 3. Prikaz i opis ostalih metoda aproksimacije

**3.1.** Butterworth-ov filtar, linearan je u oba područja, te se još naziva i maksimalno ravan filtar. U odnosu na idealni filtar ima najmanje odstupanje (u području propuštanja), a amplituda opada s povećanjem frekvencije. Fazni odziv postaje sve više nelinearan s povećanjem reda filtra. [4]

Za n-ti red Butterworth-ovog filtra prigušenje je dano izrazom:

$$A_{dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2 v^{2n}).$$

Za projektiranje Butterworth-ovog filtra, potrebni su nam sljedeći parametri: valovitost  $\varepsilon$  koju procjenjujemo iz gušenja na rubu područja propuštanja  $A_p$

$$\varepsilon^2 = 10^{0,1A_p} - 1, \quad (19)$$

te red filtra  $n$  kojeg procjenjujemo iz gušenja na rubu područja gušenja  $A_s$

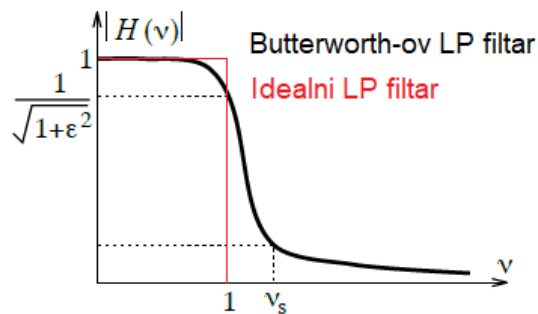
$$n = \frac{\log\left[\frac{(10^{0,1A_s} - 1)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^2}\right]}{\log v_s}, \quad (20)$$

gdje je  $v_s$  frekvencija ruba pojasa gušenja. Pojačanje niskopropusnog prototipa na rubu područja propuštanja,  $v_p = 1$ , dano je izrazima:

$$|H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \quad H_{dB}(1) = 10 \log(1 + \varepsilon^2). \quad (21)$$

Prigušenje na visokim frekvencijama za n-ti red Butterworth-ovog filtra možemo približno izraziti kao

$$A(v) = 10 \log(1 + \varepsilon^2 v^{2n}) \approx 10 \log(\varepsilon^2 v^{2n}) = 20 \log \varepsilon + 20n \log v. \quad (22)$$



**Slika 4.** Odziv Butterworthovog LP filtra [2]

Polovi prijenosne funkcije niskopropusnog prototipa nalaze se na kružnici polumjera  $R = (1/\varepsilon)^{1/n}$ ,

$$p_k = -R \sin \theta_k + jR \cos \theta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

gdje je  $\theta_k$  kut u odnosu na y-os

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Na slici 4. prikazana je frekvencijska karakteristika niskopropusnog (eng. *Low pass*, LP) Butterworthovog filtra zajedno s frekvencijskom karakteristikom idealnog LP filtra.

Ukoliko prigušenje na rubu pojasa propuštanja iznosi 3dB, valovitost iznosi 1, a polovi leže na jediničnoj kružnici. Koeficijenti za polinomno uklapanje pokazuju simetriju, stoga nam je potrebna samo polovica koeficijenata da bi mogli izračunati  $Q_3(S)$ . U praksi možemo odmah krenuti s ovakvim filtrom i koristiti skaliranje i/ili frekventni pomak za konačni filter. Polinomno uklapanje je operacija kojom opisujemo krivulju koja prikazuje odziv filtra, tj. prema redu filtra odabiremo polinom koji najbolje opisuje odziv filtra. Polinomi ovise o redu filtra i za prvih šest redova dani su u Tablici 1.

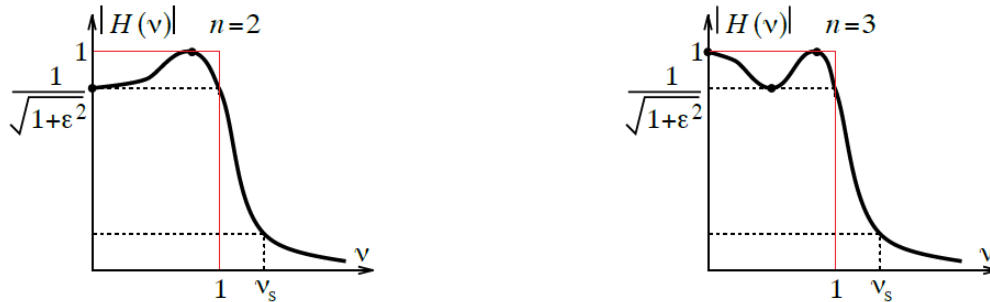
**Tablica 1.** Tablica polinoma

Red filtra, $n$	Nazivnik $Q(s)$ u polinomnom obliku
1	$1 + s$
2	$1 + \sqrt{2}s + s^2$
3	$1 + 2s + 2s^2 + s^3$
4	$1 + 2,613s + 3,414s^2 + 2,513s^3 + s^4$
5	$1 + 3,236s + 5,236s^2 + 5,236s^3 + 3,236s^4 + s^5$
6	$1 + 3,864s + 7,464s^2 + 9,141s^3 + 7,646s^4 + 3,864s^5 + s^6$

### 3.2. Čebiševljev I filter

Odziv je valovit u području propuštanja, a linearan u području gušenja. Može se koristiti polinomno uklapanje kao i kod Butterworthovog filtera, ali umjesto odabira koeficijenata polinoma (stupnjeva slobode), pokušava se odabrati ravnomjerno dobar odziv (odstupanja su približno ista) na nekoliko frekvencija unutar propusnog područja i smanjiti grešku za sve ostale frekvencije unutar područja

propuštanja. Vršne vrijednosti grešaka moraju biti jednake, a točke u kojima je greška jednaka nuli pokazuju nam red filtra. Filtar ima brži prijelaz između područja propuštanja i gušenja, ali se zbog toga pojačavaju valovitosti u području propuštanja. Za implementaciju Čebiševljevog I filtra potrebno je transformirati kružni oblik polova u eliptični oblik polova. [3] Primjer Čebiševljevog filtra drugog i trećeg reda dan je na slici 5.



**Slika 5.** Odziv Čebiševljevog I filtra (lijevo parni red, desno neparni red) [2]

Red filtra možemo pronaći tako da prebrojimo broj maksimuma i minimuma u području propuštanja (bez rubnih područja).

Čebiševljev polinom je trigonometrijski opisan sljedećom funkcijom

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}x), \quad (25)$$

ili rekursivnim odnosom, koristeći trigonometrijske identitete:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - 2T_{n-2}(x), \quad n > 1. \quad (26)$$

Frekvencijska karakteristika Čebiševljevog filtra dana je izrazom

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(v)}, \quad (27)$$

pa je jednadžba prigušenja za n-ti red Čebiševljev-ovog I filtra

$$A_{dB}(v) = 10 \log[1 + \varepsilon^2 T_n^2(v)] \quad [\text{dB}], \quad (28)$$

gušenje na rubu pojasa propuštanja

$$A_p = 10 \log(1 + \varepsilon^2), \quad (29)$$

i gušenje na rubu pojasa gušenja

$$A_{dB}(v_s) = 10 \log[1 + \varepsilon^2 T_n^2(v_s)] . \quad (30)$$

Iz ovih izraza možemo odrediti valovitost u području propuštanja

$$\varepsilon^2 = 10^{0,1Ap-1}, \quad (31)$$

te red filtra

$$n = \frac{\cosh\left[\frac{(10^{0,1As}-1)}{\varepsilon^2}\right]^{1/2}}{\cosh v_s} . \quad (32)$$

Polovi prijenosne funkcije, koji se nalaze se na elipsi, dani su izrazima

$$p_k = \sigma_k + j\omega_k = -\sin \theta_k \sinh \alpha + j \cos \theta_k \cosh \alpha , \quad (33)$$

gdje je

$$\alpha = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (34)$$

i

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

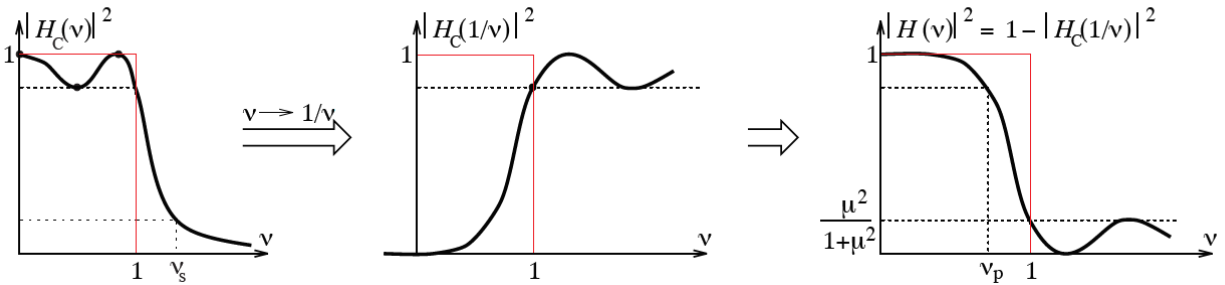
Najčešća primjena Čebiševljevog I filtra je u radijskom prijenosu signala, tj. informacije, zbog mogućnosti preciznog podešavanja pojasa frekvencija koje želimo propustiti ili prigušiti naspram Butterworth-ovog. [6]

### 3.3. Čebiševljev II (inverzni) filter

Odziv je linearan u području propuštanja, a valovit u području gušenja. Ima sličan „pad“ kao i Čebiševljev I filter, a fazni odziv kao Butterworth-ov. Tražimo amplitudni odziv s maksimalno ravnim područjem propuštanja kako bi se poboljšale karakteristike kašnjenja i zadržala ravnoteža s kojom postizemo nagli prijelaz iz jednog područja u drugo. Koristimo Čebiševljeve polinome, koji su isti kao i za Čebiševljev I filter. Potrebno je, za karakteristike kašnjenja, prebaciti valovitosti u područje izvan područja propuštanja. Za to koristimo frekvencijsku transformaciju ( $v \rightarrow 1/v$ ) koja preokreće („zrcali“) karakteristike normalnog Čebiševljev-og odziva. Rezultat je inverzni Čebiševljev filter (slika 6.), pri čemu smo oznaku za valovitost,  $\varepsilon$ , preimenovali u  $\mu$ , jer se valovitost nalazi u drugom području. U nekim primjenama (mjerenje istosmjernog napona) poželjne su i mane ovog filtra, tj. nepravilni odziv u području gušenja. [5]

$$|H(v)^2| = \frac{1}{1+\mu^2 T_n^2(v)} \rightarrow (v = 1/v) \rightarrow |H(1/v)^2| = \frac{1}{1+\mu^2 T_n^2(1/v)}. \quad (36)$$

Funkcija  $|H(v)^2|$  mijenja svoja svojstva, monotonost u području propuštanja i valovitost u području gušenja.



**Slika 6.** Postupak nastanka Čebiševljevog II filtra [2]

Frekvencijska karakteristika inverznog Čebiševljevog filtra dana je izrazom

$$|H(v)^2| = \frac{1}{1+\frac{1}{\mu^2 T_n^2(1/v)}}. \quad (37)$$

Jednadžbe prigušenja za n-ti red Čebiševljevog II filtra, prigušenja na rubu pojasa propuštanja i prigušenja na rubu pojasa gušenja su recipročne jednadžbama Čebiševljevog I filtra.

$$A_{dB}(v) = A_p = 10 \log \left[ 1 + \frac{1}{\mu^2 T_n^2(1/v)} \right], \quad [\text{dB}] \quad (38)$$

$$A_s = 10 \log(1 + \mu^{-2}). \quad (39)$$

Za projektiranje Čebiševljevog inverznog filtra, potrebni su nam valovitost u području gušenja

$$\mu^{-2} = 10^{0,1A_s} - 1, \quad (40)$$

te red filtra

$$n = \frac{\cosh^{-1} \left[ \frac{(10^{0,1A_p} - 1)}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}}}{\cosh^{-1} \frac{1}{v_p}}. \quad (41)$$

Polovi prijenosne funkcije, koji se nalaze se na elipsi, dani su izrazima

$$p_k = \frac{1}{\sigma_k + j\omega_k} = \frac{1}{-\sin \theta_k \sinh \alpha + j \cos \theta_k \cosh \alpha}, \quad (42)$$

gdje je

$$\alpha = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (43)$$

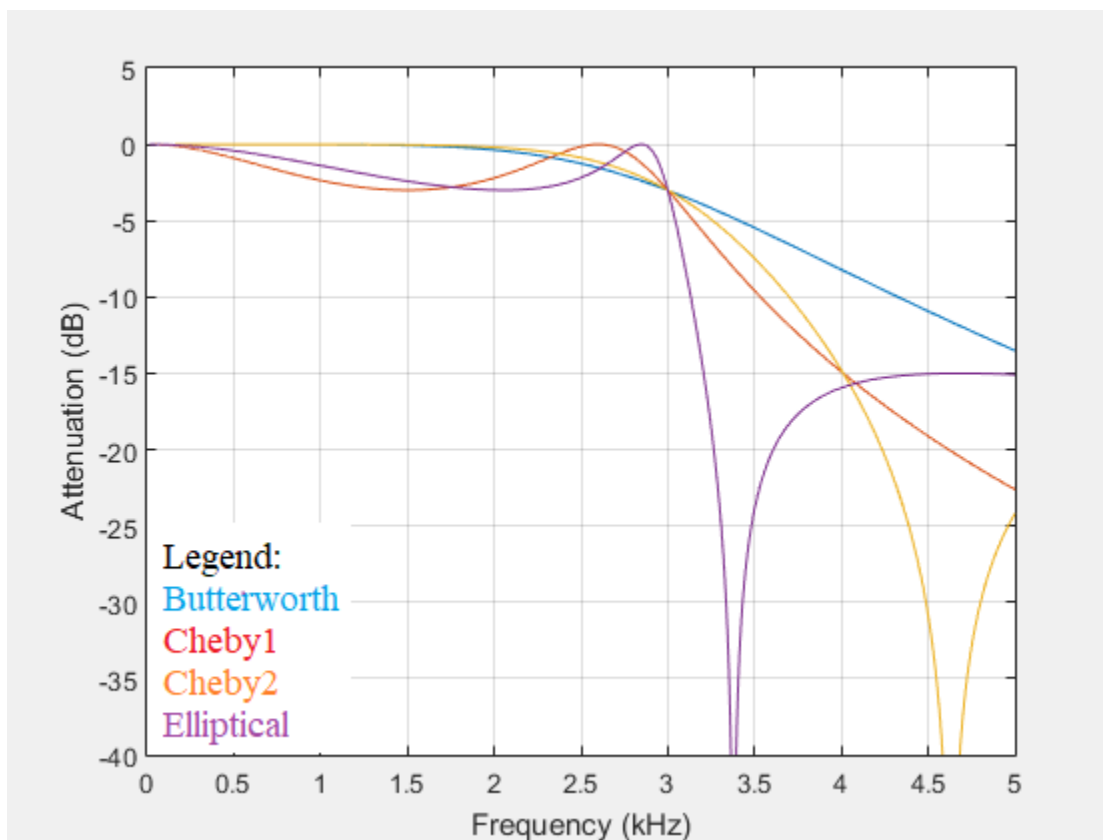
i

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (44)$$

#### 4. Usporedba svojstava filtara dobivenih različitim aproksimacijama

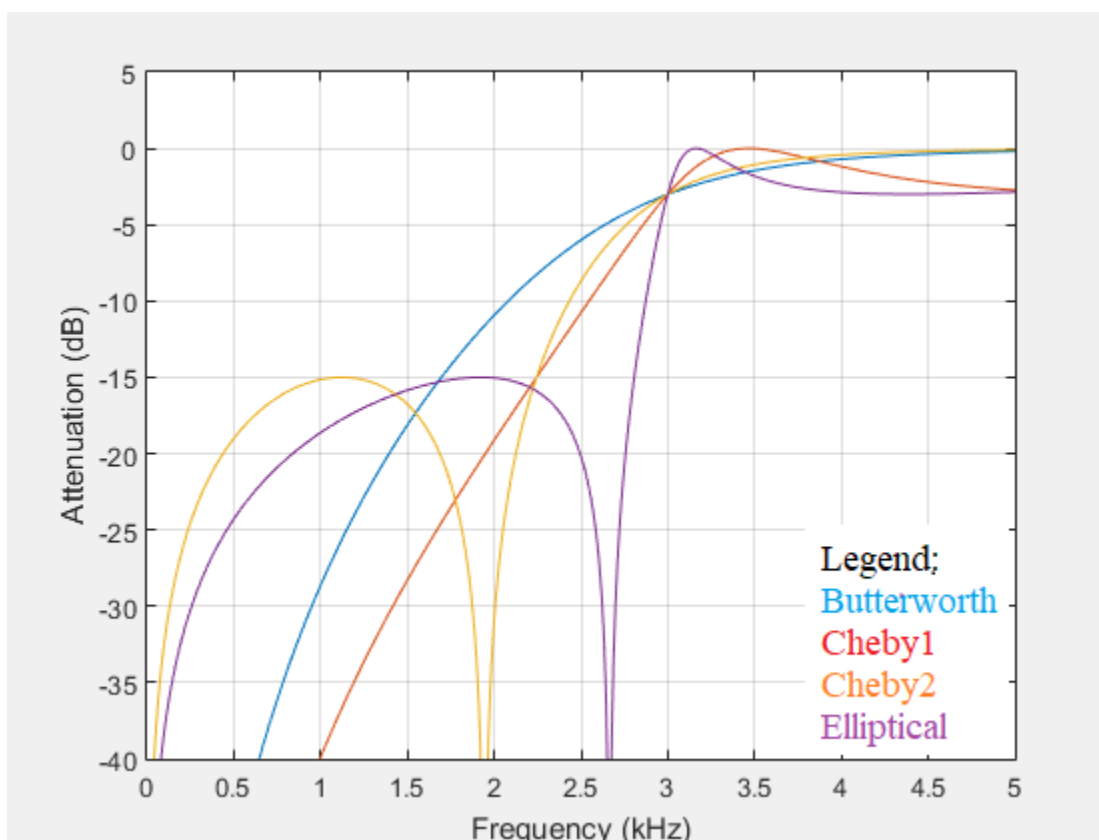
Za simulaciju amplitudnih karakteristika prije opisanih filtara, korišten je software MATLAB. Program koji prikazuje niskopropusne filtre 3. reda za sve 4 navedene aproksimacije za frekvenciju ruba pojasa propuštanja od 3000 Hz, s najvećim gušenjem u propusnom području od 3dB, te najmanjim gušenjem u području gušenja od 15dB dan je u Dodatku A.

Na slici 7. prikazan je rezultat gore napisanog programa, vidljiva je prijelazna frekvencija, kao i iznos gušenja u oba područja. Iz prikaza je jasno vidljivo da eliptična aproksimacija (ljubičasta krivulja) daje filter s najbržim prijelazom iz područja propuštanja u područje gušenja dok Butterworthova aproksimacija daje filter s najbržim prijelazom. Također, vidimo postojanje valovitosti za sve aproksimacije osim Butterworthove pri čemu eliprična aproksimacija daje valovitost u oba pojasa.



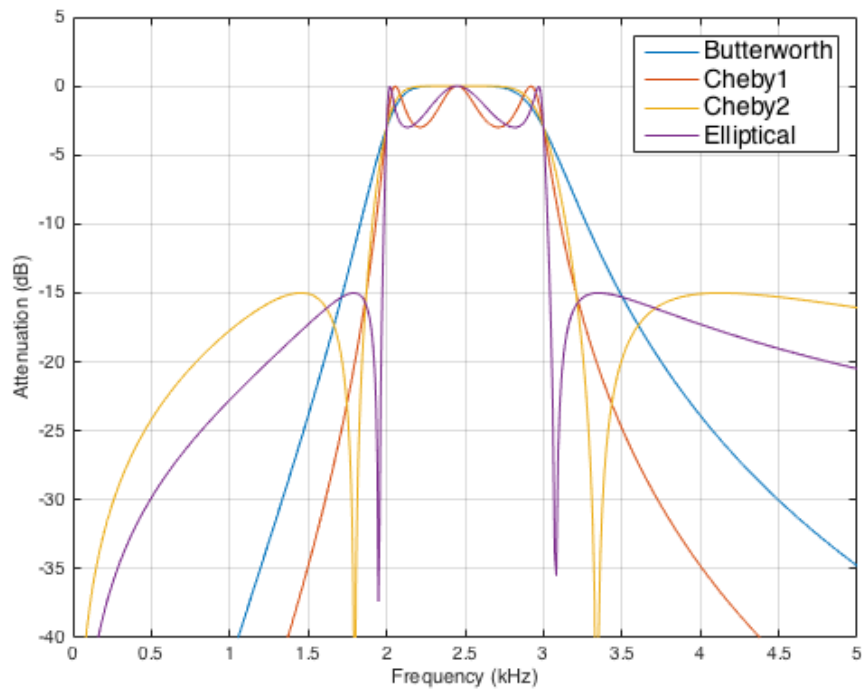
**Slika 7.** Odziv LP filtra 3. reda za sve 4 metode aproksimacije

Na slikama 8., 9. i 10. dani su prikazi za sve četiri aproksimacije za visokopropusni i pojasnopropusni filter te za pojasnu branu, a odgovarajući programi dani su u dodacima B, C i D. Prikazi preostalih vrsta filtera upućuju na iste zaključke o odnosima aproksimacija kao i niskopropusni filter. U nastavku rada proučavamo kako promjena pojedinih parametara (npr. red filtera ili iznosi gušenja u područjima propuštanja i gušenja) utječe na amplitudnu karakteristiku eliptične aproksimacije za niskopropusni filter. Usporedit ćemo navedene promjene s promjenama ostalih filterarskih aproksimacija.

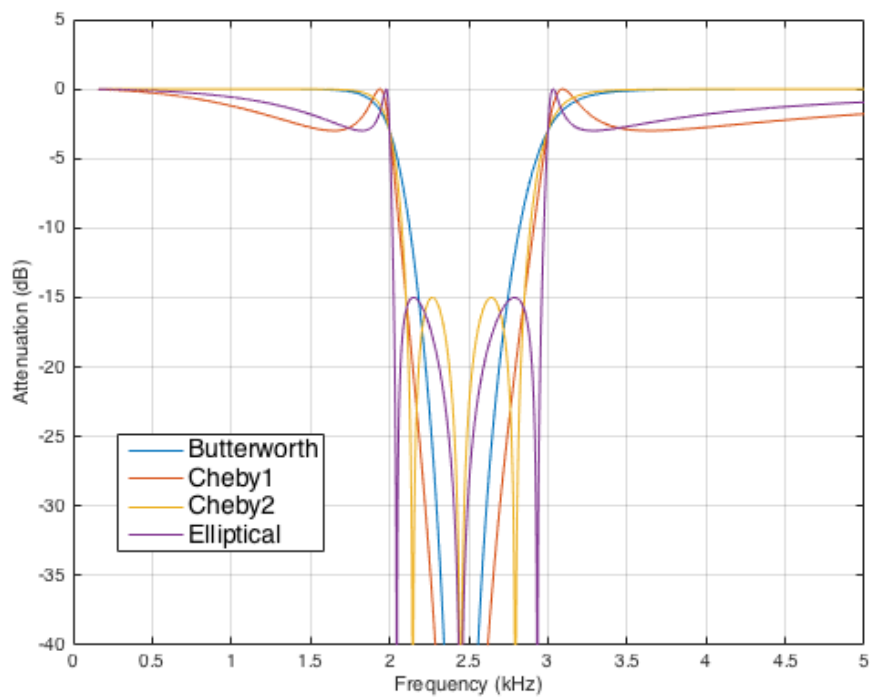


**Slika 8.** Odziv HP filtera 3. reda za sve 4 metode aproksimacije





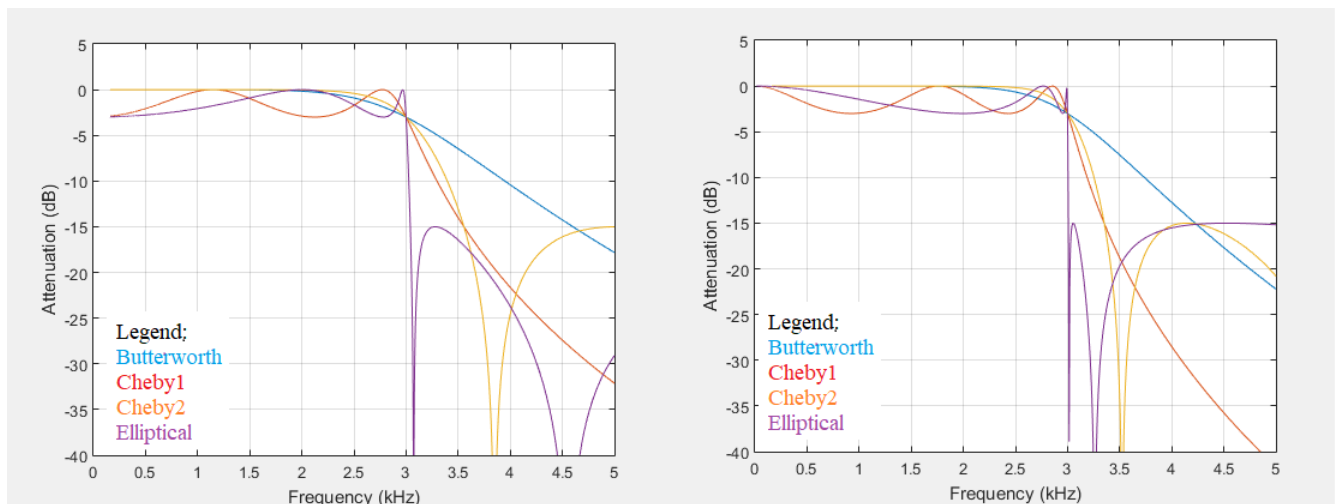
**Slika 9.** Odziv BP filtera 3. reda za sve 4 metode aproksimacije



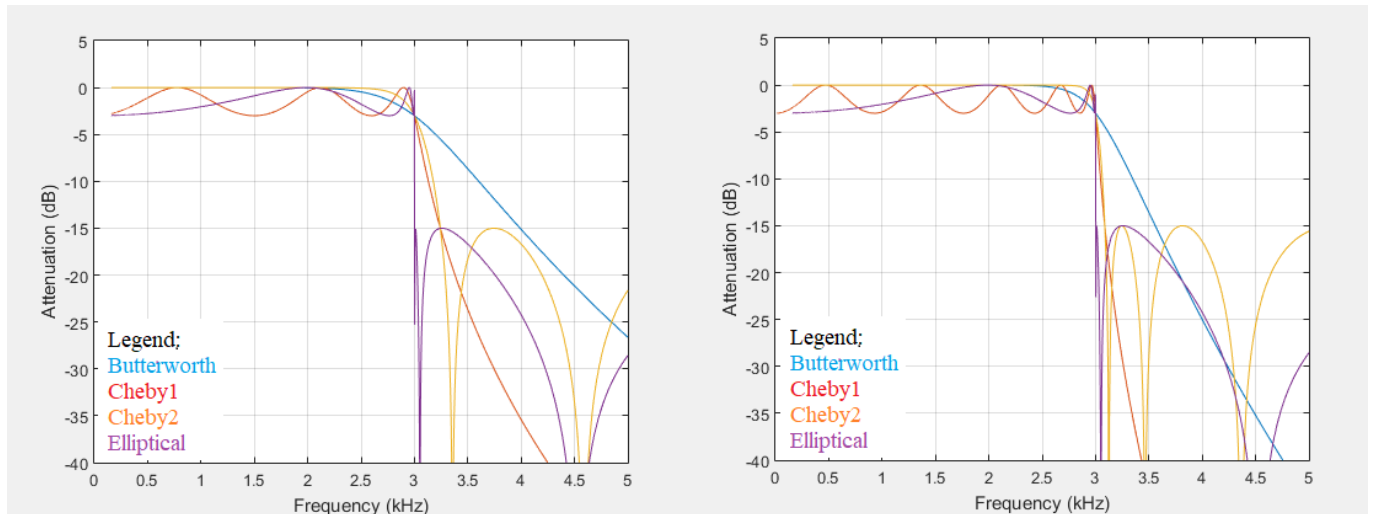
**Slika 10.** Odziv BS filtera 3. reda za sve 4 metode aproksimacije

#### 4.1. Utjecaj reda filtra na njegov odziv

U sljedećim grafovima prikazan je utjecaj reda niskopropusnog filtra na odziv istog. Povećanjem reda filtra prijelazno područje postaje sve uže, a prijelazi iz područja propuštanja u područje gušenja su sve drastičniji (odzivi postaju sve su sličniji odzivu idealnog filtra) što je posebno izraženo kod Butterworthove i Čebiševljeve aproksimacije. Budući da je kod eliptične aproksimacije već i za mali red filtra prijelazno područje vrlo usko, dodatno povećanje reda filtra ne rezultira znatnijim suženjem prijelaznog područja. Povećanjem reda filtra pojačava se i valovitosti: u području propuštanja za Čebiševljevu aproksimaciju, u području gušenja za inverznu Čebiševljevu aproksimaciju te u oba područja za eliptičnu aproksimaciju pri čemu je učinak izraženiji u području gušenja.



Slika 11. Prikaz odziva filtra 4. (lijevo) i 5. reda (desno)



**Slika 12.** Prikaz odziva filtra 6. (lijevo) i 10. reda (desno)

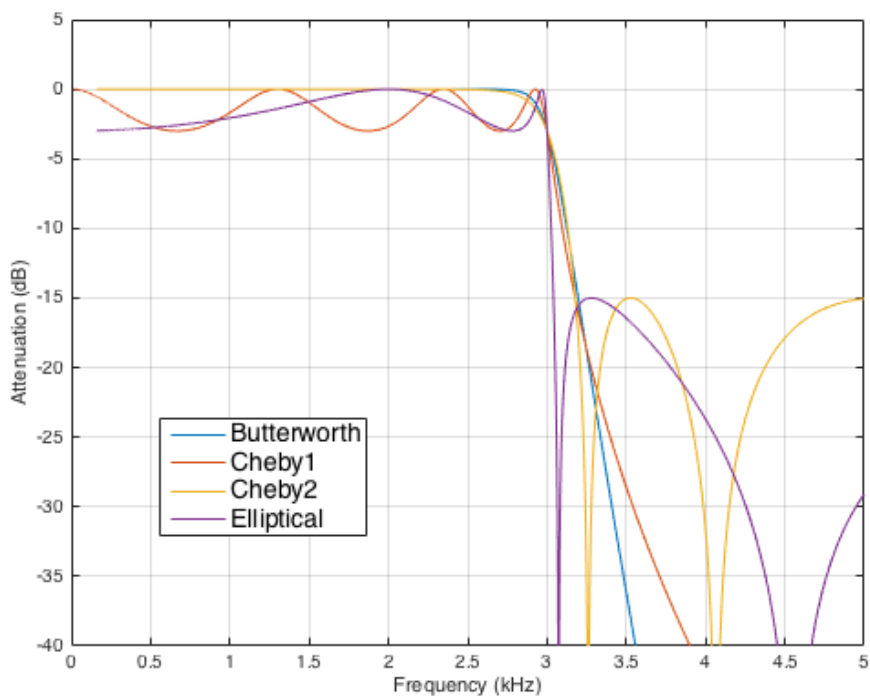
#### 4.2 Utjecaj širine prijelaznog područja na odziv filtra

Analiziramo ovisnost reda filtra, a time i ukupnog odziva, o širini prijelaznog područja za niskopropusni filter. U tu svrhu rub pojasa propuštanja držimo konstantnim na frekvenciji  $f_p=3000$  kHz, a mijenjamo rub pojasa gušenja. Najveće gušenje u području propuštanja iznosi 3 dB, a najmanje gušenje u području gušenja 15 dB. Rezultati su dani u Tablici 2. Iz rezultata je vidljivo da eliptična aproksimacija zahtijeva najmanji red filtra što je posebno izraženo kod uskih prijelaznih područja. Korištene su funkcije `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` i `ellipord` za izračun reda filtra.

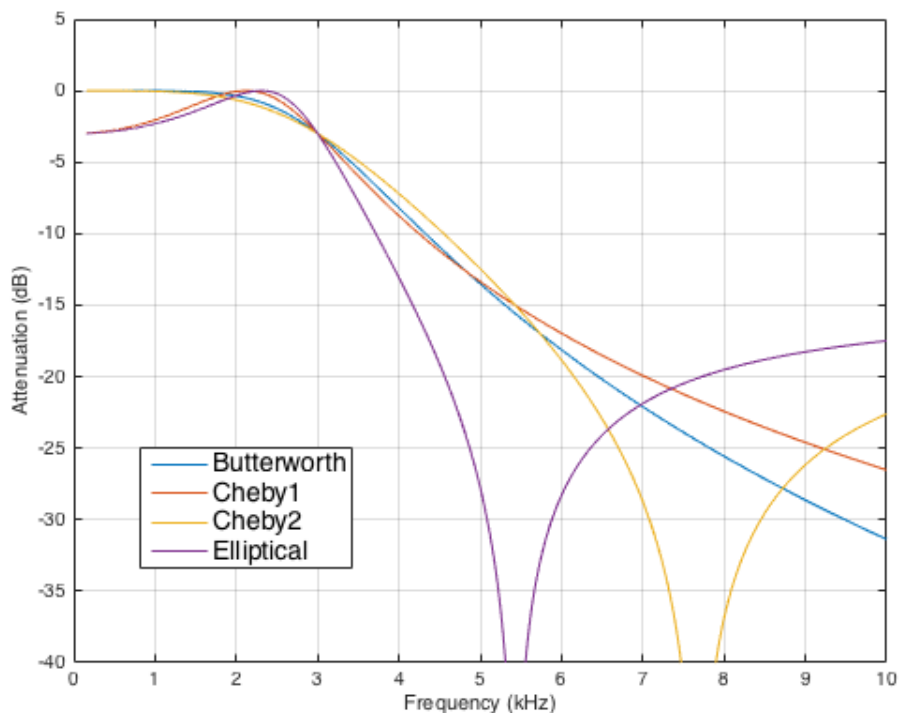
Na slikama 13 i 14 prikazan je utjecaj širine prijelaznog područja na odziv filtra. Budući da eliptična aproksimacija daje vrlo usko prijelazno područje, promjena širine ne utječe znatno na red filtra pa posljedično nema ni velike promjene u valovitosti. Kod ostalih aproksimacija utjecaj je najznačajniji za Butterworthovu aproksimaciju koja ima najsporiji prijelaz odnosno najšire prijelazno područje, pa sužavanje tog područja zahtijeva veći red filtra.

Tablica 2. Ovisnost reda filtra o širini prijelaznog područja

Frekvencija ruba pojasa gušenja, fs	Red filtra, n			
	Butterworthova aproksimacija	Čebiševljeva aproksimacija	Inverzna Čebiševljeva aproksimacija	Eliptična aproksimacija
5600 Hz	3	2	2	2
5200 Hz	4	3	3	2
4800 Hz	4	3	3	2
4400 Hz	5	3	3	2
4000 Hz	6	4	4	3
3800 Hz	8	4	4	3
3600 Hz	10	4	4	3
3400 Hz	14	5	5	3
3200 Hz	27	7	7	4



Slika 13. Prikaz odziva filtra,  $f_s=3200$  Hz



**Slika 14.** Prikaz odziva filtra,  $f_s=5600$  Hz

### 4.3. Utjecaj promjene gušenja u propusnom području na odziv filtra

Proučavamo utjecaj promjene najvećeg dopuštenog gušenja u propusnom području na red filtra i njegov odziv. Rubovi područja propuštanja i gušenja učvršćeni su na 3000 kHz i 4000 kHz. Najmanje gušenje u području gušenja iznosi 15 dB. Rezultati su dani u Tablici 3. Rezultati ponovno pokazuju da promjena iznosa gušenja u propusnom području slabo utječe na red filtra za eliptičnu aproksimaciju. Iako dobiveni rezultati upućuju da red eliptičnog filtra uopće ne ovisi o gušenju u propusnom području, dodatno smanjivanje gušenja u nekom trenutku bi ipak zahtijevalo veći red filtra. Na primjer, gušenje  $A_p=0.1$  dB zahtijeva da red filtra bude 4,  $A_p=0.01$  dB zahtijeva 5. red filtra, ali gušenje od  $A_p=0$  dB je nemoguće postići jer bi red filtra trebao biti beskonačan. Međutim, gušenje  $A_p$  ne utječe znatno ni na red Čebiševljevih aproksimacija, ali kao i u prethodnim analizama, najveći utjecaj ima na red filtra Butterworthove aproksimacije.

Tablica 3. Ovisnost reda filtra o gušenju u području propuštanja

Najveće gušenje u području propuštanja, $A_p$	Red filtra, $n$			
	Butterworthova aproksimacija	Čebiševljeva aproksimacija	Inverzna Čebiševljeva aproksimacija	Eliptična aproksimacija
1 dB	9	4	4	3
1.5 dB	8	4	4	3
2 dB	7	4	4	3
2.5 dB	7	4	4	3
3 dB	6	4	4	3

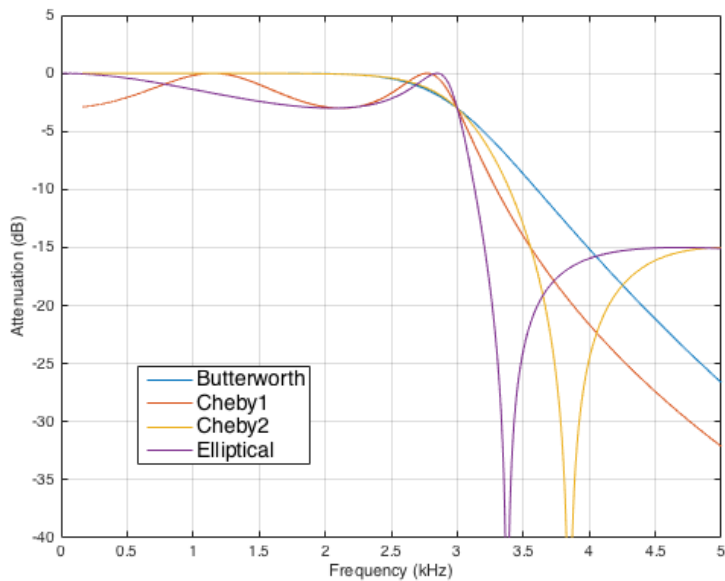
#### 4.4. Utjecaj promjene gušenja u području gušenja na odziv filtra

Proučavamo utjecaj promjene najmanjeg gušenja u području gušenja na red filtra i njegov odziv. Rubovi područja propuštanja i gušenja učvršćeni su na 3000 kHz i 4000 kHz. Najveće gušenje u području propuštanja iznosi 3 dB. Rezultati su dani u Tablici 4.

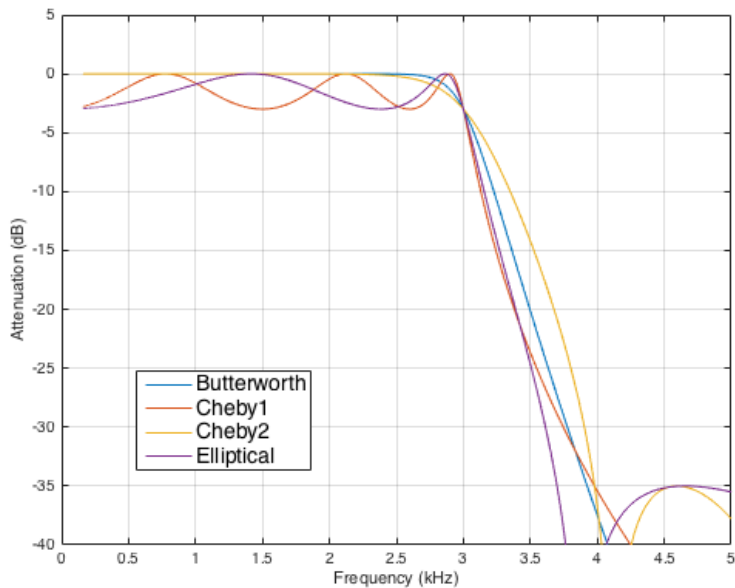
Tablica 4. Ovisnost reda filtra o gušenju u području gušenja

Najveće gušenje u području gušenja, $A_s$	Red filtra, $n$			
	Butterworthova aproksimacija	Čebiševljeva aproksimacija	Inverzna Čebiševljeva aproksimacija	Eliptična aproksimacija
15 dB	6	4	4	3
20 dB	8	4	4	3
25 dB	11	5	5	3
30 dB	13	6	6	4
35 dB	15	6	6	4

I ova analiza pokazuje da eliptična aproksimacija zahtijeva najmanji red filtra te da se red filtra najmanje mijenja s promjenom minimalnih zahtjeva. Za Butterworthovu aproksimaciju red filtra je ponovno najveći te je najveća i promjena red od najblažeg do najstrožeg zahtjeva.



**Slika 15.** Prikaz odziva filtra,  $A_s=15$  dB



**Slika 16.** Prikaz odziva filtra,  $A_s=35$  dB

## 5. Zaključak:

Svaki od navedenih filtara ima svoje prednosti i mane. Eliptični filter je poseban jer ima najbrži prijelaz iz područja propuštanja u područje gušenja i najviše mogućnosti ugađanja željenih parametara, štoviše, moguće je neovisno mijenjati valovitosti u svakom području, a može se i ovisno mijenjati valovitosti, pri čemu je filter maksimalno neosjetljiv na varijacije u nazivnim vrijednostima komponenta koje ga sačinjavaju.

Kada se valovitosti u području prigušenja približuju nuli, eliptični filter postaje Čebiševljev I filter, kada se valovitosti u području propuštanja približuju nuli, Eliptični filter postaje Čebiševljev II filter, a kada obje valovitosti teže prema nuli, Eliptični filter postaje Butterworth-ov filter. Prema tome, uz podešavanja možemo od Eliptičnog filtra napraviti tip filtra koji želimo.

Provedena analiza pokazuje da uz dane zahtjeve eliptična aproksimacija rezultira najmanjim redom filtra, a pooštavanje tih zahtjeva za eliptičnu aproksimaciju ne utječe znatno na red filtra.



## 6. Dodatci:

### Dodatak A

Program koji prikazuje niskopropusne filtre 3. reda za sve 4 navedene aproksimacije za frekvenciju ruba pojasa propuštanja od 3000 Hz, s najvećim gušenjem u propusnom području od 3dB, te najmanjim gušenjem u području gušenja od 15dB dan je u nastavku.

```
mi2=10^1.5-1 %1/(mi^2);
vpcheb=(cosh((acosh(sqrt(mi2/(10^(0.3)-1))))/3))^(-1);
Wo = 2*pi*3000;
Wo2=Wo/vpcheb

[zb,pb,kb] = buttap(3);
[zc1,pc1,kc1] = cheblap(3,3);
[zc2,pc2,kc2] = cheb2ap(3,15);
[ze,pe,ke] = ellipap(3,3,15);

[bp1,bp2] = zp2tf(zb,pb,kb);
[bp3,bp4] = lp2lp(bp1,bp2,Wo);

[bc11,bc12] = zp2tf(zc1,pc1,kc1);
[bc13,bc14] = lp2lp(bc11,bc12,Wo);

[bc21,bc22] = zp2tf(zc2,pc2,kc2);
[bc23,bc24] = lp2lp(bc21,bc22,Wo2);

[be1,be2] = zp2tf(ze,pe,ke);
[be3,be4] = lp2lp(be1,be2,Wo);

[hbp1,wbp1] = freqs(bp3,bp4,4096);
[hc11,wbc11] = freqs(bc13,bc14,4096);
[hc21,wbc21] = freqs(bc23,bc24,4096);
[he1,wbe1] = freqs(be3,be4,4096);

plot(wbp1/(2e3*pi),mag2db(abs(hbp1)));
hold on
plot(wbc11/(2e3*pi),mag2db(abs(hc11)));
plot(wbc21/(2e3*pi),mag2db(abs(hc21)));
plot(wbe1/(2e3*pi),mag2db(abs(he1)));
axis([0 5 -40 5])
grid
xlabel('Frequency (kHz)')
ylabel('Attenuation (dB)')
```

## Dodatak B

Program koji prikazuje visokopropusne filtre 3. reda za sve 4 navedene aproksimacije za frekvenciju ruba pojasa propuštanja od 3000 Hz, s najvećim gušenjem u propusnom području od 3dB, te najmanjim gušenjem u području gušenja od 15dB dan je u nastavku.

```
mi2=10^1.5-1 %1/(mi^2);
vpcheb=(cosh((acosh(sqrt(mi2/(10^(0.3)-1))))/3))^(-1);
Wo = 2*pi*3000;
Wo2=Wo*vpcheb

[zb,pb, kb] = buttap(3);
[zc1,pc1, kc1] = cheb1ap(3,3);
[zc2,pc2, kc2] = cheb2ap(3,15);
[ze,pe, ke] = ellipap(3,3,15);

[bp1,bp2] = zp2tf(zb,pb, kb);
[bp3,bp4] = lp2hp(bp1,bp2, Wo);

[bc11,bc12] = zp2tf(zc1,pc1, kc1);
[bc13,bc14] = lp2hp(bc11,bc12, Wo);

[bc21,bc22] = zp2tf(zc2,pc2, kc2);
[bc23,bc24] = lp2hp(bc21,bc22, Wo2);

[be1,be2] = zp2tf(ze,pe, ke);
[be3,be4] = lp2hp(be1,be2, Wo);

[hbp1,wbp1] = freqs(bp3,bp4, 4096);
[hc11,wbc11] = freqs(bc13,bc14, 4096);
[hc21,wbc21] = freqs(bc23,bc24, 4096);
[he1,wbe1] = freqs(be3,be4, 4096);

plot(wbp1/(2e3*pi),mag2db(abs(hbp1)));
hold on
plot(wbc11/(2e3*pi),mag2db(abs(hc11)));
plot(wbc21/(2e3*pi),mag2db(abs(hc21)));
plot(wbe1/(2e3*pi),mag2db(abs(he1)));
axis([0 5 -40 5])
grid
xlabel('Frequency (kHz)')
ylabel('Attenuation (dB)')
```

## Dodatak C

Program koji prikazuje pojasno propusne filtre 3. reda za sve 4 navedene aproksimacije za frekvencije pojasa propuštanja od  $f_1=2000\text{Hz}$   $f_2=3000\text{ Hz}$ , s najvećim gušenjem u propusnom području od 3dB, te najmanjim gušenjem u području gušenja od 15dB dan je u nastavku.

```
mi2=10^1.5-1 %1/(mi^2);
vpcheb=(cosh((acosh(sqrt(mi2/(10^(0.3)-1))))/3))^(-1);
Wo = 2*pi*sqrt(3000*2000);
Bw = 2*pi*(3000-2000);
Bw2=Bw/vpcheb;

[zb,pb,kb] = buttap(3);
[zc1,pc1,kc1] = cheb1ap(3,3);
[zc2,pc2,kc2] = cheb2ap(3,15);
[ze,pe,ke] = ellipap(3,3,15);

[bp1,bp2] = zp2tf(zb,pb,kb);
[bp3,bp4] = lp2bp(bp1,bp2,Wo,Bw);

[bc11,bc12] = zp2tf(zc1,pc1,kc1);
[bc13,bc14] = lp2bp(bc11,bc12,Wo,Bw);

[bc21,bc22] = zp2tf(zc2,pc2,kc2);
[bc23,bc24] = lp2bp(bc21,bc22,Wo,Bw2);

[be1,be2] = zp2tf(ze,pe,ke);
[be3,be4] = lp2bp(be1,be2,Wo,Bw);

[hbp1,wbp1] = freqs(bp3,bp4,4096);
[hc11,wbc11] = freqs(bc13,bc14,4096);
[hc21,wbc21] = freqs(bc23,bc24,4096);
[he1,wbe1] = freqs(be3,be4,4096);

plot(wbp1/(2e3*pi),mag2db(abs(hbp1)));
hold on
plot(wbc11/(2e3*pi),mag2db(abs(hc11)));
plot(wbc21/(2e3*pi),mag2db(abs(hc21)));
plot(wbe1/(2e3*pi),mag2db(abs(he1)));
axis([0 5 -40 5])
grid
xlabel('Frequency (kHz)')
ylabel('Attenuation (dB)')
```

## Dodatak D

Program koji prikazuje pojasnu branu 3. reda za sve 4 navedene aproksimacije za frekvencije pojasa gušenja od  $f_1=2000\text{Hz}$  do  $f_2=3000\text{Hz}$ , s najvećim gušenjem u propusnom području od 3dB, te najmanjim gušenjem u području gušenja od 15dB dan je u nastavku.

```
mi2=10^1.5-1 %1/(mi^2);
vpcheb=(cosh((acosh(sqrt(mi2/(10^(0.3)-1)))))/3))^(-1);
Wo = 2*pi*sqrt(3000*2000);
Bw = 2*pi*(3000-2000);
Bw2=Bw*vpcheb;

[zb,pb,kb] = buttap(3);
[zc1,pc1,kc1] = cheb1ap(3,3);
[zc2,pc2,kc2] = cheb2ap(3,15);
[ze,pe,ke] = ellipap(3,3,15);

[bp1,bp2] = zp2tf(zb,pb,kb);
[bp3,bp4] = lp2bs(bp1,bp2,Wo,Bw);

[bc11,bc12] = zp2tf(zc1,pc1,kc1);
[bc13,bc14] = lp2bs(bc11,bc12,Wo,Bw);

[bc21,bc22] = zp2tf(zc2,pc2,kc2);
[bc23,bc24] = lp2bs(bc21,bc22,Wo,Bw2);

[be1,be2] = zp2tf(ze,pe,ke);
[be3,be4] = lp2bs(be1,be2,Wo,Bw);

[hbp1,wbp1] = freqs(bp3,bp4,4096);
[hc11,wbc11] = freqs(bc13,bc14,4096);
[hc21,wbc21] = freqs(bc23,bc24,4096);
[he1,wbe1] = freqs(be3,be4,4096);

plot(wbp1/(2e3*pi),mag2db(abs(hbp1)));
hold on
plot(wbc11/(2e3*pi),mag2db(abs(hc11)));
plot(wbc21/(2e3*pi),mag2db(abs(hc21)));
plot(wbe1/(2e3*pi),mag2db(abs(he1)));
axis([0 5 -40 5])
grid
xlabel('Frequency (kHz)')
ylabel('Attenuation (dB)')
```

## 7. Literatura:

- [1] Hrvatska enciklopedija (3. nastavak [Da-Fo]), Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2001.
- [2] Analog and Digital Signal Processing by Ashok Ambardar, CLEngineering, 1995.
- [3] [Chebyshev Filters - an overview | ScienceDirect Topics](#) Steven W. Smith, in Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists, 2003 [Chebyshev Filters - an overview | ScienceDirect Topics](#) ,pristupljeno 10.8.2021.
- [4] [Design and Implementation of Butterworth, Chebyshev-I and Elliptic Filter for Speech Signal Analysis \(arxiv.org\)](#) Design and Implementation of Butterworth, Chebyshev-I and Elliptic Filter for Speech Signal Analysis, pristupljeno 10.8.2021.
- [5] [Chebyshev Filters: when to use them and the syntax of Chebyshev \(advsoled.com\)](#) Chebyshev Filters: applications and code examples, pristupljeno 12.8.2021.
- [6] [What is a Chebyshev RF Filter - the Basics » Electronics Notes \(electronics-notes.com\)](#), pristupljeno 17.8.2021.

## 8. Popis slika:

Stranica

Slika 1: “Jacobian” eliptični sinus.....	2
Slika 2: Odziv eliptično filtra .....	5
Slika 3: Transformacije prijenosne funkcije niskopropusnog prototipa u željenu vrstu filtra ..	6
Slika 4: Odziv Butterworthov-og filtra .....	7
Slika 5: Odziv Čebiševljevog I filtra (lijevo parni red, desno neparni red) .....	9
Slika 6: Postupak nastanka Čebiševljevog II filtra.....	11
Slika 7: Odziv LP filtra 3.reda za sve 4 aproksimacije .....	13
Slika 8: Odziv HP filtra 3.reda za sve 4 aproksimacije.....	14
Slika 9: Odziv BP filtra 3.reda za sve 4 aproksimacije .....	15
Slika 10: Odziv BS filtra 3.reda za sve 4 aproksimacije .....	15
Slika 11: Prikaz odziva filtra 4.(lijevo) i 5. reda (desno) .....	16
Slika 12: Prikaz odziva filtra 6.(lijevo) i 10. reda (desno) .....	17
Slika 13: Prikaz odziva filtra $f_s=3200\text{Hz}$ .....	18
Slika 14: Prikaz odziva filtra $f_s=5600\text{Hz}$ .....	19
Slika 15: Prikaz odziva filtra $A_s=15\text{dB}$ .....	21
Slika 16: Prikaz odziva filtra $A_s=35\text{dB}$ .....	21

## 9. Popis tablica:

	Stranica
Tablica 1: Tablica polinoma.....	8
Tablica 2: Ovisnost reda filtra o širini prijelaznog područja.....	18
Tablica 3: Ovisnost reda filtra o gušenju u području propuštanja.....	20
Tablica 4: Ovisnost reda filtra o gušenju u području gušenja .....	20