NUMERIČKE METODE ZA RJEŠEVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

Lisak, Ivan

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
STRUČNI SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STUDIJ STROJARSTVA

Ivan Lisak

NUMERIČKE METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

DIPLOMSKI RAD

Karlovac, 2019.

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
STROJARSKI ODJEL
STRUČNI SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STUDIJ STROJARSTVA

Ivan Lisak

NUMERIČKE METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

DIPLOMSKI RAD

Mentor: mr. sc. Marina Tevčić

Karlovac, 2019.

IZJAVA

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu. Zahvaljujem svojoj obitelji i kolegama na potpori tijekom studiranja te mentorici mr.sc. Marini Tevčić na stručnoj pomoći i savjetima koji su mi pomogli pri izradi ovog diplomskog rada.

Ivan Lisak

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
Trg J.J.Strossmayera 9
HR - 47000, Karlovac, Croatia
Tel. +385 - (0)47 – 843-500
Fax. +385 - (0)47 – 843-503
e-mail: dekanat @ vuka.hr

Klasa: 602-11/19-01/____

Ur.broj: 2133-61-04-19-01

Datum:

HRN EN ISO 9001:2015

ZADATAK ZAVRŠNOG / DIPLOMSKOG RADA

Ime i prezime	Ivan Lisak		
OIB / JMBG			
Adresa			
Tel. / Mob./e-mail			
Matični broj studenta	0111411004		
JMBAG			
Studij (staviti znak X ispred odgovarajućeg studija)	preddiplomski	x	specijalistički diplomski
Naziv studija	Specijalistički diplomski stručni studij strojarstva		
Godina upisa	2011.		
Datum podnošenja molbe	5.4.2019.		
Vlastoručni potpis studenta/studentice			

.

Naslov teme na hrvatskom: Numeričke metode za rješavanje nelinearnih jednadžbi

Naslov teme na engleskom: Numerical methods for nonlinear equations

Opis zadatka:
Razraditi numeričke metode za rješavanje nelinearnih jednadžbi s posebnim osvrtom na metodu bisekcije, metodu tangente, metodu sekante i metodu jednostavnih iteracija.
Opisati teoretsku podlogu pojedine metode i na dva primjera:
$f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1,\ f(x) = 4 - e^{-x} - x$
pokazati primjenu svake od metoda uz izračunavanje pogreške aproksimacije.
U uvodu navesti slijed teoretske razrade teme i primjere koji se obrađuju.
U razradi teme opisati osnovne karakteristike pojedine numeričke metode.
Primjere rješavati uz zadanu točnost te napraviti usporedbu dobivenih rezultata po metodama.
Napisati zaključak.

Mentor: Mr. sc. Marina Tevčić	Predsjednik Ispitnog povjerenstva:

SAŽETAK

Cilj ovog rada bio je prikazati četiri osnovne numeričke metode za rješavanje nelinearnih jednadžbi i pomoću svake metode, na dva zadana primjera, uz zadanu točnost odrediti približna rješenja i pogreške aproksimacija.

Iterativni postupci za pronalaženje približnih rješenja vođeni su preko proračunskih tablica programa MS Excel. Za dodatnu pomoć kod postupaka traženja rješenja korišten je grafički kalkulator programa GeoGebra.

Ključne riječi: *nelinearne jednadžbe, numeričke metode, iterativni proces, približno rješenje, pogreška aproksimacije.*

SUMMARY

The aim of this paper was to present four basic numerical methods for solving nonlinear equations and using each method to determine approximate solutions and approximation errors with given accuracy.

Iterative procedures for finding approximate solutions are guided through MS Excel spreadsheets. The GeoGebra graphing calculator was used to help with the search for solutions.

Keywords: *nonlinear equations, numerical methods, iterative process, approximate solution, approximation error.*

Sadržaj

1. UVOD

Kao i sve grane matematike, numerička analiza vrlo je opsežna i u stalnom razvoju iako su prvi postupci numeričke matematike stari koliko i matematika općenito.

Numerička matematika bavi se približnim ili aproksimativnim rješavanjem matematičkih problema. Razlikuju se numerička matematika, numerička linearna algebra, numeričko rješavanje nelinearnih jednadžbi, aproksimacijske i interpolacijske metode, itd. Za primjenu metoda numeričke matematike potrebno je poznavati i analizirati ocjenu pogreške.

Općenito može se reći, problem koji se rješava naziva se ulazna informacija, a odgovarajući rezultat izlazna informacija. Postupak transformacije ulazne u izlaznu informaciju zove se algoritam.

U ovom završnom radu na dva zadana primjera funkcija obrađene su četiri temeljne metode za rješavanje nelinearnih jednadžbi. Na zadanim funkcijama $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ i $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$, određene su nultočke tih funkcija odnosno dobivena su rješenja jednadžbi $f(x) = 0$. Četiri metode obrađene u ovom radu su: metoda bisekcije, metoda jednostavnih iteracija, metoda tangente i metoda sekante.

U drugom poglavlju definirani su osnovni uvjeti za provođenje iterativnih metoda i osnovni izraz za izračun pogreške aproksimacije. Ostali uvjeti i izrazi prikazani su kod obrade pojedine metode u poglavljima, od petog do osmog.

U trećem i četvrtom poglavlju određeni su intervali unutar kojih se nalaze nultočke zadanih funkcija.

Od petog do osmog poglavlja obrađena je po jedna navedena metoda, pronađena su približna rješenja unutar određenih intervala i izračunate su pogreške aproksimacija. Traženje jednog od približnih rješenja kod svake metode, detaljno je prikazano kroz iterativni postupak metode. Iterativni postupci za traženje ostalih približnih rješenja prikazani su u tablicama izrađenim u programu MS Excel. Kao pomoć kod traženja približnih nultočaka funkcija, izrađeni su grafički prikazi funkcija u različitim zapisima. Grafički prikazi izrađeni su u grafičkom kalkulatoru programa GeoGebra. U devetom poglavlju dana je usporedba dobivenih rezultata po metodama.

2. O RJEŠAVANJU NELINEARNIH JEDNADŽBI

Uobičajena podjela jednadžbi je na:

- algebarske, koje su oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0\,, \qquad a_n \neq 0\,.$$

- transcendentne, tj. one koje nisu algebarske.

Algebarske jednadžbe do uključivo četvrtog stupnja mogu se riješiti direktno. Ta rješenja dana su formulama, ali se zbog njihove složenosti rijetko koriste. Za sve ostale jednadžbe opće rješenje ne može se zapisati pomoću formule pa se za rješavanje tih jednadžbi koriste metode kojima se aproksimira rješenje. To su iterativne metode u kojima se nekom rekurzivnom formulom definira niz brojeva (aproksimacija): $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ koji uz neke uvjete može konvergirati rješenju jednadžbe.[1]

Promatra se realna neprekidna funkcija f definirana na zatvorenom intervalu $[a,b]$. Općenito, svaki kompleksni broj ξ, koji je rješenje jednadžbe

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

naziva se nultočkom ili korijenom funkcije f. Ograničit ćemo se na istraživanje samo realnih nultočaka funkcije f (sjecišta grafa funkcije sa osi x). Općenito se može dogoditi da neka funkcija ima više realnih nultočaka, da su neke višestruke ili da uopće nema realnih nultočaka.[2]

Postupak aproksimativnog rješavanja sastoji se od dva koraka:

- nalaženje intervala unutar kojih se nalaze nultočke (izolacija nultočke),
- nalaženje nultočke na traženu točnost.

Za izolaciju nultočaka vrijede određena pravila:

a) Ako je funkcija f neprekidna i na krajevima intervala $[a,b]$ prima vrijednosti s protivnim predznacima, tj. $f(a)\cdot f(b) < 0$ tada unutar intervala $[a,b]$ postoji barem jedna nultočka funkcije f.

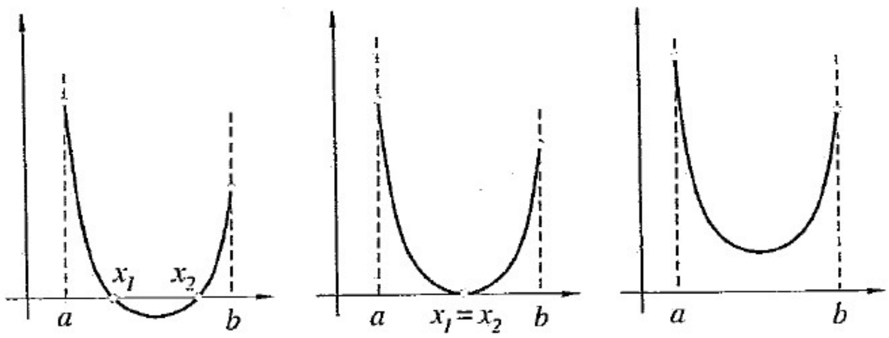
[1] Tevčić, M.: Inženjerska matematika, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

[2] Scitovski, R.: Numerička matematika, Grafika d.o.o., Osijek, 2004.

b) Ako je $f(a)\cdot f(b)<0$ i ako derivacija funkcije f' na intervalu $[a,b]$ ne mijenja predznak (funkcija je na intervalu $[a,b]$ strogo monotona), onda je rješenje jedinstveno.

c) Ako je $f(a)\cdot f(b)>0$ i funkcija f ima neprekidnu drugu derivaciju f'' na intervalu $[a,b]$ koja na intervalu $[a,b]$ ne mijenja predznak (funkcija f je konveksna ili konkavna), onda unutar intervala $[a,b]$ nastupa jedna od tri mogućnosti:

- $f(x)=0$ ima dva rješenja,
- $f(x)=0$ ima jedno dvostruko rješenje,
- $f(x)=0$ nema rješenja.[3]



Slika 1. Moguća rješenja funkcije za slučaj $f(a).f(b)>0$ i $f''\neq 0$ na $[a,b]$

Izvor: Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element, Zagreb, 1998.

Prilikom izoliranja nultočaka funkcije može se koristiti i grafičkim metodama. Pri tome je pogodno koristiti programske pakete, primjerice MATCAD, MATLAB, MATHEMATICA. Ako se jednadžba $f(x)=0$ preuredi tako da na lijevu i desnu stranu dođu funkcije čije se grafove može lako nacrtati

$$\varphi(x)=\psi(x)$$

tada apscise točaka sjecišta grafova funkcija φ i ψ predstavljaju nultočke funkcije. Na taj način lako se dolazi do intervala u kojima leže nultočke.[4]

Po pronalasku intervala slijedi drugi korak rješavanja jednadžbe - iterativni postupak traženja približnog rješenja na traženu točnost. Iterativnim postupkom dolazi se do niza brojeva x_n, $n=0,1,2,...$, koji predstavljaju približnu vrijednost rješenja. Cilj je dobiti rješenje u granicama unaprijed dane točnosti.

[3] Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element d.o.o., Zagreb, 1998.
[4] Scitovski, R.: Numerička matematika, Grafika d.o.o., Osijek, 2004.

Da bi se to ostvarilo, niz približnih rješenja (x_n) treba težiti k rješenju ξ, to jest ako niz (x_n) konvergira i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, onda se kaže da iterativni postupak konvergira k rješenju. Član x_n je n-ta aproksimacija rješenja ξ.[5]

Ključni su elementi za zaustavljanje iterativnih procesa apsolutna vrijednost pogreške aproksimacije $|\xi - x_n|$ i zadana točnost ε jer za zaustavljanje procesa treba imati zadovoljen uvjet $|\xi - x_n| \leq \varepsilon$.

Za ocjenu apsolutne pogreške aproksimacije, prema Teoremu o srednjoj vrijednosti, vrijedi sljedeće:

Ako je x_n jedna aproksimacija nultočke ξ na intervalu $[a,b]$ i ako je funkcija f derivabilna, takva da je $|f'(x)| > 0$, $\forall x \in [a,b]$, tada vrijedi sljedeća ocjena apsolutne pogreške aproksimacije:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|^{6}, \tag{2}$$

gdje su:

ξ - rješenje zadane jednadžbe,

x_n - aproksimacija u n-tom iterativnom koraku,

$|f(x_n)|$ - apsolutna vrijednost funkcije u n-tom iterativnom koraku,

m_1 - minimum apsolutne vrijednosti prve derivacije zadane funkcije na izabranom početnom intervalu $[a,b]$,

ε - zadana točnost.

Ako se želi da apsolutna pogreška aproksimacije x_n nultočke ξ ne bude veća od $\varepsilon > 0$, onda je dovoljno prema (2) ispuniti uvjet

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon \tag{3}$$

[5] Tevčić, M.: Inženjerska matematika, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

[6] Scitovski, R.: Numerička matematika, Grafika d.o.o., Osijek, 2004.

iz čega se može uzeti kriterij zaustavljanja $\left|f(x_n)\right| < m_1 \cdot \varepsilon$.

Izraz (2) može se koristiti u svim metodama u ovom radu. Koristit ćemo ga kao dodatni uvjet za ocjenu apsolutne pogreške aproksimacije, odnosno za zaustavljanje iterativnog procesa.

3. IZOLACIJA NULTOČAKA FUNKCIJE $f(x) = 4 - e^{-x} - x$

Izolacija nultočaka izvršit će se grafičkim putem. Najprije će se preurediti zadanu funkciju tako da na lijevu i desnu stranu dođu nove funkcije čije se grafove može lakše skicirati. Funkciju se rastavlja na dvije funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$. Sjecišta dviju izvedenih funkcija daju rješenja jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$.

$$4 - e^{-x} - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4 - e^{-x} \quad \rightarrow \quad \varphi(x) = \psi(x) \quad \rightarrow \quad \varphi(x) = x,\ \ \psi(x) = 4 - e^{-x}.$$

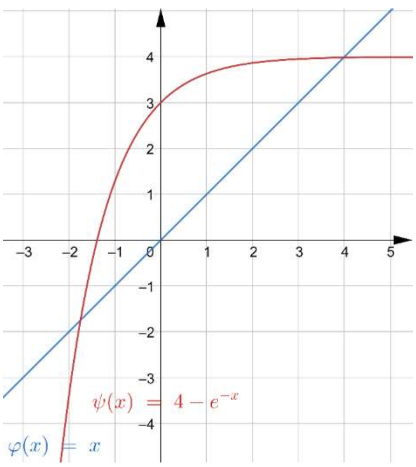
Poznavajući osnovne funkcije $f(x) = x$ i $f(x) = e^{x}$ ovaj primjer može se lako skicirati. Kada se funkciji $-e^{-x}$ doda vrijednost 4, funkcija se za 4 jedinice pomakne u pozitivnom smjeru osi y. U Tablici 1. dane su približne vrijednosti nekoliko točaka za skiciranje funkcije $\psi(x) = 4 - e^{-x}$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
ψ(x)	-3,39	1,28	3,00	3,63	3,86	3,95	3,98

Tablica 1. Približne vrijednosti funkcije $\psi(x) = 4 - e^{-x}$

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

Na Slici 2. prikazane su funkcije $\varphi(x) = x$ i $\psi(x) = 4 - e^{-x}$ i njihova sjecišta, odnosno nultočke glavne zadane funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ koje se nalaze na intervalima $[-2,-1]$ i $[3,4]$.



Slika 2. Prikaz rješenja funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ pomoću funkcija $\psi(x)$ i $\varphi(x)$

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Provjera uvjeta $f(a) \cdot f(b) < 0$ na intervalu $[-2,-1]$:

$f(a) = f(-2) = 4 - e^{2} + 2 = -1{,}389056099$,

$f(b) = f(-1) = 4 - e^{1} + 1 = 2{,}281718172$,

$f(a) \cdot f(b) < 0 \;\rightarrow\; -1{,}389056099 \cdot 2{,}281718172 < 0$.

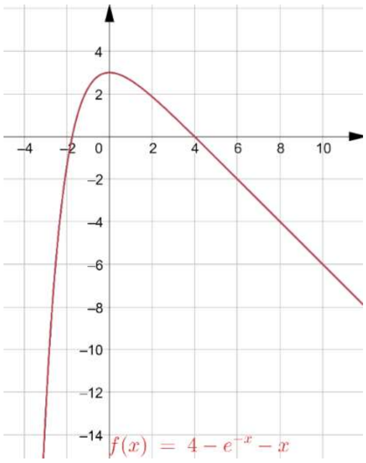
Provjera uvjeta $f(a) \cdot f(b) < 0$ na intervalu $[3,4]$:

$f(a) = f(3) = 4 - e^{-3} - 3 = 0{,}950212931$,

$f(b) = f(4) = 4 - e^{-4} - 4 = -0{,}018315638$,

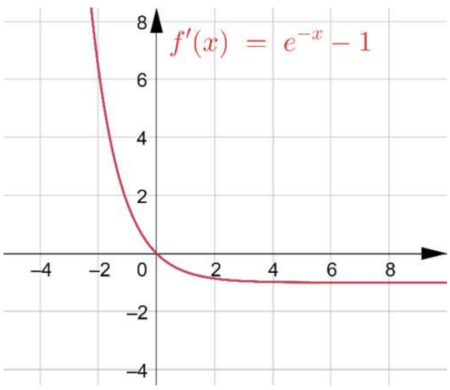
$f(a) \cdot f(b) < 0 \;\rightarrow\; 0{,}950212931 \cdot (-0{,}018315638) < 0$.

Na sljedećoj slici je prikazana i kompletna zadana funkcija $f(x) = 4 - e^{-x} - x$.



Slika 3. Funkcija $f(x) = 4 - e^{-x} - x$
Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Na Slici 3. vidi se da funkcija unutar određenih intervala $[-2,-1]$ i $[3,4]$ ima po jednu nultočku. Navedeno se potvrđuje preko prve derivacije funkcije $f'(x)$. Deriviranje zadane funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x \;\rightarrow\; f'(x) = e^{-x} - 1$.



Slika 4. Funkcija $f'(x) = e^{-x} - 1$
Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Na Slici 4. vidi se da derivacija f' ne mijenja predznak na intervalima $[-2,-1]$ i $[3,4]$, pa su nultočke funkcije f na predmetnim intervalima jedinstvene, odnosno funkcija f je na spomenutim intervalima strogo monotona.

Potvrda navedenog za interval $[-2,-1]$:

$$f'(x) = e^{-x} - 1 \quad \rightarrow \quad f'(-2) = e^{2} - 1 \approx 6{,}389056099$$

$$f'(-1) = e^{1} - 1 \approx 1{,}718281828$$

$$f'(-2) \cdot f'(-1) > 0$$

Potvrda navedenog za interval $[3,4]$:

$$f'(3) = e^{-3} - 1 \approx -0{,}950212931$$

$$f'(4) = e^{-4} - 1 \approx -0{,}981684361$$

$$f'(3) \cdot f'(4) > 0$$

4. IZOLACIJA NULTOČAKA FUNKCIJE $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$

Izolacija nultočaka izvršit će se analitičkim putem. Izvodi se prva i druga derivacija zadane funkcije, a potom se izdvaja točke u kojima se derivacije poništavaju.

$$f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1 \quad \rightarrow \quad f'(x) = -6x^2 - 2x + 3$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 3}}{2 \cdot (-6)} = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{-12} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{19}}{6} \approx -0{,}89\,, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{19}}{6} \approx 0{,}56\,.$$

$$f'(x) = -6x^2 - 2x + 3 \quad \rightarrow \quad f''(x) = -12x - 2$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -12x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{6} \approx -0{,}17\,.$$

Prva derivacija f' poništava se u točkama $x = \frac{-1 - \sqrt{19}}{6}$ i $x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}$, a druga derivacija f'' u točki $x = -\frac{1}{6}$. Intervali unutar kojih se derivacije ne poništavaju su:

$$\left[-\infty, \frac{-1 - \sqrt{19}}{6}\right], \left[\frac{-1 - \sqrt{19}}{6}, -\frac{1}{6}\right], \left[-\frac{1}{6}, \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}\right], \left[\frac{-1 + \sqrt{19}}{6}, +\infty\right].$$

Na tim intervalima treba potražiti točke unutar kojih funkcija promijeni predznak, tj. za koje vrijedi: $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Funkcija ima dva lokalna ekstrema u kojima se poništava prva derivacija i jednu točku pregiba između dva ekstrema (točka u kojoj se poništava druga derivacija).

Ako se kritičnu točku prvog ekstrema $x = \frac{-1 - \sqrt{19}}{6}$ uvrsti u drugu derivaciju:

$$f''\left(\frac{-1 - \sqrt{19}}{6}\right) = -12\left(\frac{-1 - \sqrt{19}}{6}\right) - 2 \approx 8{,}72\,,$$

dobiva se pozitivna vrijednost, što ukazuje da u toj točki funkcija postiže lokalni minimum.

Ako se drugu kritičnu točku $x = \frac{-1+\sqrt{19}}{6}$ uvrsti u drugu derivaciju:

$$f''\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) = -12\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) - 2 \approx -8{,}72\,,$$

dobiva se negativna vrijednost, što ukazuje da u navedenoj točki funkcija postiže lokalni maksimum.

U sljedećim koracima određuju se podintervali unutar izdvojenih intervala određenih pomoću specifičnih točaka funkcije. Novi intervali rade se zbog jednostavnijeg zapisa i zbog izbjegavanja korištenja točaka ekstrema.

(a) Provjera uvjeta $f(a)\cdot f(b) < 0$ na intervalu $\left[-\infty, \frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right]$

Za početnu vrijednost prvog intervala uzima se točka $x = -2$ i uvrštava se u izraz funkcije.

$$f(-2) = -2\cdot(-2)^3 - (-2)^2 + 3\cdot(-2) - 1 = 5 > 0$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right) = -2\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right)^3 - \left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right) - 1 \approx -3{,}05 < 0$$

Početna točka prvog intervala dobro je izabrana jer vrijedi $f(a)\cdot f(b) < 0$, odnosno $f(-2)\cdot f\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right) < 0$.

Umjesto točke $x = \frac{-1-\sqrt{19}}{6}$ uzima se točka $x = -1$ unutar privremenog intervala i provjerava se ima li funkcija negativnu vrijednost u $x = -1$ isto kao i u $x = \frac{-1-\sqrt{19}}{6}$:

$$f(-1) = -2\cdot(-1)^3 - (-1)^2 + 3\cdot(-1) - 1 = -3\,.$$

Vidi se da izabrana točka daje vrijednost funkcije s istim predznakom kao i točka ekstrema, pa se uzima za krajnju točku intervala. Pomoću dviju novih točaka zapisuje se prvi interval unutar kojeg će se tražiti rješenja zadane funkcije: $[-2, -1]$.

Sada još treba provjeriti postoji li unutar navedenog intervala jedna ili više nultočaka.

$f'(x) = -6x^2 - 2x + 3 \;\rightarrow\; f'(-2) = -6 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = -17$

$f'(-1) = -6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = -1$

Vidi se da derivacija funkcije f' ne mijenja predznak unutar predmetnog intervala, što znači da na predmetnom intervalu postoji jedinstveno rješenje.

(b) Provjera uvjeta $f(a) \cdot f(b) < 0$ na intervalu $\left[\frac{-1-\sqrt{19}}{6}, -\frac{1}{6}\right]$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right) \approx -3{,}05 < 0$$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^3 - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - 1 \approx -1{,}53 < 0$$

Za interval $\left[\frac{-1-\sqrt{19}}{6}, -\frac{1}{6}\right]$ vrijedi $f(a) \cdot f(b) > 0$ pa se taj interval odbacuje.

(c) Provjera uvjeta $f(a) \cdot f(b) < 0$ na intervalu $\left[-\frac{1}{6}, \frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right]$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) \approx -1{,}53$$

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) = -2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) - 1 \approx 0{,}015 > 0 .$$

Vidi se da na promatranom intervalu vrijedi $f(a) \cdot f(b) < 0$, odnosno vrijedi da je $f\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot f\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) < 0$.

Umjesto točke $x = -\frac{1}{6}$ za početnu točku postavlja se točka $x = 0$ i provjerava:

$$f(0) = -2 \cdot (0)^3 - (0)^2 + 3 \cdot (0) - 1 = -1 < 0 ,$$

vidi se da izabrana točka $x = 0$ daje vrijednost funkcije s istim predznakom kao i točka pregiba $x = -\frac{1}{6}$ pa se uzima za početnu točku novog intervala. Za krajnju točku novog intervala pomiče se lijevo od točke ekstrema $x = \frac{-1+\sqrt{19}}{6}$ tako da se dobije točka s jednostavnijim zapisom razlomka. Pomiče se u točku $x = \frac{1}{2}$ i provjerava se je li predznak funkcije ostao isti kao i kod točke ekstrema funkcije:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0 .$$

Slučajno se naišlo na nultočku funkcije, tj. rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. U radu, unutar intervala $\left[-\frac{1}{6}, \frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right]$ više se neće tražiti nultočka, već će se samo zabilježiti da je $x = \frac{1}{2}$ jedna od nultočaka zadane funkcije.

(d) Provjera uvjeta $f(a) \cdot f(b) < 0$ na intervalu $\left[\frac{-1+\sqrt{19}}{6}, +\infty\right]$

Određivanje sljedećeg podintervala započinje provjerom uvjeta $f(a) \cdot f(b) < 0$ na promatranom intervalu. Za krajnju točku ovog intervala pretpostavlja se točka $x = 1$ i provjerava se:

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) \approx 0{,}015 > 0 ,$$

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 - 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = -1 < 0 .$$

Primjećuje se da na odabranom podintervalu zaista vrijedi $f(a) \cdot f(b) < 0$, odnosno $f\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) \cdot f(1) < 0$.

Početna točka novog intervala pomiče se desno od točke ekstrema $x = \frac{-1+\sqrt{19}}{6}$ tako da se dobije točka s jednostavnijim zapisom razlomka. Odabire se točka $x = \frac{3}{5}$ i provjerava je li predznak funkcije ostao isti kao i kod apscise točke ekstrema funkcije:

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = -2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - 1 = 0{,}008 ,$$

vidi se da izabrana točka $x=\frac{3}{5}$ daje vrijednost funkcije s istim predznakom kao i apscisa točke ekstrema pa se navedenu točku je uzima za početnu točku novog intervala $\left[\frac{3}{5},1\right]$.

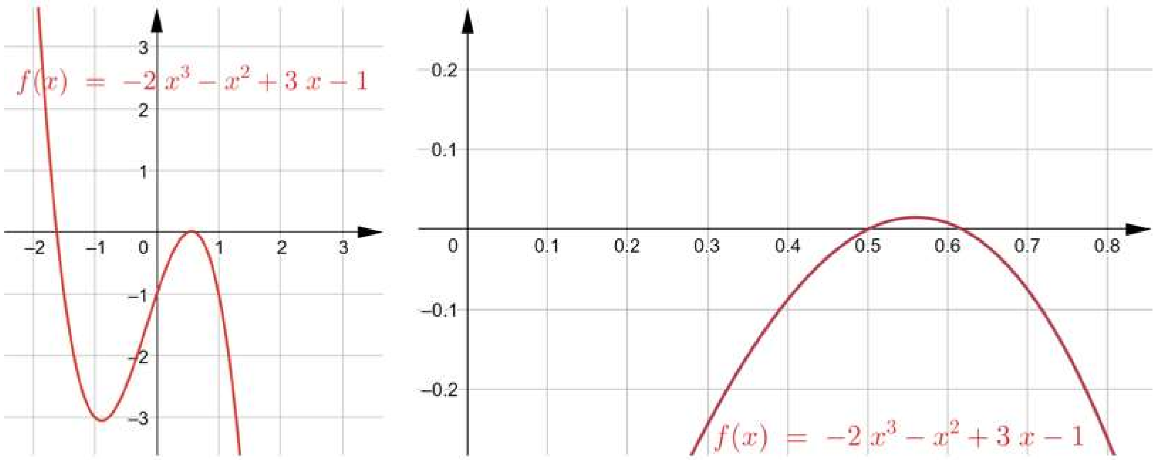
Sada još treba provjeriti postoji li unutar intervala $\left[\frac{3}{5},1\right]$ jedno ili više rješenja.

$$f'(x)=-6x^2-2x+3 \;\;\rightarrow\;\; f'\left(\frac{3}{5}\right)=-6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)+3=-0{,}36<0$$

$$f'(1)=-6\cdot 1^2-2\cdot 1+3=-5<0$$

Vidi se da derivacija f' ne mijenja predznak unutar predmetnog intervala, što znači da na tom intervalu postoji jedinstveno rješenje.

Iz postupka traženja intervala došlo se do jednog od tri rješenja $x=\frac{1}{2}$ i dva intervala $[-2,-1]$ i $\left[\frac{3}{5},1\right]$ unutar kojih treba potražiti preostale dvije nultočke zadane funkcije.

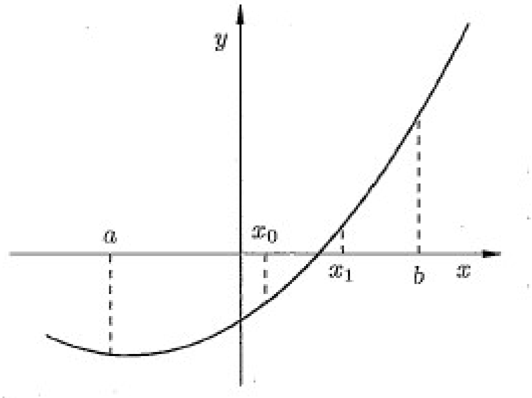


Slika 5. Funkcija $f(x)=-2x^3-x^2+3x-1$ i uvećani prikaz intervala $[0,1]$

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

5. METODA BISEKCIJE

Metoda bisekcije ili metoda raspolavljanja jedna je od najjednostavnijih metoda za rješavanje nelinearnih jednadžbi. Promatra se jednadžba $f(x)=0$ gdje je f neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$, a pri tome je zadovoljen uvjet: $f(a)\cdot f(b)<0$.



Slika 6. Raspolavljanje intervala $[a,b]$
Izvor: Singer, S.:Numerička matematika

Interval $[a,b]$ raspolovi se na dva podintervala $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ i $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. Vrijednost polovišta intervala $x_0=\frac{a+b}{2}$ uvrštava se u zadanu definiciju funkcije i po izračunu dobiva se vrijednost funkcije u točki x_0. Provjera se na kojem od dva novonastala intervala funkcija f mijenja predznak.[7] U slučaju da funkcija mijenja predznak na intervalu $[x_0,b]$, tada se u sljedećem koraku postavlja $a=x_0$, $b=b$ i opisani postupak se ponovi na intervalu $[x_0,b]$. U slučaju da funkcija mijenja predznak na prvom podintervalu, tada se postavi $a=a$, $b=x_0$ i postupak raspolavljanja se nastavlja na tom podintervalu. Postupak se ponavlja sve do pronalaska rješenja s traženom točnošću.[8]

Algoritam se može opisati na sljedeći način:

Polazi se od: $a_0=a$, $b_0=b$, $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$.

Za $n=1,2,...$ računa se: $x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$.

Ako je $f(a_{n-1})\cdot f(x_{n-1})<0$, tada je $a_n=a_{n-1}$, $b_n=x_{n-1}$.

---

[7] Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element d.o.o. Zagreb, 1998.

[8] Tevčić, M.: Inženjerska matematika, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

Ako je $f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$, tada je $a_n = x_{n-1}$, $b_n = b_{n-1}$. [9]

Pogreška aproksimacije kod metode bisekcije računa se prema sljedećem izrazu:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \tag{4}$$

Iterativni postupak može završiti ako se prema (4) ispuni uvjet

$$\frac{1}{2}(b_n - a_n) < \varepsilon \tag{5}$$

Uz navedeni uvjet, u iterativnom postupku koristi se i izraz za ocjenu pogreške aproksimacije (2) iz kojeg slijedi $|f(x_n)| < m_1 \cdot \varepsilon$.

[9] Karač, A.:Numeričke metode u inženjerstvu, Univerzitet u Zenici, Zenica, 2009.

5.1. Rješavanje jednadžbe $4-e^{-x}-x=0$ na intervalu $[-2,-1]$ metodom bisekcije

Metodom bisekcije na intervalu $[-2,-1]$ traži se nultočka funkcije $f(x)=4-e^{-x}-x$ s točnošću $\varepsilon=1\cdot 10^{-5}$.

Za zaustavljanje iterativnog procesa uzima se uvjet metode bisekcije $\frac{1}{2}(b_n-a_n)<1\cdot 10^{-5}$ i dodatni uvjet $|f(x_n)|<m_1\cdot 1\cdot 10^{-5}$. Da bi se dodatni uvjet mogao koristiti, računa se minimum apsolutne vrijednosti prve derivacije zadane funkcije na intervalu $[-2,-1]$.

Vrijednosti prve derivacije zadane funkcije u krajnjim točkama navedenog intervala izračunate su u 3. poglavlju. Uočava se da se minimum m_1 navedenog intervala postiže u točki $x=-1$.

$$m_1=\min_{x\in[a,b]}|f'(x)| \quad\rightarrow\quad m_1=\min_{x\in[-2,-1]}\left|e^{-x}-1\right|=|f'(-1)|=\left|e^{1}-1\right|=1{,}718281828$$

$$|f(x_n)|<m_1\cdot\varepsilon \quad\rightarrow\quad m_1\cdot\varepsilon=1{,}718281828\cdot 10^{-5}=0{,}000017182.$$

Uvjet zaustavljanja iterativnog procesa prema dodatnom uvjetu, na intervalu $[-2,-1]$ je $|f(x_n)|<0{,}000017182$.

Traženje nultočaka u intervalu $[-2,-1]$:

<u>Korak 1.</u>

Stavlja se $a_1=-2$, $b_1=-1$. Računa se $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{-2-1}{2}=-1{,}5$.

Računa se vrijednost funkcije u polovištu intervala $[-2,-1]$.

$f(x_1)=4-e^{-x_1}-x_1=4-e^{1,5}+1{,}5=1{,}018310930$.

$f(a_1)=-1{,}389056099$, $f(b_1)=2{,}281718172.$

Provjeravaju se uvjeti:

$f(a_1)\cdot f(x_1)<0 \;\rightarrow\; -1{,}389056099\cdot 1{,}018310930<0$,

$f(x_1)\cdot f(b_1)>0 \;\rightarrow\; 1{,}018310930\cdot 2{,}281718172>0$.

Vidi se da funkcija na intervalu $[a_1, x_1]$ mijenja predznak. Vrijednost funkcije u točki a_1 je negativna, a u točki x_1 pozitivna. Vrijednost početne točke intervala u sljedećem iterativnom koraku bit će jednaka vrijednosti točke a_1, tj. $a_2 = a_1$. Krajnja točka intervala u sljedećem koraku bit će točka polovišta intervala iz ovog koraka $b_2 = x_1$. Time će biti zadovoljen uvjet $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

<u>Korak 2.</u>

Polazi se od $a_2 = -2$, $b_2 = -1{,}5$.

Računa se:

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{-2 - 1{,}5}{2} = -1{,}75$$

$$f(x_2) = 4 - e^{-x_2} - x_2 = 4 - e^{1{,}75} + 1{,}75 = -0{,}004602676$$

$$f(a_2) = f(-2) = -1{,}389056099$$

$$f(b_2) = f(-1{,}5) = 1{,}018310930\,.$$

Provjeravaju se uvjeti:

$$f(a_2) \cdot f(x_2) > 0 \ \rightarrow \ -1{,}389056099 \cdot (-0{,}004602676) > 0\,,$$

$$f(x_2) \cdot f(b_2) < 0 \ \rightarrow \ -0{,}004602676 \cdot 1{,}018310930 < 0\,.$$

Vidi se da se predznak funkcije mijenja na intervalu $[x_2, b_2]$, pa će se u sljedećem koraku za početnu točku intervala uzeti vrijednost točke x_2 tj. $a_3 = x_2$, a za krajnju točku intervala točku b_2 tj. $b_3 = b_2$. Postavivši početnu i krajnju točku intervala za sljedeći korak, ispunjen je uvjet $f(a_3) \cdot f(b_3) < 0$.

<u>Korak 3.</u>

Polazi se od $a_3 = -1{,}75$, $b_3 = -1{,}5$.

Računa se:

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{-1{,}75 - 1{,}5}{2} = -1{,}625$$

$f(x_3) = 4 - e^{-x_3} - x_3 = 4 - e^{1,625} + 1,625 = 0,546580963$

$f(a_3) = f(-1,75) = -0,004602676$

$f(b_3) = f(-1,5) = 1,018310930$

Provjeravaju se uvjeti:

$f(a_3) \cdot f(x_3) < 0 \;\; \rightarrow \;\; -0,004602676 \cdot 0,546580963 < 0$,

$f(x_3) \cdot f(b_3) > 0 \;\; \rightarrow \;\; 0,546580963 \cdot 1,018310930 > 0$.

Vidi se da funkcija na intervalu $[a_3, x_3]$ mijenja predznak. Vrijednost funkcije u točki a_3 je negativna, a u točki x_3 pozitivna. Vrijednost početne točke intervala u sljedećem iterativnom koraku bit će jednaka vrijednosti točke a_3, tj. $a_4 = a_3$. Krajnja točka intervala u sljedećem koraku bit će točka polovišta intervala iz ovog koraka $b_4 = x_3$. Time će biti zadovoljen uvjet $f(a_4) \cdot f(b_4) < 0$.

<u>Korak 4.</u>

Polazi se od $a_4 = -1,75$, $b_4 = -1,625$.

Računa se:

$$x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{-1,75 - 1,625}{2} = -1,6875$$

$f(x_4) = 4 - e^{-x_4} - x_4 = 4 - e^{1,6875} + 1,6875 = 0,281551075$

$f(a_4) = f(-1,75) = -0,004602676$

$f(b_4) = f(-1,625) = 0,546580963$

Provjeravaju se uvjeti:

$f(a_4) \cdot f(x_4) < 0 \;\; \rightarrow \;\; -0,004602676 \cdot 0,281551075 < 0$,

$f(x_4) \cdot f(b_4) > 0 \;\; \rightarrow \;\; 0,281551075 \cdot 0,546580963 > 0$.

Vidi se da funkcija na intervalu $[a_4, x_4]$ mijenja predznak. Vrijednost funkcije u točki a_4 je negativna, a u točki x_4 pozitivna. Vrijednost početne točke intervala u sljedećem iterativnom koraku bit će jednaka vrijednosti točke a_4 tj. $a_5 = a_4$. Krajnja točka intervala u sljedećem koraku bit će točka polovišta intervala iz ovog koraka $b_5 = x_4$. Time će biti zadovoljen uvjet $f(a_5) \cdot f(b_5) < 0$.

Postupak se provodi do ispunjenja uvjeta za zaustavljanje procesa traženja nultočaka zadane funkcije: $\frac{1}{2}(b_n - a_n) < 1 \cdot 10^{-5}$ i $|f(x_n)| < 0{,}000017182$. Tablični prikaz rezultata primjene metode bisekcije za traženje nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[-2,-1]$ dan je u Tablici 2.

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$	$\frac{b_n - a_n}{2}$	$f(a_n)$ $*f(x_n)$
1	-2,000000000	-1,389056099	-1,000000000	-1,500000000	1,018310930	0,500000000	< 0
2	-2,000000000	-1,389056099	-1,500000000	-1,750000000	-0,004602676	0,250000000	> 0
3	-1,750000000	-0,004602676	-1,500000000	-1,625000000	0,546580963	0,125000000	< 0
4	-1,750000000	-0,004602676	-1,625000000	-1,687500000	0,281551075	0,062500000	< 0
5	-1,750000000	-0,004602676	-1,687500000	-1,718750000	0,141197835	0,031250000	< 0
6	-1,750000000	-0,004602676	-1,718750000	-1,734375000	0,068989169	0,015625000	< 0
7	-1,750000000	-0,004602676	-1,734375000	-1,742187500	0,032367497	0,007812500	< 0
8	-1,750000000	-0,004602676	-1,742187500	-1,746093750	0,013926144	0,003906250	< 0
9	-1,750000000	-0,004602676	-1,746093750	-1,748046875	0,004672688	0,001953125	< 0
10	-1,750000000	-0,004602676	-1,748046875	-1,749023438	0,000037748	0,000976563	< 0
11	-1,750000000	-0,004602676	-1,749023438	-1,749511719	-0,002281779	0,000488281	> 0
12	-1,749511719	-0,002281779	-1,749023438	-1,749267578	-0,001121844	0,000244141	> 0
13	-1,749267578	-0,001121844	-1,749023438	-1,749145508	-0,000542005	0,000122070	> 0
14	-1,749145508	-0,000542005	-1,749023438	-1,749084473	-0,000252118	0,000061035	> 0
15	-1,749084473	-0,000252118	-1,749023438	-1,749053955	-0,000107183	0,000030518	> 0
16	-1,749053955	-0,000107183	-1,749023438	-1,749038696	-0,000034717	0,000015259	> 0
17	-1,749038696	-0,000034717	-1,749023438	-1,749031067	0,000001516	0,000007629	< 0

Tablica 2. Metoda bisekcije – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[-2, -1]$

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

Vidi se da su u 17. koraku ispunjena oba uvjeta za zaustavljanje procesa traženja rješenja zadane jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$:

$$\frac{1}{2}(b_{17} - a_{17}) < 1 \cdot 10^{-5} \quad \rightarrow \quad 0{,}000007629 < 0{,}00001$$

$$|f(x_{17})| < |f(x_n)| \quad \rightarrow \quad 0{,}000001516 < 0{,}000017182 \ .$$

Računanje pogreške aproksimacije za dodatni uvjet:

$$|\xi - x_{17}| \leq \frac{|f(x_{17})|}{m_1} \quad \rightarrow \quad |\xi - x_{17}| \leq \frac{0{,}000001516}{1{,}718281828}$$

$|\xi - x_{17}| \leq 0{,}000000882.$

Do prvog približnog rješenja jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$, $x \approx -1{,}749031067$ u intervalu $[-2,-1]$ dolazi se u 17. iterativnom koraku uz pogreške aproksimacije $|\xi - x_{17}| \leq 0{,}000007629$ prema uvjetu metode i $|\xi - x_{17}| \leq 0{,}000000882$ prema dodatnom uvjetu. Vidi se da je dodatni uvjet u ocjeni pogreške aproksimacije precizniji.

5.2. Rješavanje jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$ na intervalu $[3, 4]$ metodom bisekcije

Metodom bisekcije na intervalu $[3,4]$ traži se nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

U poglavlju 4. pronađen je minimum m_1 u intervalu $[3,4]$, on se postiže u točki $x = 3$.

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| \quad \rightarrow \quad m_1 = \min_{x\in[3,4]} |e^{-x} - 1| = |f'(3)| = |e^{-3} - 1| = 0{,}950212931$$

$$|f(x_n)| < m_1 \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad m_1 \cdot \varepsilon = 0{,}950212931 \cdot 10^{-5} = 0{,}000009502$$

Uvjet zaustavljanja iterativnog procesa prema dodatnom uvjetu na intervalu $[3,4]$ je $|f(x_n)| < 0{,}000009502$, a prema uvjetu metode $\frac{1}{2}(b_n - a_n) < 1 \cdot 10^{-5}$. Tablični prikaz primjene metode bisekcije za traženje nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[3,4]$ dan je u Tablici 3.

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$	$\frac{b_n - a_n}{2}$	$f(a_n) * f(x_n)$
1	3,000000000	0,950212932	4,000000000	3,500000000	0,469802617	1,000000000	> 0
2	3,500000000	0,469802617	4,000000000	3,750000000	0,226482254	0,500000000	> 0
3	3,750000000	0,226482254	4,000000000	3,875000000	0,104245662	0,250000000	> 0
4	3,875000000	0,104245662	4,000000000	3,937500000	0,043003104	0,125000000	> 0
5	3,937500000	0,043003104	4,000000000	3,968750000	0,012352960	0,062500000	> 0
6	3,968750000	0,012352960	4,000000000	3,984375000	-0,002979068	0,031250000	< 0
7	3,968750000	0,012352960	3,984375000	3,976562500	0,004687518	0,015625000	> 0
8	3,976562500	0,004687518	3,984375000	3,980468750	0,000854368	0,007812500	> 0
9	3,980468750	0,000854368	3,984375000	3,982421875	-0,001062315	0,003906250	< 0
10	3,980468750	0,000854368	3,982421875	3,981445313	-0,000103965	0,001953125	< 0
11	3,980468750	0,000854368	3,981445313	3,980957031	0,000375204	0,000976563	> 0
12	3,980957031	0,000375204	3,981445313	3,981201172	0,000135620	0,000488281	> 0
13	3,981201172	0,000135620	3,981445313	3,981323242	0,000015828	0,000244141	> 0
14	3,981323242	0,000015828	3,981445313	3,981384277	-0,000044068	0,000122070	< 0
15	3,981323242	0,000015828	3,981384277	3,981353760	-0,000014120	0,000061035	< 0
16	3,981323242	0,000015828	3,981353760	3,981338501	0,000000854	0,000030518	> 0
17	3,981338501	0,000000854	3,981353760	3,981346130	-0,000006633	0,000015259	< 0
18	3,981338501	0,000000854	3,981346130	3,981342316	-0,000002890	0,000007629	< 0

Tablica 3. Metoda bisekcije – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[3,4]$

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

Vidi se da je u 16. koraku ispunjen dodatni uvjet za zaustavljanje procesa traženja rješenja zadane jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$:

$$|f(x_{16})| < |f(x_n)| \quad \rightarrow \quad 0{,}000000854 < 0{,}0000095021 .$$

Prema uvjetu metode bisekcije iterativni proces zaustavlja se u 18. koraku.

$$\frac{1}{2}(b_{18} - a_{18}) < 1 \cdot 10^{-5} \quad \rightarrow \quad 0{,}000007629 < 0{,}00001.$$

Računanje pogreške aproksimacije za dodatni uvjet:

$$|\xi - x_{16}| \leq \frac{|f(x_{16})|}{m_1} \quad \rightarrow \quad |\xi - x_{16}| \leq \frac{0{,}000000854}{0{,}950212931}$$

$$|\xi - x_{16}| \leq 0{,}000000898.$$

Do druge približne nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$, $x \approx 3{,}981338501$ na intervalu $[3{,}4]$, prema dodatnom uvjetu za ocjenu pogreške aproksimacije dolazi se u 16. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_{16}| \leq 0{,}000000898$. Prema uvjetu metode do rješenja $x \approx 3{,}981342316$ dolazi se u 18. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_{18}| \leq 0{,}000007629$. Vidi se da se preko dodatnog uvjeta do približnog rješenja jednadžbe dolazi dva koraka prije nego preko uvjeta metode i da je ocjena pogreške aproksimacije preciznija. Ako se rješenja u 16. i 18. koraku zaokruže na pet decimalnih mjesta vidi se da su ona jednaka $x \approx 3{,}98134$.

5.3. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na $[-2,-1]$ metodom bisekcije

Metodom bisekcije na intervalu $\left[-2,-1\right]$ traži se nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Za zaustavljanje iterativnog procesa uzima se uvjet metode bisekcije $\frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) < 1 \cdot 10^{-5}$ i dodatni uvjet $\left|f(x_n)\right| < m_1 \cdot 1 \cdot 10^{-5}$. Da bi se dodatni uvjet mogao koristiti, uzima se minimum apsolutne vrijednosti prve derivacije zadane funkcije na intervalu $\left[-2,-1\right]$.

Vrijednosti prve derivacije zadane funkcije u krajnjim točkama navedenog intervala izračunate su u 4. poglavlju. Uočava se da se minimum m_1 u navedenom intervalu nalazi u točki $x = -1$. Vrijedi:

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| = \min_{x\in[-2,-1]}\left|f'(-1)\right| = 1$$

$$\left|f(x_n)\right| < m_1 \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad m_1 \cdot \varepsilon = 1 \cdot 10^{-5} = 0{,}00001.$$

Uvjet zaustavljanja iterativnog procesa prema dodatnom uvjetu na ovom intervalu je $\left|f(x_n)\right| < 0{,}00001$.

U Tablici 4. nalazi se tablični prikaz rezultata dobivenih primjenom metode bisekcije za traženje nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[-2,-1\right]$.

Vidi se da je u 17. koraku ispunjen dodatni uvjet za zaustavljanje procesa traženja rješenja zadane jednadžbe:

$$\left|f(x_{17})\right| < \left|f(x_n)\right| \quad \rightarrow \quad 0{,}000003543 < 0{,}00001.$$

Prema uvjetu metode bisekcije iterativni proces zaustavlja se u 18. koraku.

$$\frac{1}{2}\left(b_{18} - a_{18}\right) < 1 \cdot 10^{-5} \quad \rightarrow \quad 0{,}000007629 < 0{,}00001.$$

Računanje pogreške aproksimacije za dodatni uvjet:

$$\left|\xi - x_{17}\right| \le \frac{\left|f(x_{17})\right|}{m_1} \quad \rightarrow \quad \left|\xi - x_{17}\right| \le \frac{0{,}000003543}{1}$$

$$\left|\xi - x_{17}\right| \le 0{,}000003543.$$

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$	$\frac{b_n - a_n}{2}$	$f(a_n)$ $*f(x_n)$
1	-2,000000000	5,000000000	-1,000000000	-1,500000000	-1,000000000	1,000000000	< 0
2	-2,000000000	5,000000000	-1,500000000	-1,750000000	1,406250000	0,500000000	> 0
3	-1,750000000	1,406250000	-1,500000000	-1,625000000	0,066406250	0,250000000	> 0
4	-1,625000000	0,066406250	-1,500000000	-1,562500000	-0,499511719	0,125000000	< 0
5	-1,625000000	0,066406250	-1,562500000	-1,593750000	-0,224914551	0,062500000	< 0
6	-1,625000000	0,066406250	-1,593750000	-1,609375000	-0,081367493	0,031250000	< 0
7	-1,625000000	0,066406250	-1,609375000	-1,617187500	-0,008011818	0,015625000	< 0
8	-1,625000000	0,066406250	-1,617187500	-1,621093750	0,029064059	0,007812500	> 0
9	-1,617187500	-0,008011818	-1,621093750	-1,619140625	0,010492876	-0,003906250	< 0
10	-1,617187500	-0,008011818	-1,619140625	-1,618164063	0,001232224	-0,001953125	< 0
11	-1,617187500	-0,008011818	-1,618164063	-1,617675781	-0,003391873	-0,000976563	> 0
12	-1,617675781	-0,003391873	-1,618164063	-1,617919922	-0,001080344	-0,000488281	> 0
13	-1,617919922	-0,001080344	-1,618164063	-1,618041992	0,000075810	-0,000244141	< 0
14	-1,617919922	-0,001080344	-1,618041992	-1,617980957	-0,000502299	-0,000122070	> 0
15	-1,617980957	-0,000502299	-1,618041992	-1,618011475	-0,000213253	-0,000061035	> 0
16	-1,618011475	-0,000213253	-1,618041992	-1,618026733	-0,000068723	-0,000030518	> 0
17	-1,618026733	-0,000068723	-1,618041992	-1,618034363	0,000003543	-0,000015259	< 0
18	-1,618026733	-0,000068723	-1,618034363	-1,618030548	-0,000032590	-0,000007629	> 0

Tablica 4. Metoda bisekcije – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $[-2, -1]$

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

Do prve približne nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$, $x \approx -1{,}618034363$ na intervalu $[-2,-1]$, prema dodatnom uvjetu za ocjenu pogreške aproksimacije dolazi se u 17. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_{17}| \leq 0{,}000003543$. Prema uvjetu metode bisekcije do rješenja $x \approx -1{,}618030548$ dolazi se u 18. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_{18}| \leq 0{,}000007629$. Vidi se da se preko dodatnog uvjeta do približnog rješenja jednadžbe dolazi jedan korak prije nego preko uvjeta metode. Ako se rješenja u 17. i 18. koraku zaokruže na pet decimalnih mjesta vidi se da su ona jednaka $x \approx -1{,}61803$.

5.4. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ metodom bisekcije

Metodom bisekcije na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ traži se nultočku funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

U 4. poglavlju izračunat je minimum: $m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \min_{x\in\left[0,\frac{3}{5}\right]} \left|f'\left(\frac{3}{5}\right)\right| = 0{,}36$.

Vrijedi: $|f(x_n)| < m_1 \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad m_1 \cdot \varepsilon = 0{,}36 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000036$.

Uvjet zaustavljanja iterativnog procesa prema dodatnom uvjetu, na predmetnom intervalu je $|f(x_n)| < 0{,}0000036$, a prema uvjetu metode $\frac{1}{2}(b_n - a_n) < 1 \cdot 10^{-5}$.

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$	$\frac{b_n - a_n}{2}$	$f(a_n) * f(x_n)$
1	0,600000000	0,008000000	1,000000000	0,800000000	-0,264000000	0,400000000	< 0
2	0,600000000	0,008000000	0,800000000	0,700000000	-0,076000000	0,200000000	< 0
3	0,600000000	0,008000000	0,700000000	0,650000000	-0,021750000	0,100000000	< 0
4	0,600000000	0,008000000	0,650000000	0,625000000	-0,003906250	0,050000000	< 0
5	0,600000000	0,008000000	0,625000000	0,612500000	0,002777344	0,025000000	> 0
6	0,612500000	0,002777344	0,625000000	0,618750000	-0,000380371	0,012500000	< 0
7	0,612500000	0,002777344	0,618750000	0,615625000	0,001244324	0,006250000	> 0
8	0,615625000	0,001244324	0,618750000	0,617187500	0,000443459	0,003125000	> 0
9	0,617187500	0,000443459	0,618750000	0,617968750	0,000034417	0,001562500	> 0
10	0,617968750	0,000034417	0,618750000	0,618359375	-0,000172258	0,000781250	< 0
11	0,617968750	0,000034417	0,618359375	0,618164063	-0,000068741	0,000390625	< 0
12	0,617968750	0,000034417	0,618164063	0,618066406	-0,000017117	0,000195313	< 0
13	0,617968750	0,000034417	0,618066406	0,618017578	0,000008661	0,000097656	> 0
14	0,618017578	0,000008661	0,618066406	0,618041992	-0,000004225	0,000048828	< 0
15	0,618017578	0,000008661	0,618041992	0,618029785	0,000002219	0,000024414	> 0
16	0,618029785	0,000002219	0,618041992	0,618035889	-0,000001003	0,000012207	< 0
17	0,618029785	0,000002219	0,618035889	0,618032837	0,000000608	0,000006104	> 0

Tablica 5. Metoda bisekcije – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

U Tablici 5. dan je tablični prikaz primjene metode bisekcije za traženje nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$.

Vidi se da je u 15. koraku ispunjen dodatni uvjet za zaustavljanje procesa traženja rješenja zadane jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$:

$$|f(x_{15})| < |f(x_n)| \quad \rightarrow \quad 0{,}000002219 < 0{,}0000036 .$$

Prema uvjetu metode bisekcije iterativni proces zaustavlja se u 17. koraku kad je:

$$\frac{1}{2}(b_{17} - a_{17}) < 1 \cdot 10^{-5} \quad \rightarrow \quad 0{,}000006104 < 0{,}00001 .$$

Računanje pogreške aproksimacije za dodatni uvjet:

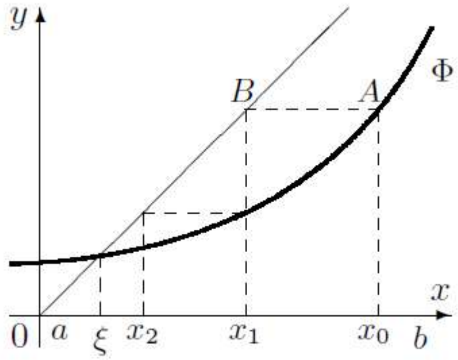
$$|\xi - x_{15}| \leq \frac{|f(x_{15})|}{m_1} \quad \rightarrow \quad |\xi - x_{15}| \leq \frac{0{,}000002219}{0{,}36}$$

$$|\xi - x_{15}| \leq 0{,}000006163 .$$

Do približne nultočke zadane funkcije, $x \approx 0{,}618029785$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$, prema dodatnom uvjetu za zaustavljanje procesa dolazi se u 15. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_{15}| \leq 0{,}000006163$. Prema uvjetu metode bisekcije do rješenja jednadžbe, $x \approx 0{,}618032837$ uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_{17}| \leq 0{,}000006104$, dolazi se u 17. koraku. Ako se rješenja u 15. i 17. koraku zaokruže na pet decimalnih mjesta vidi se da su ona jednaka $x \approx 0{,}61803$.

6. METODA JEDNOSTAVNIH ITERACIJA

Metoda jednostavnih iteracija koristi se za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$ ako je moguće preuređivanje jednadžbe u oblik $x = \varphi(x)$, a zatim traženjem vrijednosti $x = \xi$ takve da je $\xi = \varphi(\xi)$, što je ekvivalentno $f(\xi) = 0$. Vrijednost x za koju je $x = \varphi(x)$ naziva se fiksna točka relacije $x = \varphi(x)$. U preuređenom zapisu postoje dvije funkcije čije sjecište predstavlja rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$, a time i jednadžbe $f(x) = 0$.[10]



Slika 7. Metoda jednostavnih iteracija
Izvor: R. Scitovski, Numerička matematika

Nakon određivanja intervala u kojem se nalazi rješenje zadane jednadžbe, u njemu se izabire početna aproksimacija x_0. Zatim se izabrana vrijednost uvrštava u preuređenu funkciju kako bi se dobila vrijednost sljedeće aproksimacije. Algoritam je dan sljedećom rekurzivnom formulom:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad (n = 0,1,2,...). \tag{6}$$

Sljedeći teorem kaže pod kojim uvjetima postupak konvergira.

Teorem 1:

Neka je $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ diferencijabilna na $[a,b]$ i neka vrijedi:

$|\varphi'(x_n)| \le q < 1 \qquad \text{za} \qquad a < x < b$,

onda postupak iteracije

$x_{n+1} = \varphi(x_n), \;\; n = 0,1,2,...$

konvergira i to neovisno o početnoj vrijednosti $x_0 \in [a,b]$, a $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ jedinstveno je rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$ na intervalu $[a,b]$.

[10] Karač, A.:Numeričke metode u inženjerstvu, Univerzitet u Zenici, Zenica, 2009.

Za računanje pogreške aproksimacije u iterativnim traženjima rješenja zadanih funkcija koristit će se sljedeći izraz:

$$\left|\xi - x_n\right| < \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|, \tag{7}$$

gdje je $q = \max_{x\in[a,b]}\left|\varphi'(x)\right| < 1$.

Vidi se da ta formula omogućava ocijeniti pogrešku aproksimacije iz razlike uzastopnih aproksimativnih rješenja. Uz zadanu točnost $\varepsilon > 0$, postupak treba voditi dok ne bude

$\frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$, odnosno

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \frac{1-q}{q}\cdot\varepsilon. \tag{8}$$

Prijelaz s jednadžbe $f(x) = 0$ na $x = \varphi(x)$ nije jedinstven. Stoga treba uvijek paziti da bude osiguran uvjet Teorema 1: $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$ za $a < x < b$.[11]

Ako navedeni uvjet nije zadovoljen, proces će divergirati. U slučaju kada je navedeni uvjet ispunjen, a vrijednost $\left|\varphi'(x)\right|$ blizu x=1, konvergencija je vrlo spora.[12]

Uz navedeno koristit će se i dodatni izraz za računanje pogreške aproksimacije (2).

[11] Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element d.o.o., Zagreb, 1998.
[12] Karač, A.:Numeričke metode u inženjerstvu, Univerzitet u Zenici, Zenica, 2009.

6.1. Rješavanje jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$ na intervalu $[3, 4]$ metodom jednostavnih iteracija

Metodom jednostavnih iteracija na intervalu $[3,4]$ traži se nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

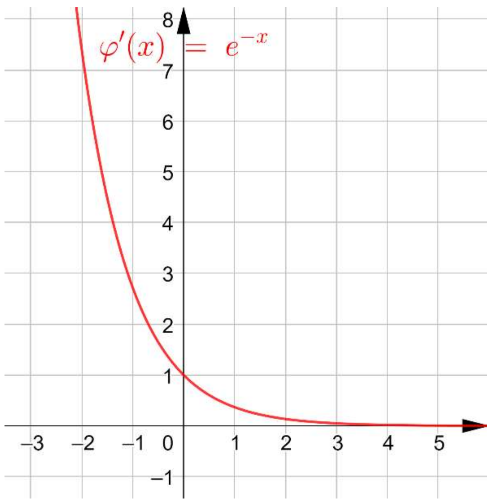
Da bi iterativni postupak konvergirao k rješenju unutar navedenog intervala, funkciju treba preurediti u oblik $x = \varphi(x)$ na način da unutar navedenog intervala imamo zadovoljen uvjet $|\varphi'(x)| < 1$.

Slijedi preuređivanje funkcije u jedan od mogućih oblika $x = \varphi(x)$ i derivacija $\varphi'(x)$:

$$x = 4 - e^{-x} \quad \rightarrow \quad \varphi(x) = 4 - e^{-x} \quad \rightarrow \quad \varphi'(x) = e^{-x}.$$

Grafički prikaz rješenja predmetne funkcije u obliku $x = 4 - e^{-x}$ dan je na Slici 2. u poglavlju 3.

Na Slici 8. prikazana je funkcija $\varphi'(x) = e^{-x}$.



Slika 8. Derivacija $\varphi'(x) = e^{-x}$
Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Iz prikaza derivacije $\varphi'(x) = e^{-x}$ iščitava se da preuređeni oblik funkcije $x = 4 - e^{-x}$ osigurava konvergenciju procesa na intervalu $[3,4]$, to jest da je zadovoljen uvjet $|\varphi'(x)| < 1$. Također se vidi da zapis funkcije u obliku $x = 4 - e^{-x}$ ne osigurava konvergenciju procesa na intervalu $[-2,-1]$ stoga će se za predmetni interval tražiti drugačiji zapis funkcije.

Provjera uvjeta $|\varphi'(x)| < 1$ za interval $[-2,-1]$:

$\varphi'(-2) = e^{2} \quad \rightarrow \quad |\varphi'(-2)| > 1$

$\varphi'(-1) = e^{1} \quad \rightarrow \quad |\varphi'(-1)| > 1$

Provjera uvjeta $|\varphi'(x)| < 1$ za interval $[3,4]$:

$\varphi'(3) = e^{-3} \quad \rightarrow \quad |\varphi'(3)| < 1$

$\varphi'(4) = e^{-4} \quad \rightarrow \quad |\varphi'(4)| < 1$

$$q = \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| = |\varphi'(3)| = e^{-3} \approx 0{,}049787$$

Dobivenu vrijednost zaokružuje se na dva decimalna mjesta - $q = 0{,}05$.

Računanje uvjeta za zaustavljanje iterativnog procesa u intervalu $[3,4]$ uz $q = 0{,}05$ i $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{1-0{,}05}{0{,}05} \cdot 10^{-5} = 0{,}00019$$

$$|x_n - x_{n-1}| < 0{,}00019$$

Ocjena pogreške aproksimacije računat će se i prema dodatnom izrazu (2). U poglavlju 5.2 za predmetni interval izračunato je $m_1 = 0{,}95$.

Postupak traženja nultočke u intervalu $[3,4]$:

Početna aproksimacija

$x_0 = 3$

$$f(x_0) = 4 - e^{-x_0} - x_0 = 4 - e^{-3} - 3 = 0{,}950212932$$

$$|\xi - x_0| \leq \frac{|f(x_0)|}{m_1} = \frac{0{,}950212932}{0{,}95} = 1{,}000224139$$

Korak 1.

$$x_1 = \varphi(x_0) = 4 - e^{-x_0} = 4 - e^{-3} = 3{,}950212932$$

$$|x_1 - x_0| = |3{,}950212932 - 3| = 0{,}950212932$$

$$f(x_1) = 4 - e^{-x_1} - x_1 = 4 - e^{-3{,}950212932} - 3{,}950212932 = 0{,}030536466$$

$$|\xi - x_1| \le \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0{,}030536466}{0{,}95} = 0{,}032143649$$

Korak 2.

$$x_2 = \varphi(x_1) = 4 - e^{-x_1} = 4 - e^{-3{,}950212932} = 3{,}980749398$$

$$|x_2 - x_1| = |3{,}980749398 - 3{,}950212932| = 0{,}030536466$$

$$f(x_2) = 4 - e^{-x_2} - x_2 = 4 - e^{-3{,}980749398} - 3{,}980749398 = 0{,}000578961$$

$$|\xi - x_2| \le \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{0{,}000578961}{0{,}95} = 0{,}000609432$$

Korak 3.

$$x_3 = \varphi(x_2) = 4 - e^{-x_2} = 4 - e^{-3{,}980749398} = 3{,}981328358$$

$$|x_3 - x_2| = |3{,}981328358 - 3{,}980749398| = 0{,}000578961$$

$$f(x_3) = 4 - e^{-x_3} - x_3 = 4 - e^{-3{,}981328358} - 3{,}981328358 = 0{,}000010807$$

$$|\xi - x_3| \le \frac{|f(x_3)|}{m_1} = \frac{0{,}000010807}{0{,}95} = 0{,}000011376$$

Korak 4.

$$x_4 = \varphi(x_3) = 4 - e^{-x_3} = 4 - e^{-3{,}981328358} = 3{,}981339165$$

$$|x_4 - x_3| = |3{,}981339165 - 3{,}981328358| = 0{,}000010807$$

$$f(x_4) = 4 - e^{-x_4} - x_4 = 4 - e^{-3{,}981339165} - 3{,}981339165 = 0{,}000000202$$

$$|\xi - x_4| \le \frac{|f(x_4)|}{m_1} = \frac{0{,}000000202}{0{,}95} = 0{,}000000212$$

U 4. koraku zadovoljena su oba uvjeta za zaustavljanje procesa:

$|x_4 - x_3| < 0{,}00019 \quad \rightarrow \quad 0{,}000010807 < 0{,}00019$

$|\xi - x_4| \leq 0{,}000000212 \quad \rightarrow \quad 0{,}000000212 < 0{,}00001.$

Pogreška aproksimacije računa se prema izrazu $|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$.

$$|\xi - x_4| \leq \frac{q}{1-q}|x_4 - x_3| \quad \rightarrow \quad |\xi - x_4| \leq \frac{0{,}05}{1-0{,}05}|3{,}981339165 - 3{,}981328358|$$

$$|\xi - x_4| \leq 0{,}000000568$$

Pogreška aproksimacije prema dodatnom izrazu (2) zadovoljena je u 4. iterativnom koraku. Tablični prikaz iteracijskog postupka metodom jednostavnih iteracija za traženje nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ zapisane u obliku $x = 4 - e^{-x}$ na intervalu $[3,4]$ dan je u Tablici 6.

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	3,000000000	3,950212932	–	0,950212932	1,000224139
1	3,950212932	3,980749398	0,950212932	0,030536466	0,032143649
2	3,980749398	3,981328358	0,030536466	0,000578961	0,000609432
3	3,981328358	3,981339165	0,000578961	0,000010807	0,000011376
4	3,981339165	3,981339367	0,000010807	0,000000202	0,000000212

Tablica 6. Metoda jednostavnih iteracija – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[3,4]$

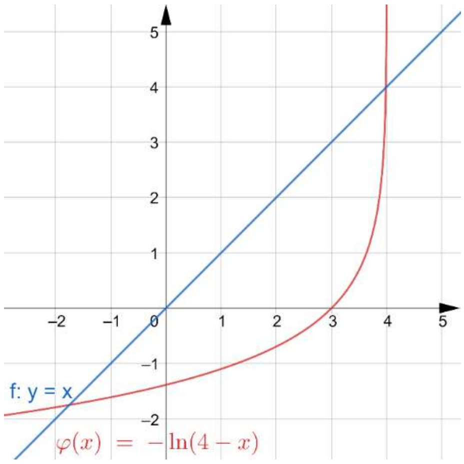
Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx 3{,}981339165$ u intervalu $[3,4]$ dolazi se u 4. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_4| \leq 0{,}000000568$. Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije, za približno rješenje u istom iterativnom koraku dobivena je pogreška aproksimacije $|\xi - x_4| \leq 0{,}000000212$.

6.2. Rješavanje jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$ na intervalu $[-2, -1]$ metodom jednostavnih iteracija

Metodom jednostavnih iteracija na intervalu $[-2,-1]$ traži se nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

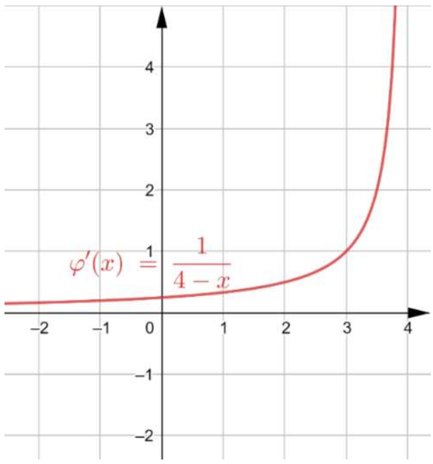
S obzirom na to da prvi preuređeni zapis funkcije $x = 4 - e^{-x}$ u 3. poglavlju ne osigurava konvergenciju procesa na predmetnom intervalu, funkcija $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ zapisuje se u drugom preuređenom obliku $x = -\ln(4 - x)$, $x < 4$.



Slika 9. Funkcija $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ zapisana u obliku $x = -ln(4 - x)$

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Sjecišta pravca $y = x$ i funkcije $\varphi(x) = -\ln(4 - x)$ daju nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$. Vidi se da se nultočke zadane funkcije nalaze unutar intervala $[-2,-1]$ i $[3,4]$.



Slika 10. Derivacija $\varphi'(x) = \frac{1}{4-x}$

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Provjera uvjeta $\varphi'(x) < 1$ za interval $[-2,-1]$:

$$\varphi(x) = -\ln(4-x) \quad \rightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{1}{4-x}\ , \quad x < 4\,.$$

$$\varphi'(-2) = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad |\varphi'(-2)| < 1$$

$$\varphi'(-1) = \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad |\varphi'(-1)| < 1$$

Iz računskog i grafičkog prikaza vidi se da zapis funkcije u obliku $x = -\ln(4-x)$ osigurava konvergenciju procesa u intervalu $[-2,-1]$.

Na navedenom intervalu vrijedi:

$$q = \max_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)| = |\varphi'(-1)| = \frac{1}{5} = 0{,}2\ .$$

Računanje uvjeta za zaustavljanje iterativnog procesa na intervalu $[-2,-1]$ uz $q = \frac{1}{5} = 0{,}2$ i $\varepsilon = 1\cdot 10^{-5}$:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{1-0{,}2}{0{,}2}\cdot 10^{-5} = 0{,}00004$$

$$|x_n - x_{n-1}| < 0{,}00004\ .$$

Ocjena pogreške aproksimacije računat će se i prema dodatnom izrazu (2). U poglavlju 5.1 za zadani interval izračunato je $m_1 = 1{,}72$.

U Tablici 7. dan je tablični prikaz iterativnog postupka metodom jednostavnih iteracija za traženje nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ zapisane u obliku $x = -\ln(4-x)$ na intervalu $[-2,-1]$.

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	-1,000000000	-1,609437912	–	2,281718172	1,326580332
1	-1,609437912	-1,724450521	0,609437912	0,609437912	0,354324368
2	-1,724450521	-1,744746566	0,115012608	0,115012608	0,066867795
3	-1,744746566	-1,748285796	0,020296045	0,020296045	0,011800026
4	-1,748285796	-1,748901688	0,003539231	0,003539231	0,002057692
5	-1,748901688	-1,749008826	0,000615892	0,000615892	0,000358076
6	-1,749008826	-1,749027462	0,000107138	0,000107138	0,000062289
7	-1,749027462	-1,749030703	0,000018636	0,000018636	0,000010835
8	-1,749030703	-1,749031267	0,000003242	0,000003242	0,000001885

Tablica 7. Metoda jednostavnih iteracija – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[-2, -1]$

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

U 7. koraku zadovoljen je uvjet metode jednostavnih iteracija za zaustavljanje procesa: $\lvert x_7 - x_6\rvert = \lvert -1{,}749027462 - (-1{,}749008826)\rvert = 0{,}000018636$

$$\lvert x_7 - x_6\rvert < 0{,}00004 \quad \rightarrow \quad 0{,}000018636 < 0{,}00004 \; .$$

Računanje pogreške aproksimacije:

$$\lvert \xi - x_7\rvert \le \frac{q}{1-q}\lvert x_7 - x_6\rvert \quad \rightarrow \quad \lvert \xi - x_7\rvert \le \frac{0{,}2}{1-0{,}2}\lvert -1{,}749027462 - (-1{,}749008826)\rvert$$

$$\lvert \xi - x_7\rvert \le 0{,}000004659 \; .$$

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx -1{,}749027462$ u intervalu $[-2, -1]$ dolazi se u 7. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $\lvert \xi - x_7\rvert \le 0{,}000004659$. Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije približno rješenje u 8. iterativnom koraku iznosi $x \approx -1{,}749030703$ i dobivena je pogreška aproksimacije $\lvert \xi - x_8\rvert \le 0{,}000001885$.

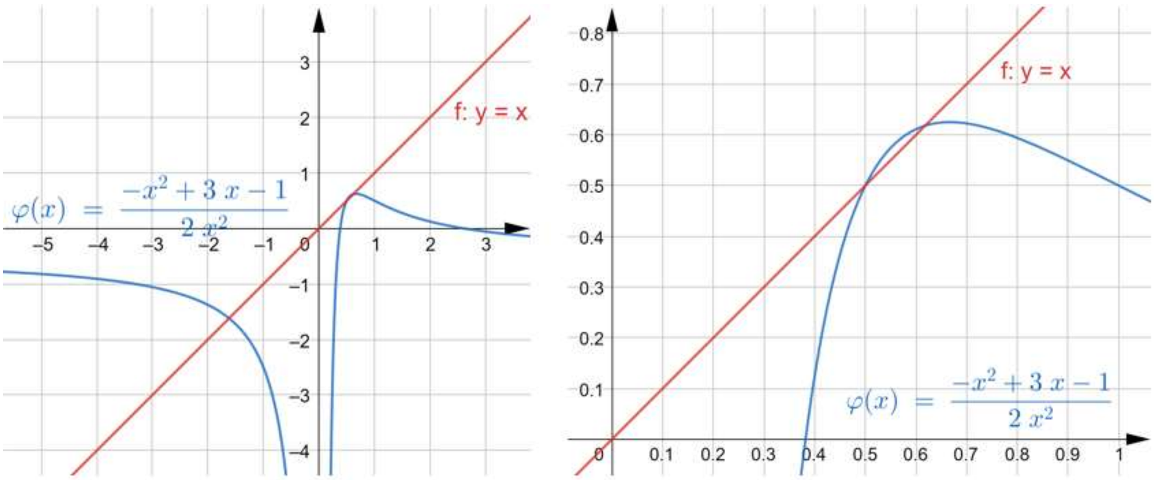
6.3. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na intervalu $[-2, -1]$ metodom jednostavnih iteracija

Metodom jednostavnih iteracija na intervalu $[-2,-1]$ traži se nultočku funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Preuređena funkcija u jednom od mogućih oblika $x = \varphi(x)$ i derivacija $\varphi'(x)$:

$$x = \frac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2} \quad \rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2} \quad \rightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{-3x + 2}{2x^3}.$$

Sjecišta pravca $y = x$ i funkcije $\varphi(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2}$ daju nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$.



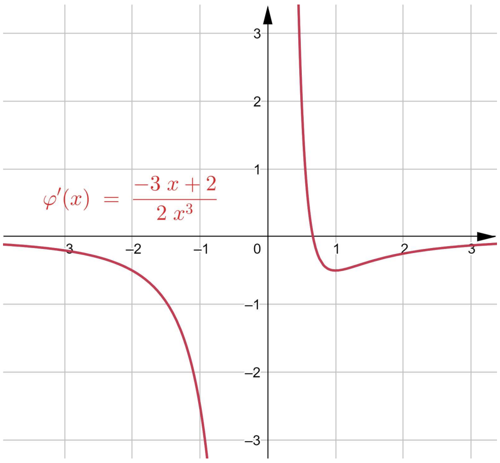
Slika 11. Funkcija $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ zapisana u obliku $x = \frac{-x^2+3x-1}{2x^2}$ i uvećani prikaz intervala $[0,1]$

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Provjera uvjeta $|\varphi'(x)| < 1$ za interval $[-2,-1]$:

$$\varphi'(-2) = \frac{-3x + 2}{2x^3} = \frac{-3 \cdot (-2) + 2}{2 \cdot (-2)^3} = -0{,}5 \quad \rightarrow \quad |\varphi'(-2)| < 1$$

$$\varphi'(-1) = \frac{-3x + 2}{2x^3} = \frac{-3 \cdot (-1) + 2}{2 \cdot (-1)^3} = -2{,}5 \quad \rightarrow \quad |\varphi'(-1)| > 1.$$



Slika 12. Derivacija $\varphi'(x) = \frac{-3x+2}{2x^3}$

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Iz računskog i grafičkog prikaza vidljivo je da rubna točka $x = -1$ intervala $[-2, -1]$ ne osigurava uvjet $|\varphi'(x)| < 1$. Da bi se dobila krajnja točka unutar intervala $[-2, -1]$, a koja bi zadovoljavala uvjet $|\varphi'(x)| < 1$, pokušat ćemo suziti navedeni interval s desne strane. Provjerimo bi li uvjet za konvergenciju iterativnog procesa $|\varphi'(x)| < 1$ vrijedio u točki $x = -1{,}5$. Prema Slici 12. ne može se odrediti ispunjava li navedena točka traženi uvjet, jer se vidi da je vrijednost prve derivacije $\varphi'(x)$ točke $x = -1{,}5$ baš u okolini vrijednosti $\varphi'(x) = -1$, a to može biti manje, veće ili $\varphi'(x) = -1$. Zbog navedenog, uvjet se provjerava računskim putem:

$$\varphi'(-1{,}5) = \frac{-3x+2}{2x^3} = \frac{-3\cdot(-1{,}5)+2}{2\cdot(-1{,}5)^3} = -0{,}963 \qquad \rightarrow \qquad |\varphi'(-1{,}5)| < 1 .$$

Računanjem $|\varphi'(-1{,}5)|$ potvrđuje se da navedeni uvjet vrijedi.

Provjerava uvjeta $f(-2)\cdot f(-1{,}5) < 0$:

$$f(-2) = -2(-2)^3 - (-2)^2 + 3(-2) - 1 = 5$$

$$f(-1{,}5) = -2(-1{,}5)^3 - (-1{,}5)^2 + 3(-1{,}5) - 1 = -1$$

Vidi se da su oba uvjeta zadovoljena i da se postizanje uvjeta $|\varphi'(x)| < 1$ na cijelom intervalu osigurava preuređivanjem intervala $[-2, -1]$ u interval $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$.

Za interval $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$ vrijedi $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| = |\varphi'(-1{,}5)| = 0{,}963$.

Vidi se da je q na intervalu vrlo blizu vrijednosti $q = 1$ što govori da će konvergencija procesa biti vrlo spora.

Računanje uvjeta za zaustavljanje iterativnog procesa u intervalu $\left[-2,-\frac{3}{2}\right]$ uz $q = 0{,}963$ i $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \frac{1-q}{q}\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{1-0{,}963}{0{,}963} \cdot 10^{-5} = 0{,}000000384$$

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < 0{,}000000384 \ .$$

Ocjena pogreške aproksimacije računa se i prema dodatnom izrazu (2).

$$f'(x) = -6x^2 - 2x + 3 \ \rightarrow \ f'(-2) = -6 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = -17$$

$$f'(-1{,}5) = -6 \cdot (-1{,}5)^2 - 2 \cdot (-1{,}5) + 3 = -7{,}5$$

$$m_1 = \min_{x \in [a,b]} \left|f'(x)\right| = \min_{x \in \left[-2,-\frac{3}{2}\right]} \left|f'(-1{,}5)\right| = 7{,}5$$

$$\frac{\left|f(x_n)\right|}{m_1} < 0{,}00001$$

U Tablici 8. i Tablici 9. dan je tablični prikaz iterativnog postupka metodom jednostavnih iteracija za traženje nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ zapisane u obliku $x = \frac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2}$ na intervalu $\left[-2,-\frac{3}{2}\right]$.

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	-1,500000000	-1,722222222	–	-1,000000000	0,133333333
1	-1,722222222	-1,539542144	0,222222222	1,083676269	0,144490169
2	-1,539542144	-1,685269198	0,182680079	-0,690801619	0,092106883
3	-1,685269198	-1,566113656	0,145727055	0,676835005	0,090244667
4	-1,566113656	-1,661640871	0,119155543	-0,468601492	0,062480199
5	-1,661640871	-1,583812640	0,095527216	0,429775334	0,057303378
6	-1,583812640	-1,646407006	0,077828231	-0,314031236	0,041870832
7	-1,646407006	-1,595532032	0,062594366	0,275809108	0,036774548
8	-1,595532032	-1,636533179	0,050874974	-0,208755082	0,027834011
9	-1,636533179	-1,603261408	0,041001147	0,178219633	0,023762618
10	-1,603261408	-1,630111592	0,033271771	-0,138033954	0,018404527
11	-1,630111592	-1,608345881	0,026850183	0,115674472	0,015423263
12	-1,608345881	-1,625925975	0,021765711	-0,090951550	0,012126873
13	-1,625925975	-1,611684728	0,017580095	0,075297327	0,010039644
14	-1,611684728	-1,623193849	0,014241247	-0,059790520	0,007972069
15	-1,623193849	-1,613874774	0,011509121	0,049107019	0,006547602
16	-1,613874774	-1,621408804	0,009319075	-0,039246148	0,005232820
17	-1,621408804	-1,615310216	0,007534031	0,032065971	0,004275463
18	-1,615310216	-1,620241826	0,006098589	-0,025735383	0,003431384
19	-1,620241826	-1,616250599	0,004931610	0,020955407	0,002794054
20	-1,616250599	-1,619478606	0,003991227	-0,016864822	0,002248643
21	-1,619478606	-1,616866464	0,003228006	0,013701787	0,001826905
22	-1,616866464	-1,618979318	0,002612142	-0,011047089	0,001472945
23	-1,618979318	-1,617269713	0,002112854	0,008962071	0,001194943
24	-1,617269713	-1,618652636	0,001709605	-0,007234238	0,000964565
25	-1,618652636	-1,617533712	0,001382923	0,005863241	0,000781766
26	-1,617533712	-1,618438865	0,001118924	-0,004736510	0,000631535
27	-1,618438865	-1,617706531	0,000905153	0,003836466	0,000511529
28	-1,617706531	-1,618298969	0,000732333	-0,003100788	0,000413438
29	-1,618298969	-1,617819656	0,000592438	0,002510539	0,000334739
30	-1,617819656	-1,618207414	0,000479313	-0,002029793	0,000270639
31	-1,618207414	-1,617893702	0,000387759	0,001642972	0,000219063
32	-1,617893702	-1,618147495	0,000313713	-0,001328646	0,000177153
33	-1,618147495	-1,617942168	0,000253793	0,001075255	0,000143367
34	-1,617942168	-1,618108278	0,000205327	-0,000869665	0,000115955

Tablica 8. Metoda jednostavnih iteracija – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$ -1.dio

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$	$f(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1}$
35	-1,618108278	-1,617973891	0,000166110	0,000703727	0,000093830
36	-1,617973891	-1,618082611	0,000134388	-0,000569227	0,000075897
37	-1,618082611	-1,617994654	0,000108721	0,000460580	0,000061411
38	-1,617994654	-1,618065812	0,000087958	-0,000372574	0,000049677
39	-1,618065812	-1,618008243	0,000071159	0,000301447	0,000040193
40	-1,618008243	-1,618054818	0,000057569	-0,000243857	0,000032514
41	-1,618054818	-1,618017138	0,000046574	0,000197297	0,000026306
42	-1,618017138	-1,618047621	0,000037679	-0,000159608	0,000021281
43	-1,618047621	-1,618022960	0,000030483	0,000129131	0,000017217
44	-1,618022960	-1,618042911	0,000024661	-0,000104466	0,000013929
45	-1,618042911	-1,618026770	0,000019951	0,000084517	0,000011269
46	-1,618026770	-1,618039829	0,000016141	-0,000068374	0,000009117
47	-1,618039829	-1,618029264	0,000013058	0,000055317	0,000007376
48	-1,618029264	-1,618037811	0,000010564	-0,000044752	0,000005967
49	-1,618037811	-1,618030896	0,000008547	0,000036205	0,000004827
50	-1,618030896	-1,618036490	0,000006915	-0,000029290	0,000003905
51	-1,618036490	-1,618031965	0,000005594	0,000023697	0,000003160
52	-1,618031965	-1,618035626	0,000004526	-0,000019171	0,000002556
53	-1,618035626	-1,618032664	0,000003661	0,000015510	0,000002068
54	-1,618032664	-1,618035060	0,000002962	-0,000012547	0,000001673
55	-1,618035060	-1,618033122	0,000002396	0,000010151	0,000001353
56	-1,618033122	-1,618034690	0,000001939	-0,000008212	0,000001095
57	-1,618034690	-1,618033421	0,000001568	0,000006644	0,000000886
58	-1,618033421	-1,618034448	0,000001269	-0,000005375	0,000000717
59	-1,618034448	-1,618033617	0,000001027	0,000004349	0,000000580
60	-1,618033617	-1,618034289	0,000000831	-0,000003518	0,000000469
61	-1,618034289	-1,618033746	0,000000672	0,000002846	0,000000379
62	-1,618033746	-1,618034185	0,000000544	-0,000002303	0,000000307
63	-1,618034185	-1,618033830	0,000000440	0,000001863	0,000000248
64	-1,618033830	-1,618034117	0,000000356	-0,000001507	0,000000201

Tablica 9. Metoda jednostavnih iteracija – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$ -2.dio

Izvor: Obrada autora u MS Excel-u

U 64. koraku zadovoljen je uvjet metode jednostavnih iteracija za zaustavljanje procesa:

$|x_{64} - x_{63}| = |-1{,}618033829 - (-1{,}618034185)| = 0{,}000000356$

$|x_{64} - x_{63}| < 0{,}000000356 \quad \rightarrow \quad 0{,}000000356 < 0{,}000000384$.

Pogreška aproksimacije računa se prema izrazu $|\xi - x_n| \leq \dfrac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$.

$|\xi - x_{64}| \leq \dfrac{q}{1-q}|x_{64} - x_{63}| \quad \rightarrow \quad |\xi - x_{64}| \leq \dfrac{0{,}963}{1-0{,}963}|-1{,}618033830 - (-1{,}618034185)|$

$|\xi - x_{64}| \leq 0{,}000009239$

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx -1{,}618033830$ na intervalu $\left[-2,-\dfrac{3}{2}\right]$ dolazi se u se u 64. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_{64}| \leq 0{,}000009239$.

Zbog vrijednosti q vrlo blizu 1, funkcija $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ zapisana u obliku $x = \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2}$ na intervalu $\left[-2,-\dfrac{3}{2}\right]$ ima vrlo sporu konvergenciju.

Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije približno rješenje u 46. iterativnom koraku iznosi $x \approx -1{,}618026770$ i dobivena je pogreška aproksimacije $|\xi - x_{46}| \leq 0{,}000009117$.

6.4. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ metodom jednostavnih iteracija

Metodom jednostavnih iteracija na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$ traži se nultočku funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Preuređena funkcija u jednom od mogućih oblika $x = \varphi(x)$ i derivacija $\varphi'(x)$:

$$x = \frac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2} \quad \rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2} \quad \rightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{-3x + 2}{2x^3}$$

Provjera uvjeta $|\varphi'(x)| < 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$ za $\varphi'(x) = \frac{-3x+2}{2x^3}$:

$$\varphi'(0,6) = \frac{-3x+2}{2x^3} = \frac{-3 \cdot 0,6 + 2}{2 \cdot 0,6^3} \approx 0,463 \quad \rightarrow \quad |\varphi'(0,6)| < 1$$

$$\varphi'(1) = \frac{-3x+2}{2x^3} = \frac{-3 \cdot 1 + 2}{2 \cdot 1^3} = -0,5 \quad \rightarrow \quad |\varphi'(1)| < 1$$

Sa Slike 12. te iz računske provjere vidi se da je uvjet $|\varphi'(x)| < 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$ zadovoljen te vrijedi: $q = \max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| = |\varphi'(1)| = 0,5$.

Računanje uvjeta za zaustavljanje iterativnog procesa na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$ uz $q = 0,5$ i $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{1-0,5}{0,5} \cdot 10^{-5} = 0,00001$$

$$|x_n - x_{n-1}| < 0,00001$$

Ocjena pogreške aproksimacije računat će se i prema dodatnom izrazu (2). U poglavlju 5.1 za predmetni interval izračunato je $m_1 = 0,36$.

Slijedi tablični prikaz iterativnog postupka metodom jednostavnih iteracija za traženje nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ zapisane u obliku $x = \frac{-x^2 + 3x - 1}{2x^2}$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$.

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	0,600000000	0,611111111	–	0,008000000	0,022222222
1	0,611111111	0,615702479	0,011111111	0,003429355	0,009525987
2	0,615702479	0,617292014	0,004591368	0,001205152	0,003347644
3	0,617292014	0,617802539	0,001589535	0,000389071	0,001080752
4	0,617802539	0,617962256	0,000510525	0,000121922	0,000338672
5	0,617962256	0,618011802	0,000159717	0,000037841	0,000105113
6	0,618011802	0,618027131	0,000049546	0,000011709	0,000032526
7	0,618027131	0,618031869	0,000015329	0,000003620	0,000010055
8	0,618031869	0,618033334	0,000004739	0,000001119	0,000003108

Tablica 10. Metoda jednostavnih iteracija – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ u intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

U 8. koraku zadovoljen je uvjet metode jednostavnih iteracija za zaustavljanje procesa: $|x_8 - x_7| = |0{,}618031869 - 0{,}61802713| = 0{,}000004739$

$$|x_8 - x_7| < 0{,}000004739 \quad \to \quad 0{,}000004739 < 0{,}00001 .$$

Računanje pogreške aproksimacije:

$$|\xi - x_8| \leq \frac{q}{1-q}|x_8 - x_7| \quad \to \quad |\xi - x_8| \leq \frac{0{,}5}{1-0{,}5}|0{,}618031869 - 0{,}61802713|$$

$$|\xi - x_8| \leq 0{,}000004739$$

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx 0{,}618031869$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ dolazi se u se u 8. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_8| \leq 0{,}000004739$. Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije za dobiveno približno rješenje u istom iterativnom koraku dobivena je pogreška aproksimacije $|\xi - x_8| \leq 0{,}000003108$.

<u>Napomena</u>: Zadana jednadžba ima i treću nultočku, $x = \frac{1}{2}$, koju nije tražena Metodom jednostavnih iteracija.

7. METODA TANGENTE (NEWTON-ova METODA)

Metoda tangente (u literaturi se pojavljuje još i pod nazivom Newtonova metoda odnosno Newton – Raphsonova metoda) jedna je od najčešćih iteracijskih metoda za rješavanje jednadžbe $f(x)=0$. Metoda se sastoji u tome da se $(n+1)$-va aproksimacija x_{n+1} odredi kao sjecište tangente na graf funkcije f u točki x_n sa osi x. Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(x_n, f(x_n))$ glasi: $y=f(x_n)+f'(x_n)\cdot(x-x_n)$.

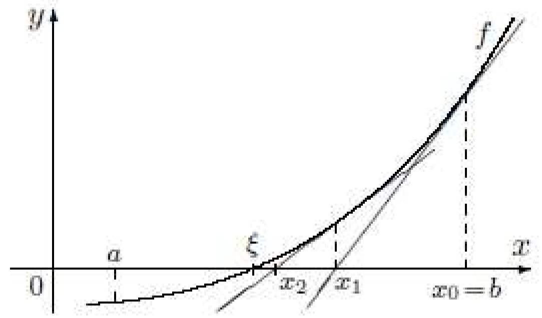
Ako se stavi $y=0$, dobije se njezino sjecište s x-osi, a to je $(n+1)$-va aproksimacija x_{n+1}:

$$0=f(x_n)+f'(x_n)\cdot(x_{n+1}-x_n) \tag{9}$$

iz čega slijedi:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{za } n=0,1,2... \tag{10}$$

[13]



Slika 13. Metoda tangente
Izvor: Scitovski, R.: Numerička matematika, Grafika d.o.o., Osijek, 2004.

Teorem 2:

Neka je $f(a)\cdot f(b)<0$, neka su f' i f'' različite od nule i ne mijenjaju predznak na $[a,b]$ Ako pođemo od neke točke $x_0\in[a,b]$ za koju vrijedi $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, te računamo

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n=0,1,2...,$$

onda niz $\{x_n\}$ konvergira k jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x)=0$.[14]

---

[13] Tevčić, M.: Inženjerska matematika, skripta, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2010.

[14] Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element d.o.o., Zagreb, 1998.

Kod metode tangente vrijedi sljedeća ocjena pogreške aproksimacije:

$$\left|\xi - x_n\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2, \quad n = 0,1,2..., \text{ gdje su:} \tag{11}$$

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| \quad \text{i} \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|. \tag{12}$$

Želimo li da je pogreška u izračunatoj aproksimaciji nultočke manja od ε, dovoljno je zahtijevati da vrijedi:

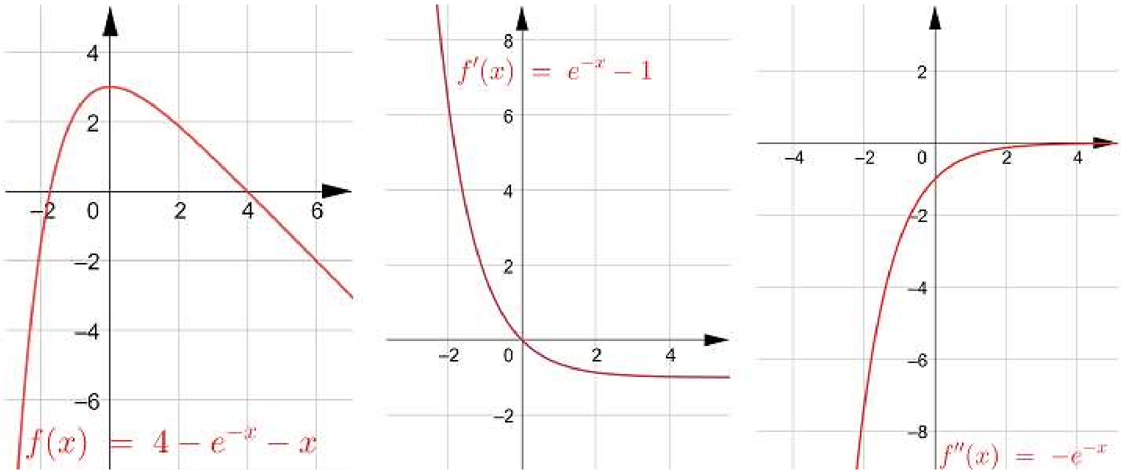
$$\left|\xi - x_n\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2 < \varepsilon. \tag{13}$$

Uz navedeni uvjet, u iterativnom postupku koristit će se i dodatni uvjet za ocjenu pogreške aproksimacije (2). Želi li se da i po ovom uvjetu pogreška u izračunatoj aproksimaciji nultočke bude manja od ε, dovoljno je zahtijevati da vrijedi (3).

7.1. Rješavanje jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$ na intervalu $[-2, -1]$ metodom tangente

Metodom tangente u intervalu $[-2,-1]$ traži se nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$

Na Slici 14. grafički je prikazana funkcija $f(x) = 4 - e^{-x} - x$, njena prva i druga derivacija. Intervali unutar kojih se nalaze nultočke funkcije određeni su u 3. poglavlju.



Slika 14. Funkcija $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ s pripadajućim derivacijama f' i f''
Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Sa Slike 14. jasno se vidi da zadana funkcija mijenja predznak na intervalu $[-2,-1]$. Isto se ne može reći za interval $[3,4]$ pa će se za taj interval kasnije još jednom pokazati da vrijedi uvjet $f(a) \cdot f(b) < 0$. Iz grafičkog prikaza f' vidi se da se na intervalu $[-2,-1]$ minimum m_1 računa u točki $x = -1$, a na intervalu $[3,4]$ u točki $x = 3$. Iz grafičkog prikaza f'' može se zaključiti da će se na intervalu $[-2,-1]$ maksimum M_2 računati u točki $x = -2$, a na intervalu $[3,4]$ u točki $x = 4$.

Sada treba odrediti početnu točku iterativnog postupka preko uvjeta Teorema 2. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Budući da su vrijednosti 2. derivacija f'' negativne na cijelom skupu **R**, da bi se zadovoljio navedeni teorem, mora vrijednost funkcije u početnoj točki iterativnog procesa $f(x_0)$ biti negativna. Promatrajući grafičke prikaze funkcije f i njene 2. derivacije f'', zapaža se da će početne točke iterativnih procesa biti: $x_0 = -2$ na intervalu $[-2,-1]$ i $x_0 = 4$ na intervalu $[3,4]$.

Postupak traženja nultočke na intervalu $[-2,-1]$:

$f(x)=4-e^{-x}-x \quad \rightarrow \quad f'(x)=e^{-x}-1 \quad \rightarrow \quad f''(x)=-e^{-x}$

$f(-2)=4-e^{-(-2)}-(-2)\approx -1{,}39$

$f(-1)=4-e^{-(-1)}-(-1)\approx 2{,}28$

$f(-2)\cdot f(-1)<0$ $\rightarrow$ funkcija mijenja predznak i ima rješenje unutar intervala $[-2,-1]$,

$f''(-2)=-e^{-(-2)}\approx -7{,}39$

$f''(-1)=-e^{-(-1)}\approx -2{,}72$

$f(-2)\cdot f''(-2)>0$ $\rightarrow$ $x_0=-2$ je početna točka iterativnog procesa na intervalu $[-2,-1]$.

Uz ispunjene uvjete za konvergenciju procesa, prema izrazima (13) i (2) računa se pogreška aproksimacije i zaustavlja iterativni proces.

Računanje vrijednosti m_1, M_2 i ε na predmetnom intervalu:

$$m_1=\min_{x\in[-2,-1]}|f'(x)|=|f'(-1)|=1{,}72\ ,\quad M_2=\max_{x\in[-2,-1]}|f''(x)|=|f''(-2)|=7{,}39$$

$$\varepsilon=1\cdot 10^{-5}\ \text{ i } \ \frac{M_2}{2m_1}=\frac{7{,}39}{2\cdot 1{,}72}=2{,}15\,.$$

Korak 1.

$x_0=-2$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0{,}1{,}2...$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{4-e^{-x_0}-x_0}{e^{-x_0}-1}=-2-\frac{4-e^{-(-2)}-(-2)}{e^{-(-2)}-1}=-1{,}782588214$$

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_1-x_0)^2=2{,}15\cdot(-1{,}782588214-(-2))^2=0{,}101625952$$

$$|\xi-x_1|\le 0{,}101625952\,.$$

$$f(x_1) = 4 - e^{-x_1} - x_1 = 4 - e^{1,782588214} + 1,782588214 = -0,16263582$$

$$\frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0,16263582}{1,72} = 0,094555709$$

$$|\xi - x_1| \le 0,094555709$$

Korak 2.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{4 - e^{-x_1} - x_1}{e^{-x_1} - 1} = -1,782588214 - \frac{4 - e^{-(-1,782588214)} - (-1,782588214)}{e^{-(-1,782588214)} - 1}$$

$$x_2 = -1,749700761$$

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_2 - x_1)^2 = 2,15 \cdot (-1,749700761 - (-1,782588214))^2 = 0,002325407$$

$$|\xi - x_2| \le 0,002325407$$

$$f(x_2) = 4 - e^{-x_2} - x_2 = 4 - e^{1,749700761} + 1,749700761 = -0,003180173$$

$$\frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{0,003180173}{1,72} = 0,001848938$$

$$|\xi - x_2| \le 0,001848938$$

Korak 3.

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{4 - e^{-x_2} - x_2}{e^{-x_2} - 1} = -1,749700761 - \frac{4 - e^{-(-1,749700761)} - (-1,749700761)}{e^{-(-1,749700761)} - 1}$$

$$x_3 = -1,749031657$$

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_3 - x_2)^2 = 2,15 \cdot (-1,749031657 - (-1,749700761))^2 = 0,000000963$$

$$|\xi - x_3| \le 0,000000963 < 0,00001.$$

$$f(x_3) = 4 - e^{-x_3} - x_3 = 4 - e^{1,749031657} + 1,749031657 = -0,000001287$$

$$\frac{|f(x_3)|}{m_1} = \frac{0,000001287}{1,72} = 0,000000749$$

$$|\xi - x_3| \le 0,000000749$$

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx -1{,}749031657$ na intervalu $[-2,-1]$ dolazi se u 3. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_3| \leq 0{,}000000963$. Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije za dobiveno približno rješenje u istom iterativnom koraku dolazi se do pogreške aproksimacije $|\xi - x_3| \leq 0{,}000000749$.

Tablični prikaz primjene metode tangente za traženje nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[-2,-1]$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	-2,000000000	-1,389056099	6,389056099	–	0,807590755
1	-1,782588214	-0,162635820	4,945224033	0,101625952	0,094555709
2	-1,749700761	-0,003180173	4,752880935	0,002325407	0,001848938
3	-1,749031657	-0,000001287	4,749032945	0,000000963	0,000000749

Tablica 11. Metoda tangente – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[-2,-1]$

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

7.2. Rješavanje jednadžbe $4-e^{-x}-x=0$ na intervalu $[3,4]$ metodom tangente

Vrijedi sljedeće:

$f(3)=4-e^{-3}-3\approx 0{,}95$

$f(4)=4-e^{-4}-4\approx -0{,}018$

$f(3)\cdot f(4)<0 \;\rightarrow$ funkcija mijenja predznak i ima rješenje unutar intervala $[3,4]$,

$f''(3)=-e^{-3}\approx -0{,}05$

$f''(4)=-e^{-4}\approx -0{,}018$

$f(4)\cdot f''(4)>0 \;\rightarrow\; x_0=4$ je početna točka iterativnog procesa na intervalu $[3,4]$.

Uz ispunjene uvjete za konvergenciju procesa, prema izrazima (13) i (2) računa se pogreška aproksimacije i zaustavlja iterativni proces.

Računanje vrijednosti m_1, M_2 i ε na predmetnom intervalu:

$$m_1=\min_{x\in[3,4]}|\varphi'(x)|=|\varphi'(3)|=0{,}95\ ,\ M_2=\max_{x\in[3,4]}|\varphi''(x)|=|\varphi''(3)|=0{,}05\ ,$$

$$\varepsilon=1\cdot 10^{-5}\ \text{ i }\ \frac{M_2}{2m_1}=\frac{0{,}05}{2\cdot 0{,}95}=0{,}026\ .$$

<u>Korak 1.</u>

$x_0=4$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{4-e^{-x_0}-x_0}{e^{-x_0}-1}=-2-\frac{4-e^{-4}-4}{e^{-4}-1}=3{,}981342640$$

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_1-x_0)^2=0{,}026\cdot(3{,}981342640\ -4)^2=0{,}000009051$$

$$|\xi-x_1|\le 0{,}000009051<0{,}00001.$$

$$f(x_1)=4-e^{-x_1}-x_1=4-e^{-3{,}981342640}-3{,}981342640\ =0{,}000003208$$

$$\frac{|f(x_1)|}{m_1}=\frac{0{,}000003208}{0{,}95}=0{,}000003377$$

$$|\xi-x_1|\le 0{,}000003377\ .$$

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx 3{,}981342640$ na intervalu $[3,4]$ dolazi se već u 1. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_1| \le 0{,}000009051$. Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije za dobiveno približno rješenje u istom iterativnom koraku dolazi se do pogreške aproksimacije $|\xi - x_1| \le 0{,}000003377$.

Tablični prikaz primjene metode tangente za traženje nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[3,4]$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$	$\frac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1}$
0	4,000000000	-0,018315639	-0,981684361	–	0,019279620
1	3,981342640	-0,000003208	-0,981339432	0,000009051	0,000003377
2	3,9813393709114	-0,0000000000001	-0,9813393709113	0,0000000000003	0,0000000000001

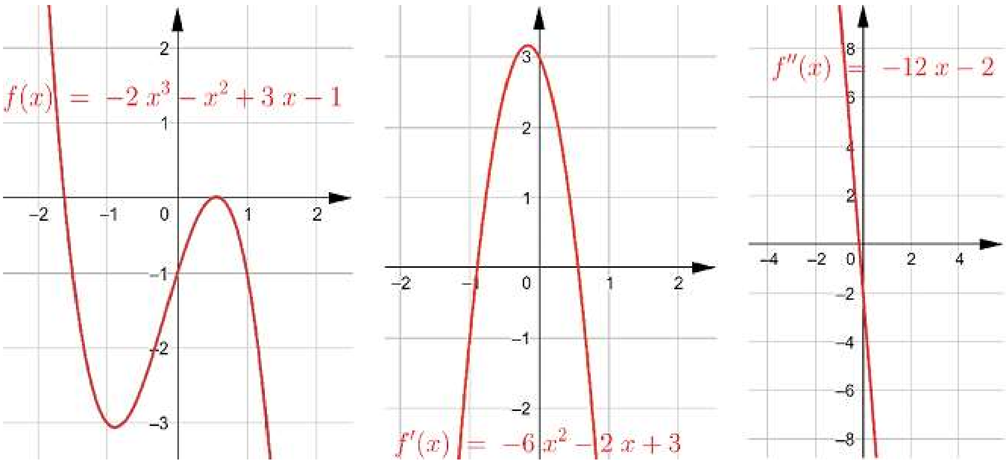
Tablica 12. Metoda tangente – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu [3,4]
Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

U tablici se vidi da se u sljedećem koraku dobiva rješenje sa čak 12 signifikantnih znamenaka.

7.3. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na intervalu $[-2, -1]$ metodom tangente

Metodom tangente na intervalu $[-2,-1]$ traži se nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Na Slici 15. grafički je prikazana funkcija $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$, njena prva i druga derivacija. Intervali unutar kojih se nalaze rješenja funkcije određeni su u 4. poglavlju. Kod određivanja intervala pronađeno je i jedno od tri rješenja zadane funkcije, $x = \frac{1}{2}$, koje se neće tražiti iterativnim procesom.



Slika 15. Funkcija $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ s pripadajućim derivacijama f' i f''

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Sa Slike 15. jasno se vidi da zadana funkcija mijenja predznak na intervalu $[-2,-1]$. Isto se ne može reći za interval $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ pa će se za taj interval kasnije još jednom pokazati da vrijedi uvjet $f(a) \cdot f(b) < 0$. Iz grafičkog prikaza derivacije f' vidi se da će na intervalu $[-2,-1]$ minimum m_1 biti računat u točki $x = -1$, a na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ u točki $x = \frac{3}{5}$. Iz grafičkog prikaza 2. derivacije f'' može se zaključiti da će se na intervalu $[-2,-1]$ maksimum M_2 računati u točki $x = -2$, a na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ u točki $x = 1$. Početne točke iterativnog postupka moraju zadovoljavati uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. $f''(x)$ ima pozitivnu vrijednost na cijelom intervalu $[-2,-1]$, pa se za početnu točku intervala mora uzeti točka navedenog intervala s pozitivnom vrijednošću $f(x)$, to jest točka $x_0 = -2$. Na cijelom intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ 2. derivacija f'' poprima negativne vrijednosti, pa se za početnu točku uzima točka s negativnom vrijednošću $f(x)$, to jest točku $x_0 = 1$.

Postupak traženja nultočke na intervalu $[-2,-1]$:

$f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1 \quad \rightarrow \quad f'(x) = -6x^2 - 2x + 3 \quad \rightarrow \quad f''(x) = -12x - 2$

$f(-2) = -2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1 = 5$

$f(-1) = -2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1 = -3$

$f(-2) \cdot f(-1) < 0 \rightarrow$ funkcija mijenja predznak i ima rješenje unutar intervala $[-2,-1]$,

$f''(-2) = -12 \cdot (-2) - 2 = 22$

$f''(-1) = -12 \cdot (-1) - 2 = 10$

$f(-2) \cdot f''(-2) > 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = -2$ je početna točka iterativnog procesa na intervalu $[-2,-1]$.

Uz ispunjene uvjete za konvergenciju procesa, prema izrazima (13) i (2) računa se pogreška aproksimacije i zaustavlja iterativni proces.

Računanje vrijednosti m_1, M_2 i ε na predmetnom intervalu:

$$m_1 = \min_{x \in [-2,-1]} |\varphi'(x)| = |\varphi'(-1)| = 1, \qquad M_2 = \max_{x \in [-2,-1]} |\varphi''(x)| = |\varphi''(-2)| = 22,$$

$$\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{M_2}{2m_1} = \frac{22}{2 \cdot 1} = 11.$$

Tablični prikaz primjene metode tangente za traženje nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $[-2,-1]$ dan je u Tablici 13.

Do približnog rješenja $x \approx -1{,}618033990$ zadane jednadžbe na intervalu $[-2,-1]$, prema uvjetu metode tangente, dolazi se u 4. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_4| \le 1{,}5 \cdot 10^{-8}$. Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije za dobiveno približno rješenje u istom iterativnom koraku osigurana je pogreška aproksimacije $|\xi - x_4| \le 1{,}2 \cdot 10^{-8}$.

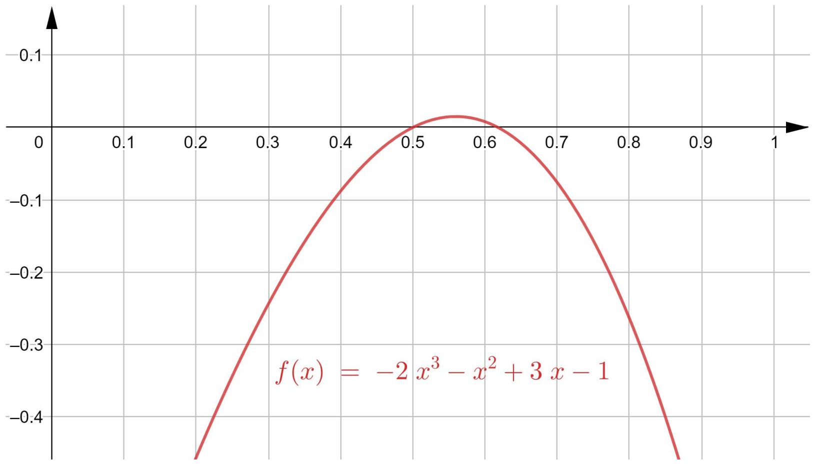
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$	$\frac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1}$
0	-2,000000000	5,000000000	-17,000000000	–	5,000000000
1	-1,705882353	0,900671687	-11,048442907	0,951557093	0,900671687
2	-1,624362116	0,060290107	-9,582589465	0,073101040	0,060290107
3	-1,618070486	0,000345716	-9,472771609	0,000435431	0,000345716
4	-1,618033990	0,000000012	-9,472135976	0,000000015	0,000000012

Tablica 13. Metoda tangente – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $[-2, -1]$

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

7.4. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ metodom tangente

Metodom tangente traži se nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$, s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.



Slika 16. Uvećani prikaz funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $[0,1]$
Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Vrijedi:

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = -2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{5} - 1 = 0{,}008$$

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 - 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = -1$$

$f\left(\frac{3}{5}\right) \cdot f(1) < 0 \rightarrow$ funkcija mijenja predznak i ima rješenje unutar intervala $\left[\frac{3}{5},1\right]$,

$$f''\left(\frac{3}{5}\right) = -12 \cdot \frac{3}{5} - 2 = -9{,}2$$

$$f''(1) = -12 \cdot 1 - 2 = -14$$

$f(1) \cdot f''(1) > 0 \rightarrow x_0 = 1$ je početna točka iterativnog procesa na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$.

Uz ispunjene uvjete za konvergenciju procesa, prema izrazima (13) i (2) računa se pogreška aproksimacije i zaustavlja iterativni proces.

Računanje vrijednosti m_1, M_2 i ε na predmetnom intervalu:

$$m_1 = \min_{x\in\left[\frac{3}{5},1\right]} |\varphi'(x)| = \left|\varphi'\left(\frac{3}{5}\right)\right| = 0,36 \ , \ M_2 = \max_{x\in\left[\frac{3}{5},1\right]} |\varphi''(x)| = |\varphi''(1)| = 14,$$

$$\varepsilon = 1\cdot 10^{-5} \ \text{i} \ \frac{M_2}{2m_1} = \frac{14}{2\cdot 0,36} = 19,44 .$$

U Tablici 14. dan je tablični prikaz rezultata dobivenih metodom tangente za traženje nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$	$\frac{\|f(x_n)\|}{m_1}$
0	1,000000000	-1,000000000	-5,000000000	–	2,777777778
1	0,800000000	-0,264000000	-2,440000000	0,777600000	0,733333333
2	0,691803279	-0,065364660	-1,255157216	0,227574953	0,181568501
3	0,639726408	-0,013686561	-0,734952075	0,052721290	0,038018224
4	0,621104023	-0,001664994	-0,556829287	0,006741660	0,004624982
5	0,618113889	-0,000042207	-0,528616461	0,000173811	0,000117241
6	0,618034046	-0,000000030	-0,527864580	0,000000124	0,000000083

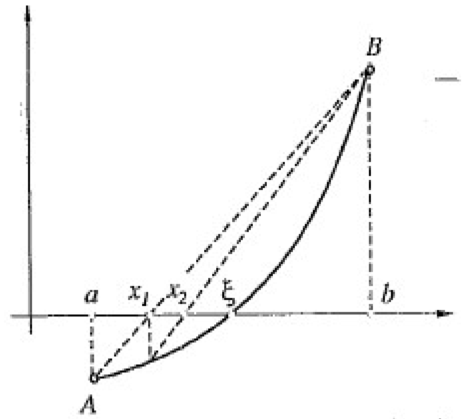
Tablica 14. Metoda tangente – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx 0,618034046$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$, prema uvjetu metode tangente (13), dolazi se u se u 6. iterativnom koraku uz pogrešku aproksimacije $|\xi - x_6| \le 1,24\cdot 10^{-7}$. Preko dodatnog izraza za ocjenu pogreške aproksimacije (2) za dobiveno približno rješenje u istom iterativnom koraku zadovoljena je pogreška aproksimacije $|\xi - x_6| \le 8,3\cdot 10^{-8}$.

8. METODA SEKANTE (REGULA FALSI)

U literaturi pojavljuje se više različitih definicija metode sekante. U ovom radu prikazana je metoda za koju se koristi i naziv regula falsi. Kod te metode jedna točka intervala ostaje fiksna tijekom cijelog iterativnog procesa.



Slika 17. Metoda sekante – regula falsi

Izvor: Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element, Zagreb, 1998.

Pretpostavimo da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Ako kroz krajnje točke luka AB provučemo sekantu, onda njena jednadžba glasi:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{14}$$

Za $y = 0$ dobivamo sjecište sekante s osi x:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \cdot (b-a). \tag{15}$$

Ponovimo sada postupak na podintervalu $[x_1, b] \subset [a, b]$ kao što je ilustrirano na Slici 16. Taj postupak možemo nastaviti pri čemu općenito niz $\{x_i\}$ može divergirati. Da osiguramo konvergenciju postupka, pretpostavimo da f'' ne mijenja predznak na $[a,b]$. Time je f konveksna (konkavna) funkcija na $[a,b]$, pa sekanta siječe graf od f nad $[a,b]$ samo u krajnjim točkama *A, B*. Za daljnja razmatranja, pretpostavimo da je npr. $f'' > 0$ na $[a,b]$ (slučaj $f'' < 0$ možemo svesti na rješavanje jednadžbe $-f(x) = 0$).

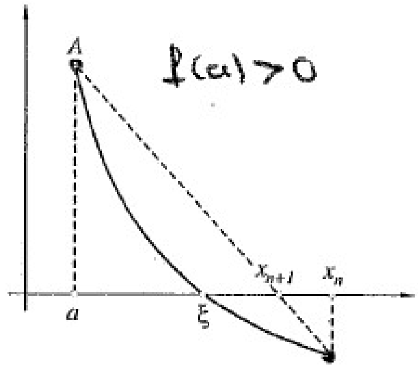
Uz $f'' > 0$ na $[a,b]$ nastupaju dva podslučaja.[15]

[15] Izvor: Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element d.o.o. Zagreb, 1998.

1. Ako je $f(a)>0$, uzimamo $x_0=b$ za prvu aproksimaciju, a ostale dobijemo rekurzivnom formulom:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}\cdot(x_n-a),\ n=0,1,2,... \tag{16}$$

što zbog konveksnosti funkcije f daje jedan ograđen monotono padajući niz aproksimacija $\{x_n\}$, što znači da niz $\{x_n\}$ konvergira k nekom $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

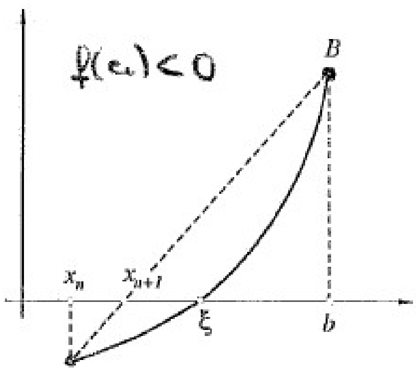


Slika 18. Konveksna funkcije f na intervalu $[a,b]$, $f(a)>0$
Izvor: Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element, Zagreb, 1998.

2. Ako je $f(a)<0$, uzimamo $x_0=a$ za prvu aproksimaciju, a ostale dobijemo rekurzivnom formulom:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}\cdot(b-x_n),n=0,1,2,... \tag{17}$$

Zbog konveksnosti funkcije f dobivamo ograđen monotono rastući niz aproksimacija $\{x_n\}$ koji konvergira k nekom $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.[16]



Slika 19. Konveksna funkcije f na intervalu $[a,b]$, $f(a)<0$
Izvor: Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element, Zagreb, 1998.

[16] Izvor: Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element d.o.o. Zagreb, 1998.

Kod metode sekante vrijedi sljedeća ocjena pogreške aproksimacije:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \quad n = 0,1,2..., \tag{18}$$

gdje su:

$$m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|. \tag{19}$$

Želi li se da je pogreška u izračunatoj aproksimaciji nultočke manja od ε , dovoljno je zahtijevati da vrijedi:

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \text{[17]} \tag{20}$$

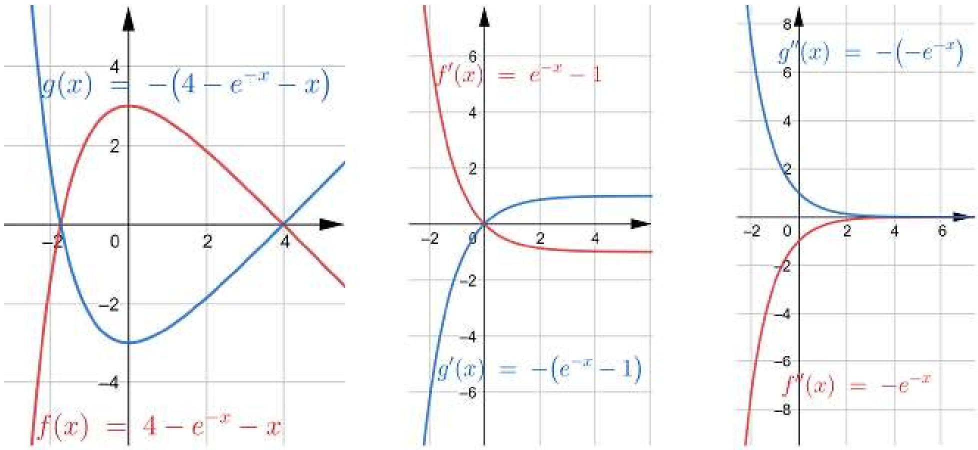
Uz navedeni uvjet, u iterativnom postupku koristit će se i dodatni uvjet za ocjenu pogreške aproksimacije (2). Želi li se da i po ovom uvjetu pogreška u izračunatoj aproksimaciji nultočke bude manja od unaprijed zadanog ε, dovoljno je zahtijevati da vrijedi (3).

[17] Izvor: Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element d.o.o., Zagreb, 1998.

8.1. Rješavanje jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$ na intervalu $[-2, -1]$ metodom sekante

Metodom sekante traži se nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[-2,-1]$, s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Uvjeti za konvergenciju iterativnog procesa pri traženju nultočaka funkcije na intervalu $[a,b]$ kod metode sekante su: $f(a) \cdot f(b) < 0$ i $f''(x) > 0$, odnosno da zadana funkcija mijenja predznak i da je konveksna na intervalu $[a,b]$ (slučaj $f'' < 0$ možemo svesti na rješavanje jednadžbe $-f(x) = 0$). Kod prethodnih metoda pokazano je da za zadanu funkciju na intervalima $[-2,-1]$ i $[3,4]$ vrijedi uvjet $f(a) \cdot f(b) < 0$. Uvjet $f''(x) > 0$ na navedenim intervalima nije bio od značaja za konvergenciju procesa u prethodnim metodama.



Slika 20. Funkcija $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ s pripadajućim f' i f'', te preslikama g, g', g''
Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Sa Slike 19. vidi se da uvjet $f''(x) > 0$ nije ispunjen na cijelom području definicije (funkcija i njene derivacije iscrtane su crvenom bojom), već vrijedi $f''(x) < 0, \forall x$, odnosno funkcija je konkavna na navedenim intervalima.

Ako se promijeni predznak funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$, dobije se zrcalna preslika funkcije u odnosu na x-os: $g(x) = -f(x) = e^{-x} + x - 4$ (funkcija g i njene derivacije iscrtane su plavom bojom), što znači da se mijenja samo predznak vrijednosti funkcije za svaku točku u kojoj je funkcija definirana. Isto vrijedi i za derivacije funkcije. Navedenom promjenom predznaka dobiva se ispunjenje uvjeta $f''(x) > 0$, a rješenja koja se traže ostaju ista.

Promijenjeni predznaci:

$$f(x) = 4 - e^{-x} - x \quad \rightarrow \quad g(x) = -f(x) = e^{-x} + x - 4$$

$$f'(x) = e^{-x} - 1 \quad \rightarrow \quad g'(x) = -f'(x) = 1 - e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} \quad \rightarrow \quad g''(x) = -f''(x) = e^{-x}$$

Postupak traženja nultočke na intervalu $[-2,-1]$:

Iz Slike 19. vidljivo je da za novi zapis funkcije $g(x) = e^{-x} + x - 4$ na intervalu $[-2,-1]$ vrijedi $g(-2) > 0$ i $g''(x) > 0$ pa za prvu aproksimaciju vrijedi $a = -2$ i $x_0 = b = -1$.

Potvrda navedenog:

$$g(-2) = e^2 - 2 - 4 \approx 1{,}39 \quad \rightarrow \quad g(-2) > 0,$$

$$g''(-2) = e^2 \approx 7{,}39 \quad \text{i} \quad g''(-1) = e^1 \approx 2{,}72 \quad \rightarrow \quad \underset{x\in[-2,-1]}{g''(x)} > 0.$$

Ocjena pogreške aproksimacije i zaustavljanje iterativnog procesa, provodit će se prema izrazima (18), (20), (2) i (3).

Računanje vrijednosti m_1 i M_1 na predmetnom intervalu:

$$m_1 = \min_{x\in[-2,-1]} |g'(x)| = |g'(-1)| = 1{,}72 \quad \text{i} \quad M_1 = \max_{x\in[-2,-1]} |g'(x)| = |g'(-2)| = 6{,}39.$$

Prema određenim početnim parametrima za iterativni postupak na intervalu $[-2,-1]$ koristi se sljedeća formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a) \quad \text{odnosno} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g(x_n) - g(a)} \cdot (x_n - a).$$

<u>Korak 1.</u>

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g(x_0) - g(a)} \cdot (x_0 - a) = -1 - \frac{-2{,}281718172}{-2{,}281718172 - 1{,}389056099}(-1-(-2))$$

$$x_1 = -1{,}621590434$$

$$|\xi - x_1| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_1 - x_0| \quad \rightarrow \quad |\xi - x_1| \leq \frac{6{,}39 - 1{,}72}{1{,}72} |-1{,}621590434 - (-1)|$$

$$|\xi - x_1| \leq 1{,}690725980$$

Dodatna ocjena za pogrešku aproksimacije:

$$|\xi - x_1| \le \frac{|g(x_1)|}{m_1} \;\rightarrow\; |\xi - x_1| \le \frac{|-0{,}560457117|}{1{,}72} \;\rightarrow\; |\xi - x_1| \le 0{,}325847161 \;.$$

S iterativnim koracima nastavlja se do postignuća uvjeta $|\xi - x_n| \le 0{,}00001$.

Tablični prikaz rezultata dobivenog primjenom metode sekante za traženje nultočke na intervalu $[-2,-1]$ funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ pomoću funkcije $g(x) = e^{-x} + x - 4$:

n	x_n	$g(x_n)$	$\frac{M_1 - m_1}{m_1}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{\lvert g(x_n)\rvert}{m_1}$
0	-1,000000000	-2,281718172	—	1,326580332
1	-1,621590434	-0,560457117	1,690725980	0,325847161
2	-1,730377762	-0,087592625	0,295901533	0,050925945
3	-1,746371356	-0,012612245	0,043502575	0,007332701
4	-1,748653512	-0,001794123	0,006207466	0,001043095
5	-1,748977736	-0,000254777	0,000881888	0,000148126
6	-1,749023769	-0,000036171	0,000125211	0,000021030
7	-1,749030305	-0,000005135	0,000017776	0,000002986
8	-1,749031233	-0,000000729	0,000002524	0,000000424

Tablica 15. Metoda sekante – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[-2,-1]$
Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

Do približnog rješenja zadane jednadžbe, $x \approx -1{,}749031233$ na intervalu $[-2,-1]$, prema prvoj ocjeni pogreške aproksimacije $|\xi - x_8| \le 2{,}524 \cdot 10^{-6}$, dolazi se u 8. iterativnom koraku. Druga ocjena pogreške aproksimacije u istom koraku iznosi $|\xi - x_8| \le 4{,}24 \cdot 10^{-7}$. Primjećuje se da je druga ocjena preciznija i po njoj se iterativni postupak uz zadani $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ može zaustaviti u 7. iterativnom koraku za koji vrijedi $x \approx -1{,}749030305$ uz $|\xi - x_7| \le 2{,}986 \cdot 10^{-6}$.

8.2. Rješavanje jednadžbe $4 - e^{-x} - x = 0$ na intervalu $[3, 4]$ metodom sekante

Promatrajući Sliku 19. može se primijetiti da funkcije f i g mijenjanju predznak na intervalu $[3,4]$. Promjena predznaka funkcije f na predmetnom intervalu ustanovljena je već u postupku izdvajanja samog intervala u 3. poglavlju, a promjena predznaka također vrijedi i kod funkcije g, koja je zrcalna slika funkcije f oko x-osi. Za funkciju $g(x) = e^{-x} + x - 4$ na intervalu $[3,4]$ vrijedi: $g(3) < 0$ i $g''(x) > 0$ (funkcija g'' asimptotski se približava x-osi), pa za prvu aproksimaciju uzimamo: $x_0 = a = 3$ i $b = 4$.

Provjera navedenog:

$$g(3) = e^{-3} + 3 - 4 \approx -0{,}95 \quad \rightarrow \quad g(3) < 0$$

$$g''(3) = e^{-3} \approx 0{,}05 \;\text{ i }\; g''(4) = e^{-4} \approx 0{,}02 \quad \rightarrow \quad \underset{x \in [3,4]}{g''(x)} > 0.$$

Ocjena pogreške aproksimacije i zaustavljanje iterativnog procesa, provodit će se prema izrazima (18), (20), (2) i (3).

Računanje vrijednosti m_1 i M_1 na predmetnom intervalu:

$$m_1 = \min_{x \in [3,4]} |g'(x)| = |g'(3)| = 0{,}95 \quad \text{i} \quad M_1 = \max_{x \in [3,4]} |g'(x)| = |g'(4)| = 0{,}98.$$

Prema određenim početnim parametrima za iterativni postupak na intervalu $[3,4]$ koristi se sljedeća formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n) \;\text{ odnosno }\; x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g(b) - g(x_n)} \cdot (b - x_n).$$

<u>Korak 1.</u>

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g(b) - g(x_0)} \cdot (b - x_0) = 3 - \frac{-0{,}950212932}{0{,}018315638 - (-0{,}950212932)}(4 - 3)$$

$$x_1 = 3{,}981089211$$

$$|\xi - x_1| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_1 - x_0| \quad \rightarrow \quad |\xi - x_1| \le \frac{0{,}98 - 0{,}95}{0{,}95}|3{,}981089211 - 3|$$

$$|\xi - x_1| \le 0{,}029432676$$

$$|\xi - x_1| \leq \frac{|g(x_1)|}{m_1} \rightarrow |\xi - x_1| \leq \frac{|-0{,}000245491|}{0{,}95} \rightarrow |\xi - x_1| \leq 0{,}000258411$$

Korak 2.

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g(b) - g(x_1)} \cdot (b - x_1)$$

$$x_2 = 3{,}981089211 - \frac{-0{,}000245491}{0{,}018315638 - (-0{,}000245491)}(4 - 3{,}981089211) = 3{,}981339327$$

$$|\xi - x_2| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_2 - x_1|$$

$$|\xi - x_2| \leq \frac{0{,}98 - 0{,}95}{0{,}95}|3{,}981339327 - 3{,}981089211|$$

$$|\xi - x_2| \leq 0{,}000007503$$

$$|\xi - x_2| \leq \frac{|g(x_2)|}{m_1} \rightarrow |\xi - x_2| \leq \frac{|-0{,}000000043|}{0{,}95} \rightarrow |\xi - x_2| \leq 0{,}000000046$$

Vidi se da je u 2. iterativnom koraku zadovoljen uvjet za zaustavljanje procesa traženja nultočke $|\xi - x_n| \leq 0{,}00001$. Približno rješenje zadane jednadžbe u 2. iterativnom koraku na intervalu $[3,4]$, uz prvu ocjenu pogreške aproksimacije $|\xi - x_2| \leq 7{,}503 \cdot 10^{-6}$, iznosi $x \approx 3{,}981339327$. Druga ocjena pogreške aproksimacije za isto rješenje osigurava $|\xi - x_2| \leq 4{,}6 \cdot 10^{-8}$.

Tablični prikaz primjene metode sekante za traženje nultočke funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu $[3,4]$ pomoću funkcije $g(x) = e^{-x} + x - 4$:

n	x_n	$g(x_n)$	$\frac{M_1 - m_1}{m_1}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{\lvert g(x_n)\rvert}{m_1}$
0	3,000000000	-0,950212932	—	1,000224139
1	3,981089211	-0,000245491	0,029432676	0,000258411
2	3,981339327	-0,000000043	0,000007503	0,000000046

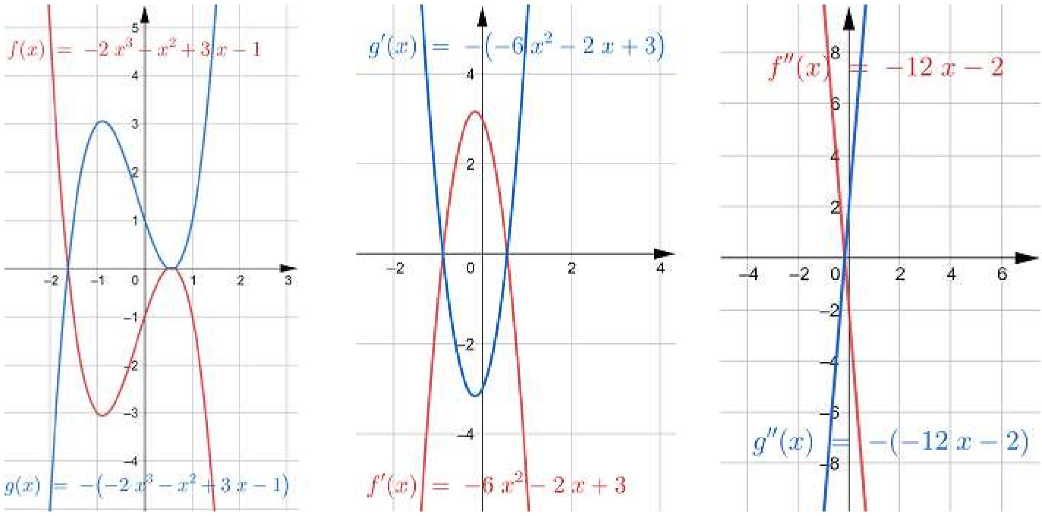
Tablica 16. Metoda sekante – nultočka funkcije $f(x) = 4 - e^{-x} - x$ na intervalu [3,4]

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

8.3. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na intervalu $[-2, -1]$ metodom sekante

Metodom sekante traži se nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $[-2,-1]$, s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$

U postupku određivanja intervala unutar kojih se nalaze rješenja zadane funkcije u 4. poglavlju, slučajno je pronađeno jedno od tri rješenja $x = \frac{1}{2}$, koje se ovom metodom neće tražiti. Ostala dva rješenja nalaze se unutar intervala $[-2,-1]$ i $\left[\frac{3}{5},1\right]$.



Slika 21. Funkcija $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ s pripadajućim derivacijama f' i f'', te preslikama g , g' i g''

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

Vidi se da je na intervalu $[-2,-1]$ funkcija f konveksna, odnosno ispunjen je uvjet za konvergenciju procesa $f''(x) > 0$. Na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$ vrijedi $f''(x) < 0$, odnosno funkcija je konkavna pa će se za traženje nultočke na tom intervalu promijeniti predznak funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1 \;\; \rightarrow \;\; g(x) = -f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$. Iz Slike 20. vidi se da se promjenom predznaka funkcije postiže ispunjenje uvjeta $g''(x) > 0$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$.

Postupak traženja nultočke na intervalu $[-2,-1]$:

Za zadanu funkciju f na intervalu $[-2,-1]$ vrijedi $f(-2) > 0$ i $f''(x) > 0$, pa se za prvu aproksimaciju uzima $a = -2$ i $x_0 = b = -1$.

Potvrda navedenog:

$$f(-2) = -2(-2)^3 - (-2)^2 + 3(-2) - 1 = 5 \quad \rightarrow \quad f(-2) > 0$$

$$f''(-2) = -12 \cdot (-2) - 2 = 22 \ \text{ i } \ f''(-1) = -12 \cdot (-1) - 2 = 10 \quad \rightarrow \quad \underset{x \in [-2,-1]}{f''(x)} > 0.$$

Ocjenu pogreške aproksimacije i zaustavljanje iterativnog procesa, provodit će se prema izrazima (18), (20), (2) i (3).

Računanje vrijednosti m_1 i M_1 na predmetnom intervalu:

$$m_1 = \min_{x \in [-2,-1]} |f'(x)| = |f'(-1)| = 1 \ \text{ i } \ M_1 = \max_{x \in [-2,-1]} |f'(x)| = |f'(-2)| = 17.$$

Prema određenim početnim parametrima za iterativni postupak na intervalu $[-2,-1]$ koristi se sljedeća formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a).$$

Tablični prikaz rezultata dobivenih primjenom metode sekante za traženje nultočke funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $[-2,-1]$ dan je u tablici 17.

Iz tablice je vidljivo da je u 12. iterativnom koraku, prema prvoj ocjeni pogreške aproksimacije zadovoljen uvjet za zaustavljanje procesa traženja približnog rješenja obzirom da vrijedi: $|\xi - x_{12}| < 0{,}00001$. Dakle, uz prvu ocjenu pogreške aproksimacije $|\xi - x_{12}| \leq 8{,}811 \cdot 10^{-6}$, 12. korak u intervalu $[-2,-1]$ može se prihvatiti kao približno rješenje, $x \approx -1{,}618033778$. Druga ocjena pogreške aproksimacije ispunjava uvjet za zaustavljanje iterativnog procesa u 11. iterativnom koraku, $|\xi - x_{11}| \leq 7{,}208 \cdot 10^{-6}$ uz rješenje $x \approx -1{,}618033228$. Ako se rješenje zaokruži na pet decimalnih mjesta, vidi se da je ono jednako u oba navedena koraka, to jest da se proces može zaustaviti u 11. iterativnom koraku.

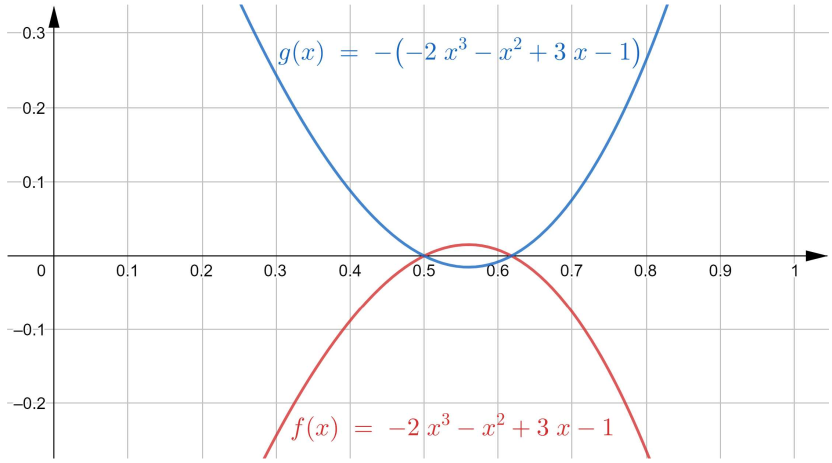
n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{M_1 - m_1}{m_1}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	-1,000000000	-3,000000000	—	3,000000000
1	-1,375000000	-1,816406250	6,000000000	1,816406250
2	-1,541547278	-0,674442569	2,664756447	0,674442569
3	-1,596037217	-0,204164162	0,871839030	0,204164162
4	-1,611885050	-0,057914796	0,253565324	0,057914796
5	-1,616329094	-0,016123688	0,071104711	0,016123688
6	-1,617562356	-0,004465437	0,019732177	0,004465437
7	-1,617903601	-0,001234902	0,005459927	0,001234902
8	-1,617997948	-0,000341371	0,001509553	0,000341371
9	-1,618024027	-0,000094357	0,000417266	0,000094357
10	-1,618031235	-0,000026080	0,000115332	0,000026080
11	-1,618033228	-0,000007208	0,000031877	0,000007208
12	-1,618033778	-0,000001992	0,000008811	0,000001992

Tablica 17. Metoda sekante – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $[-2, -1]$

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

8.4. Rješavanje jednadžbe $-2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ metodom sekante

Metodom sekante traži se nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$, s točnošću $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.



Slika 22. Uvećani prikaz funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ i preslike $g(x)$na intervalu $[0,1]$

Izvor: Obrada autora u grafičkom kalkulatoru GeoGebra

Kao što je već navedeno, za postizanje konvergencije procesa na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$ promijenjen je predznak funkcije. Sada se na navedenom intervalu promatra funkcija $g(x) = -f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$. Vrijedi: $g\left(\frac{3}{5}\right) < 0$ i $g''(x) > 0$, pa se za početnu aproksimaciju uzima $x_0 = a = \frac{3}{5}$ i $b = 1$.

Potvrda navedenog:

$$g = 2\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{5}\right) + 1 = -0,008 \quad \rightarrow \quad g\left(\frac{3}{5}\right) < 0$$

$$g''\left(\frac{3}{5}\right) = 12 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + 2 = 9,2 \ \text{ i } \ g''(1) = 12 \cdot 1 + 2 = 12 \quad \rightarrow \quad \underset{x \in \left[\frac{3}{5},1\right]}{g''(x)} > 0.$$

Ocjenu pogreške aproksimacije i zaustavljanje iterativnog procesa, provodit će se prema izrazima (18), (20), (2) i (3).

Računanje vrijednosti m_1 i M_1 na predmetnom intervalu:

$$m_1 = \min_{x\in\left[\frac{3}{5},1\right]} |g'(x)| = \left|g'\left(\frac{3}{5}\right)\right| = 0{,}36 \quad \text{i} \quad M_1 = \max_{x\in\left[\frac{3}{5},1\right]} |g'(x)| = |g'(1)| = 5.$$

Prema određenim početnim parametrima za iterativni postupak na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$ koristi se sljedeća formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}\cdot(b-x_n) \text{ odnosno } x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g(b)-g(x_n)}\cdot(b-x_n).$$

U Tablici 18. dan je tablični prikaz rezultata dobivenih metodom sekante za traženje nultočke funkcije $g(x) = -f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$.

Iz tablice je vidljivo da je u 40. iterativnom koraku prema prvoj ocjeni pogreške aproksimacije zadovoljen uvjet za zaustavljanje procesa traženja nultočke $|\xi - x_{40}| < 1\cdot 10^{-5}$. Približno rješenje zadane jednadžbe u 40. iterativnom koraku na intervalu $\left[\frac{3}{5},1\right]$, uz prvu ocjenu pogreške aproksimacije $|\xi - x_{40}| \le 8{,}497\cdot 10^{-6}$, iznosi $x \approx 0{,}618031376$. Druga ocjena pogreške aproksimacije ispunjava uvjet za zaustavljanje iterativnog procesa u 36. iterativnom koraku gdje je $|\xi - x_{36}| \le 9{,}427\cdot 10^{-6}$ uz rješenje $x \approx 0{,}618027559$. Ako se rješenje zaokruži na pet decimalnih mjesta, vidi se da je ono jednako u oba navedena koraka, to jest da se proces može zaustaviti u 36. iterativnom koraku.

n	x_n	$g(x_n)$	$\frac{M_1 - m_1}{m_1}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{\lvert g(x_n)\rvert}{m_1}$
0	0,600000000	-0,008000000	—	0,022222222
1	0,603174603	-0,006810720	0,040888889	0,018918666
2	0,605858987	-0,005732455	0,034574865	0,015923486
3	0,608105505	-0,004778737	0,028935145	0,013274269
4	0,609969358	-0,003951864	0,024006437	0,010977400
5	0,611504639	-0,003246444	0,019774417	0,009017899
6	0,612761786	-0,002652429	0,016192053	0,007367860
7	0,613786191	-0,002157459	0,013194335	0,005992942
8	0,614617638	-0,001748497	0,010709033	0,004856936
9	0,615290302	-0,001412893	0,008663909	0,003924702
10	0,615833088	-0,001138991	0,006991091	0,003163865
11	0,616270153	-0,000916429	0,005629396	0,002545635
12	0,616621492	-0,000736218	0,004525247	0,002045051
13	0,616903535	-0,000590712	0,003632709	0,001640867
14	0,617129701	-0,000473492	0,002913020	0,001315257
15	0,617310901	-0,000379231	0,002333861	0,001053419
16	0,617455974	-0,000303541	0,001868534	0,000843169
17	0,617572056	-0,000242833	0,001495142	0,000674536
18	0,617664900	-0,000194187	0,001195826	0,000539410
19	0,617739130	-0,000155236	0,000956086	0,000431211
20	0,617798462	-0,000124065	0,000764189	0,000344625
21	0,617845874	-0,000099133	0,000610667	0,000275368
22	0,617883754	-0,000079197	0,000487897	0,000219993
23	0,617914014	-0,000063263	0,000389751	0,000175729
24	0,617938184	-0,000050529	0,000311312	0,000140357
25	0,617957488	-0,000040354	0,000248636	0,000112095
26	0,617972905	-0,000032227	0,000198564	0,000089518
27	0,617985216	-0,000025734	0,000158566	0,000071484
28	0,617995046	-0,000020549	0,000126619	0,000057081
29	0,618002896	-0,000016408	0,000101104	0,000045578
30	0,618009164	-0,000013101	0,000080729	0,000036392
31	0,618014168	-0,000010461	0,000064458	0,000029057
32	0,618018164	-0,000008352	0,000051466	0,000023200
33	0,618021354	-0,000006668	0,000041091	0,000018523
34	0,618023902	-0,000005324	0,000032808	0,000014789
35	0,618025935	-0,000004251	0,000026194	0,000011808
36	0,618027559	-0,000003394	0,000020913	0,000009427
37	0,618028855	-0,000002710	0,000016697	0,000007527
38	0,618029890	-0,000002163	0,000013331	0,000006009
39	0,618030717	-0,000001727	0,000010643	0,000004798
40	0,618031376	-0,000001379	0,000008497	0,000003830

Tablica 18. Metoda sekante – nultočka funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$ na intervalu $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

9. USPOREDBA DOBIVENIH REZULTATA

METODE	Nultočke i Uvjeti za zaustavljanje iterativnih procesa	$f(x) = 4 - e^{-x} - x$		$f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$	
		Nultočke uz $\lvert\xi - x_n\rvert<0{,}00001$		Nultočke uz $\lvert\xi - x_n\rvert<0{,}00001$	
		Interval $[-2,-1]$	Interval $[3,4]$	Interval $[-2,-1]$	Interval $\left[\frac{3}{5},1\right]$
METODA BISEKCIJE	Uvjet metode $\frac{b_n - a_n}{2} < \varepsilon$	0,000007629	0,000007629	0,000007629	0,000006104
	NULTOČKA - uvjet metode (Iterativni korak)	-1,749031067 (korak 17.)	3,981342316 (korak 18.)	-1,618030548 (korak 18.)	0,618032837 (korak 17.)
	Dodatni uvjet $\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} < \varepsilon$	0,000000882	0,000000898	0,000003543	0,000006163
	NULTOČKA - dodatni uvjet (Iterativni korak)	-1,749031067 (korak 17.)	3,981338501 (korak 16.)	-1,618034363 (korak 17.)	0,618029785 (korak 15.)
METODA J. ITERACIJA	U. m. $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \frac{q}{1-q} < \varepsilon$	0,000004659	0,000000568	0,000009239	0,000004739
	NULTOČKA - uvjet metode (Iterativni korak)	-1,749030703 (korak 7.)	3,981339367 (korak 4.)	-1,618033830 (korak 64.)	0,618031869 (korak 8.)
	Dodatni uvjet $\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} < \varepsilon$	0,000001885	0,000000212	0,000009117	0,000003108
	NULTOČKA - dodatni uvjet (Iterativni korak)	-1,749031267 (korak 8.)	3,981339367 (korak 4.)	-1,618026770 (korak 46.)	0,618031869 (korak 8.)
METODA SEKANTE	U. m. $\frac{M_1 - m_1}{m_1}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < \varepsilon$	0,000002524	0,000007503	0,000008811	0,000008497
	NULTOČKA - uvjet metode (Iterativni korak)	-1,749031233 (korak 8.)	3,981339327 (korak 2.)	-1,618033778 (korak 12.)	0,618031376 (korak 40.)
	Dodatni uvjet $\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} < \varepsilon$	0,000002986	0,000000046	0,000007208	0,000009427
	NULTOČKA - dodatni uvjet (Iterativni korak)	-1,749030305 (korak 7.)	3,981339327 (korak 2.)	-1,618033228 (korak 11.)	0,618027559 (korak 36.)
METODA TANGENTE	Uvjet m. $\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 < \varepsilon$	0,000000962	0,000009051	0,000000015	0,000000124
	NULTOČKA - uvjet metode (Iterativni korak)	-1,749031657 (korak 3.)	3,981342640 (korak 1.)	-1,618033990 (korak 4.)	0,618034046 (korak 6.)
	Dodatni uvjet $\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} < \varepsilon$	0,000000749	0,000003377	0,000000012	0,000000083
	NULTOČKA - dodatni uvjet (Iterativni korak)	-1,749031657 (korak 3.)	3,981342640 (korak 1.)	-1,618033990 (korak 4.)	0,618034046 (korak 6.)

Tablica 19. Usporedba dobivenih rezultata

Izvor: Obrada autora u programu MS Excel

Iz tablice je vidljivo da se rješavanjem zadanih jednadžbi metodom bisekcije, ostvaruje sporija konvergencija iterativnih postupaka u odnosu na ostale metode. Kod metode bisekcije vidi se da je razlika dolaska do približnih nultočaka uz zadanu točnost na svim intervalima, jedan do dva iterativna koraka. Također je vidljivo da se preko uvjeta dodatne ocjene pogreške aproksimacije do približnih nultočaka na dugom, trećem i četvrtom intervalu dolazi za korak do dva brže nego preko uvjeta metode. Jedino je na prvom intervalu brzina konvergencije jednaka kod obje ocjene.

Po iterativnim koracima u kojima se dolazi do približnih nultočaka metodom jednostavnih iteracija u odabranim primjerima, vidi se da je brzina konvergencije uglavnom duplo veća nego kod metode bisekcije. Isto ne vrijedi na trećem intervalu iz tablice. Razlog je uvjet za konvergenciju procesa $q < 1$ za koji u ovom slučaju vrijedi $q = 0{,}963$, odnosno vrijednost q je blizu vrijednosti $q = 1$ pa je konvergencija postupka vrlo spora. U takvim slučajevima ovu metodu poželjno je izbjegavati. Brzina dolaska do približnih nultočaka, preko uvjeta metode za zaustavljanje iterativnog procesa i dodatnog uvjeta jednaka je na drugom i četvrtom intervalu. Razlika na prvom intervalu je jedan iterativni korak, a na trećem intervalu, intervalu kod kakvih treba izbjegavati ovu metodu, 18 koraka.

Kod metode sekante brzina konvergencije na prvom intervalu približno je jednaka kao i kod metode jednostavnih iteracija. Na drugom intervalu je duplo veća. Treći interval kod metode jednostavnih iteracija zbog spomenutog uvjeta $q < 1$ nije mjerodavan pa se ovaj interval može usporediti s istim intervalom kod metode bisekcije. Vidi se da je kod metode sekante konvergencija nešto brža (11. i 12. korak naspram 17. i 18. koraka). Na četvrtom intervalu metoda sekante ima sporu konvergenciju. Razlog tome je relativno velika širina intervala unutar kojeg se nalazi nultočka funkcije obzirom na položaj same nultučke (relativna međusobna blizina točke ekstrema funkcije, početne točke intervala i nultočke). Brzine konvergencije preko uvjeta metode i dodatnog uvjeta za zaustavljanje iterativnog procesa na prvom i trećem intervalu razlikuju se za jedan korak, a na drugom intervalu su jednake. Kod intervala sličnih četvrtom intervalu, sam interval treba suziti ili izabrati drugu iterativnu metodu.

Na kraju tablice nalaze se nultočke dobivene rješavanjem jednadžbi metodom tangente koja ima najveću brzinu konvergencije, a kreće se od postizanja uvjeta za zaustavljanje procesa u šestom koraku do zadovoljavanja uvjeta procesa u prvom iterativnom koraku. Oba uvjeta za zaustavljanje iterativnih procesa zadovoljena su u istim iterativnim koracima na svim intervalima. Pogreške aproksimacije prema uvjetu metode i dodatnom uvjetu imaju vrijednosti sa jednakim brojem decimalnih mjesta na svim intervalima.

10. ZAKLJUČAK

U radu je na dva zadana primjera funkcija pokazano da metoda bisekcije uz ispunjenje početnih uvjeta za konvergenciju procesa uvijek ostvaruje konvergenciju, ali ima i najnižu brzinu konvergencije od prikazanih metoda.

Metoda jednostavnih iteracija ima višu brzinu konvergencije od metode bisekcije, ali i uz ispunjenje početnih uvjeta za konvergenciju procesa može imati vrlo sporu konvergenciju (u slučaju da je vrijednost početnog uvjeta $q < 1$ u blizini rubne vrijednosti uvjeta). U slučajevima takvih intervala navedenu metodu treba izbjegavati.

Metoda sekante – regula falsi na tri od četiri promatrana intervala ima višu brzinu konvergencije od metode bisekcije. U slučajevima da je izabrani interval unutar kojeg se nalazi nultočka funkcije „preširok“ kao $\left[\frac{3}{5},1\right]$ u slučaju funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3x - 1$, metoda daje vrlo sporu konvergenciju. U takvim slučajevima interval treba suziti ili izabrati drugu iterativnu metodu.

Od obrađenih metoda, metodom tangente (Newton-ova metoda) postižu se najviše brzine konvergencije iterativnih procesa. Uz zadovoljavanje početnih uvjeta za konvergenciju, metoda garantira konvergenciju procesa.

Kod spomenutih prvih triju metoda, preko dodatne ocjene pogreške aproksimacije (2), do približnih nultočaka dolazilo se za jedan do dva iterativna koraka brže nego preko ocjena pogreška aproksimacija metoda. Zaključujemo da se kod svih triju metoda, na dvije promatrane jednadžbe, dodatna ocjena pogreške aproksimacije (2) može uzeti kao prvi izbor. Kod metode tangente prema objema ocjenama postupci iteracija završavali su u istim iterativnim koracima, a između pogrešaka bile su relativno male razlike (najveća razlika $5{,}7 \cdot 10^{-6}$) pa se kod metode tangente može koristiti bilo koja od navedenih ocjena.

POPIS LITERATURE

[1] Tevčić, M.: **Inženjerska matematika,** Skripta**,**Veleučilište u Karlovcu, Karlovac 2010.

[2] Ivanšić, I.: **Numerička matematika**, Element, 1998.

[3] Scitovski, R.: **Numerička matematika,** Grafika d.o.o. Osijek, 2004.

[4] Singer, S.: **Numerička matematika**, Predavanja FSB, Zagreb, 2004.

[5] Perić, I., Vukelić,A.: **Numeričke metode**, Predavanja i vježbe PBF, Zagreb 2006.

[6] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer Sanja, Singer Saša: **Numerička analiza,** PMF Zagreb, 2003.

[7] Karač, A.: **Numeričke metode u inženjerstvu**, Univerzitet u Zenici, Zenica 2009.

[8] https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118673515.app8

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA