Primjena matematike u gospodarskom računu

Vranić, Martina

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
POSLOVNI ODJEL
STRUČNI STUDIJ UGOSTITELJSTVA

Martina Vranić

PRIMJENA MATEMATIKE U GOSPODARSKOM RAČUNU

ZAVRŠNI RAD

Karlovac, 2015.

Martina Vranić

PRIMJENA MATEMATIKE U GOSPODARSKOM RAČUNU

ZAVRŠNI RAD

Veleučilište u Karlovcu
Poslovni odjel
Stručni studij ugostiteljstva

Kolegij: Poslovna matematika 1

Mentor: mr.sc. Marina Tevčić

Matični broj studenta: 0618611007

Karlovac, lipanj, 2015.

ZAHVALA

Zahvaljujem svojim roditeljima na pruženoj potpori i razumijevanju tijekom studija. Veliko im hvala i na podršci prilikom pisanja ovog završnog rada. Posebno zahvaljujem mr.sc. Marini Tevčić na prihvaćanju mentorstva završnog rada. Zahvaljujem joj na njezinoj stručnoj pomoći i podršci prilikom izrade rada. Želim zahvaliti i svim profesorima i asistentima na kvalitetnoj suradnji i pruženom znanju tijekom studija.

SAŽETAK

Gospodarski račun razvio se zbog potrebe gospodarstva za što bržim i jednostavnijim rješavanjem praktičnih zadataka. Zadaci u gospodarskoj praksi rješavaju se prema općim uputama i postavljanjem shema, iz čega proizlaze postotni i promilni račun, pravilo trojno prosječni račun, račun diobe, smjese te verižni račun. Svrha rada je na konkretnim primjerima prikazati primjenu gospodarskog računa. Postotak (promil) označava jedinicu koja se uzima od sto (tisuću) jedinica neke veličine. U većini izračuna u gospodarstvu upotrebljava se pravilo trojno: iz triju poznatih veličina izračuna se četvrta nepoznata. Prosječnim se računom određuje prosječna vrijednost iz više veličina. Računom diobe nastoji se podijeliti neku veličinu na dijelove prema određenim kriterijima, dok računom smjese dobivamo odgovor kao pomiješati veličine određenog intenziteta da bi pritom dobili smjesu prosječnog intenziteta. Kod verižnog računa shematskim postupkom (verižnikom) pronalazi se odnos između veličina koje se su zadane upravno razmjernim veličinama. Verižni se račun najčešće primjenjuje u računu deviza, gdje se pronalazi odnos između različitih deviza.

KLJUČNE RIJEČI: gospodarski račun, postotni i promilni račun, pravilo trojno, prosječni račun, račun diobe, račun smjese, verižni račun

SUMMARY

Business arithmetic developed because of the need of economy for a faster and simpler solution of practical assignments. Problems in economy are solved by using general rules and schemas, hence the application of percentage and per mille, ratio, proportion and chain calculation. The purpose of this paper is to show, on concrete examples, the application of business arithmetic. Percentage (per mille) indicates the unit taken from one hundred (thousand) units of some quantity. In most economic calculations, rule of three is used: from the three known quantities the fourth unknown is being calculated. Average is used to determine the average value from multiple quantities. Continued ratio is used to divide a quantity into more parts according to specific criteria, whereas the compound proportion gives the answer how to mix quantities of certain intensity in order to get an average intensity mixture. Chain calculation is schematic process that finds the relationship between quantities given by directly proportional quantities. Chain calculation is mostly used for conversion of currencies, where it finds relationship between dissimilar currencies.

KEY WORDS: business arithmetic, percentage and per mille, rule of three, average, continued ratio, compound proportion, chain calculation

SADRŽAJ

1. UVOD

1.1. Predmet i cilj rada

Predmet rada je gospodarski račun, odnosno primjena matematike u gospodarskom računu. Gospodarski račun se temelji na rješavanju zadataka koji se nalaze u nekom upravno ili obrnuto razmjernom odnosu. Cilj rada je prikazati primjenu shema i posebnih računa kojima se problemi u gospodarskoj praksi mogu brzo i lako riješiti. U gospodarskoj praksi se za rješavanje problema upotrebljava postotni i promilni račun, verižni račun, račun diobe i smjese i pravilo trojno.

1.2. Izvori podataka, metode obrade i prikupljanja podataka

Podaci korišteni pri izradi ovog rada prikupljeni su iz stručne literature koja se bavi pojmom gospodarskog računa. Korištene su i internet stranice, online enciklopedije, internet stranice banaka prilikom izrade priloga, internet stranica Hrvatske narodne banke i internet stranica Europske centralne banke. Podaci o tečaju za mjenjačnicu „Titanic" dobiveni su u poslovnici mjenjačnice. Pri obradi podataka korištena je metoda analize i sinteze, metoda kompilacije, deskriptivna te komparativna metoda.

1.3. Struktura i sadržaj rada

Rad se sastoji od 3 poglavlja koja su dalje razrađena u potpoglavlja. Prvo poglavlje čini uvod koji se sastoji od potpoglavlja: Predmet i cilja rada, Izvori podataka, metode obrade i prikupljanja podataka te Strukture i sadržaj rada. U drugom poglavlju definiran je pojam gospodarskog računa, a sastoji se od potpoglavlja: Razmjernost veličina, Omjeri, Razmjeri, Postotni račun, Promilni račun, Pravilo trojno, Prosječni račun, Račun diobe, Račun smjese i Verižni račun. Treće pogljavlje čini zaključak rada, a rad još sadrži popis literature, popis slika i tablica te prilog.

2. POJAM GOSPODARSKOG RAČUNA

Gospodarstvo podrazumijeva raspolaganje i upravljanje dobrima i mogućnostima zajednice i pojednica radi zadovoljenja njihovih potreba. U najširem smislu gospodarenje znači razumnu uporabu dobara i mogućnosti, što uključuje njihovo pribavljanje, proizvodnju i uvećanje, kao i djelatnosti, pravila i institucije kojima se to postiže.[1]

Pod pojmom račun podrazumijevamo jednu ili više matematičkih operacija koje se odnose na brojeve i veličine kojima se nastoji riješiti neki problem. Račun je ujedno i tehnika rješavanja tog problema, npr. algebarski račun, kamatni račun i dr.

Gospodarski račun nastao je kao rezultat korištenja matematičkih izračuna u gospodraskoj praksi u kojoj se javljala potreba za najjednostavnijim i najbržim rješavanjem praktičnih zadataka. Zadaci koji dolaze u gospodarstvu su većinom shematizirani[2], dane su opće upute i sheme po kojima se ti zadaci rješavaju.

2.1. Razmjernost veličina

Razmjernost ili proporcionalost je međusobna zavisnost dviju veličina koja može biti ili upravno razmjerna ili obrnuto razmjerna.

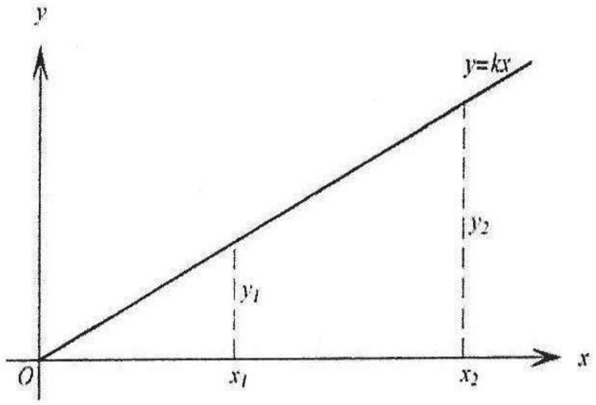
2.1.1. Upravno razmjerne veličine

Dvije veličine x i y su **upravno razmjerne** ili direktno proporcionalne s koeficijentom razmjernosti (proporcionalnosti) $k \neq 0$, ako je $y = kx$.[3] Jednostavno rečeno: koliko se puta jedna veličina poveća (smanji), toliko se puta druga veličina poveća (smanji). U gospodarskoj praksi x i y su pozitivni brojevi, pa je time i $k > 0$. Upravno razmjene veličine grafički se prikazuju pravcem koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava, a koeficijent smjera mu je jednak koeficijentu razmjernosti k.

---

[1] Proleksis enciklopedija, proleksis.lzmk.hr (11.03.2015.)
[2] Shema je pojednostavnjen, apstraktan prikaz ili objašnjenje nečega.
[3] Štambuk,LJ.: **Poslovna Matematika 1**, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2006., str. 81.

Slika 1. **Grafički prikaz upravno razmjernih veličina**



Izvor: Štambuk LJ.: **Poslovna Matematika 1**, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2006., str. 82.

Uvrsti li se za x različite vrijednosti x_1 i $x_{2.}$, za y se dobiju vrijednosti $y_1 = kx_1$ i $y_2 = kx_2$, iz čega proizlazi sljedeći razmjer:

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2,$$

ili zapisano u obliku razlomka:

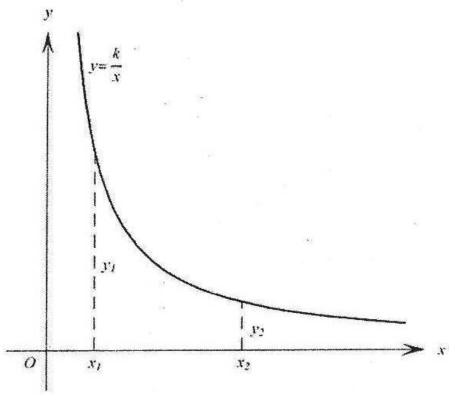
$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

2.1.2. Obrnuto razmjerne veličine

Dvije veličine x i y su **obrnuto razmjerne** ili obrnuto proporcionalne s koeficijentom razmjernosti $k \neq 0$, ako je $y = \frac{k}{x}$, što se može zapisati i kao $x \cdot y = k$.[4] Kod obrnuto razmjernih veličina vrijedi: za koliko se puta poveća jedna veličina, toliko se puta smanji druga veličina, i obrnuto. Grafički prikaz obrnuto razmjernih veličina je jedna strana hiperbole (u I. kvadrantu) kojoj su asimpotote koordinatne osi.

[4] Ibidem, str. 82.

Slika 2. **Grafički prikaz obrnuto razmjernih veličina**



Izvor: Štambuk LJ.: **Poslovna Matematika 1**, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2006., str. 83.

Ukoliko se za x uvrste konkretne vrijednosti x_1 i x_2, za y se dobiva $y_1 = \frac{k}{x_1}$ i $y_2 = \frac{k}{x_2}$, iz čega proizlazi $x_1 \cdot y_{1.} = x_{2.} \cdot y_2$, odnosno razmjer $y_1 : y_2 = x_2 : x_1$. Zapisano u obliku razlomka se dobiva: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$.

Primjer 1. Odredite koje su od navedenih veličina upravno, a koje obrnuto razmjerne:

a) cijena sirovina i troškovi proizvodnje,
b) broj radnika i vrijeme potrebno za obavljanje nekog posla,
c) snaga stroja i broj sati za obavljanje posla tim strojem,
d) količina grožđa i količina dobivenog vina.

Rješenje:

a) Cijena sirovina i troškovi proizvodnje su upravno razmjerne veličine, povećanjem (smanjenjem) cijene sirovina, povećavaju se (smanjuju) troškovi proizvodnje;
b) Broj radnika i vrijeme potrebno za obavljanje nekog posla su obrnuto razmjerne veličine. Ako se smanji broj radnika potrebno je više vremena za obavljanje nekog posla i obrnuto, povećanjem broja radnika potrebno je manje vremena za obavljanje tog posla;

c) Snaga stroja i broj sati potrebnih za obavljanje posla tim strojem su obrnuto razmjerne veličine. Stroju jače snage potrebno je manje sati za obavljanje nekog posla, a stroju manje snage potrebno je za obavljanje istog posla više sati;

d) Količina grožđa i količina dobivenog vina su upravno razmjerne veličine. Što manje (više) grožđa upotrijebimo to ćemo dobiti manje (više) vina.

2.2. Omjeri

Omjer dviju istovrsnih veličina a ili b je njihov kvocijent, a zapisuje se u obliku $a : b$, ili u obliku $\frac{a}{b}$, gdje je a prvi i b drugi član omjera. Ako je $a : b = k$, tada za k kažemo da je vrijednost omjera.

Primjer 2. Potrebno je pronaći prvi član omjera ako je drugi član omjera 4, a vrijednost omjera je 12.

Rješenje:

b = 4
k = 12

Iz $a : b = k$ slijedi:

$a : 4 = 12$

$a = 4 \cdot 12$

$a = 48$

Dakle, prvi član omjera je 48.

Primijetimo: vrijednost omjera ne mijenja se ukoliko oba njegova člana pomnožimo ili podijelimo istim brojem, različitim od nule. Govorimo o proširivanju i skraćivanju omjera.[5]

[5]Ibidem, str. 84.

Primjer 3. Zadane omjere treba pojednostaviti tako da budu izraženi što manjim cijelim brojem:

a) $25 : 50$

b) $6z : 36z$

c) $\frac{5}{2} : \frac{3}{8}$

Rješenje:

a) omjer $25 : 50$ skraćujemo s 25 i čega slijedi:

$(25:25) : (50:25)$

$1 : 2$

b) omjer $6z : 36z$ skraćujemo s $6z$ iz čega slijedi:

$(6z:6z) : (36z:6z)$

$1 : 6$

c) omjer $\frac{5}{2} : \frac{3}{8}$ skraćujemo na sljedeći način:

$\frac{5}{2} : \frac{3}{8} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{3} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 20:3$

Produženi omjer je skraćeni zapis tri ili više jednostavnih omjera.[6] Naime, jednostavni se omjeri: $a:b, b:c, c:d, \ldots$ mogu zapisati kao produženi omjer u obliku: $a:b:c:d:\ldots$.

Primjer 4. Omjere $2:3$, $6:7$ potrebno je napisati kao produženi omjer.

Rješenje:

Jednostavni se omjeri: $a:b, b:c, c:d, \ldots$ mogu zapisati kao produženi omjer $a:b:c:d:\ldots$, stoga da bi se došlo do produženog omjera potrebno je jednostavne omjere proširiti tako da drugi član prethodnog omjera bude jednak prvom članu sljedećeg omjera.

[6] Zrno,Ž.: **Matematika za ekonomiste**, Veleučilište Marko Marulić, Knin, 2011., str. 182.

Prvi omjer $2:3$ množimo s 2

$(2 \cdot 2) : (2 \cdot 3) = 4:6$

Dobiveni omjer $4:6$ i omjer $6:7$ može se zapisati kao produženi omjer $4:6:7$.

Primjer 5. Od omjera $2:3$, $7:8$, $2:1$ napraviti produženi omjer.

Rješenje:

Da se dobio produženi omjer od tri omjera $2:3$, $7:8$, $2:1$ potrebno je najprije omjere $2:3$ i $7:8$ napisati kao produženi omjer .

Najmanji zajednički višekratnik brojeva 3 i 5 je broj 21.

Prvi omjer proširujemo s 7

$(7 \cdot 2) : (7 \cdot 3) = 14:21$

Drugi omjer proširujemo s 3

$(3 \cdot 7) : (3 \cdot 8) = 21:24$

Od dobivenih omjera $14:21$ i $21:24$, produženi omjer je $14:21:24$.

Dobiveni omjer $21:24$ i omjer $2:1$ produžujemo s 12 i dobivamo:

$(12 \cdot 2) : (12 \cdot 1) = 24:12$

Spajamo omjere $14:21$, $21:24$ i $24:12$ i dobivamo produženi omjer $14:21:24:12$.

2.3.Razmjeri

Razmjer (proprcija) je jednakost dvaju jednakih omjera.[7] Ako vrijede jednakosti $a:b=k$ i $c:d=k$ tada se može se napisati razmjer $a:b=c:d$, u kojem su a i d vanjski članovi, b i c unutarnji članovi razmjera.

Vrijedi sljedeće: umnožak vanjskih članova jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera, tj. ako je $a:b=c:d$, tada je $a \cdot d = b \cdot c$. Ovo svojstvo omogućava provjeru valjanosti razmjera.

[7] Ibidem, str. 182.

Primjer 6. Potrebno je ispitati valjanost razmjera:

a) $14:21=2:3$,

b) $8:7=13:19$.

Rješenje:

Uzimajući u obzir da je umnožak vanjskih članova razmjera jednak umnošku unutarnjih članova razmjera $a \cdot d = b \cdot c$, radi se provjera:

a) $14:21=2:3$,

$14 \cdot 3 = 42$

$21 \cdot 2 = 42$

$42 = 42$

Razmjer je valjan jer je umožak vanjskih članova jednak umnošku unutarnjih.

b) $8:7=13:19$.

$8 \cdot 19 = 152$

$7 \cdot 13 = 91$

$152 \neq 91$

Razmjer nije valjan jer umnožak vanjskih članova nije jednak umnošku unutarnjih.

Primjer 7. Treba odrediti nepoznati član u razmjeru: $48:72=2:x$.

Rješenje:

Prema osnovnom svojstvu razmjera u kojem je umnožak vanjskih članova jednak umnošku unutarnjih izračuna se nepoznati član razmjera x.

$48:72=2:x$

$48 \cdot x = 72 \cdot 2$

$x = \frac{72 \cdot 2}{48} = \frac{72}{24} = 3$

Nepoznati član razmjera je 3.

Uvijek vrijedi: razmjer će ostati valjan i ako unutranji i vanjski članovi međusobno zamijene svoja mjesta, tj. ako vrijedi razmjer $a:b=c:d$ tada vrijede i sljedeći razmjeri :

1. $b:a=d:c$,
2. $a:c=b:d$,
3. $d:b=c:a$.

Ako je zadano tri ili više jednakih omjera $a_1:b_1=k,\ a_2:b_2=k,\ldots,\ a_n:b_n=k,$ tada se može napisati jednakost $a_1:a_2:\ldots:a_n=b_1:b_2:\ldots b_n$, koja se naziva **produženim razmjerom**.[8]

Primjer 8. Iz četiri jednaka omjera;

1. $5:1=5,$
2. $40:8=5,$
3. $22{,}5:4{,}5=5,$
4. $31{,}5:6{,}3=5$

treba napisati produženi razmjer.

Rješenje:

Iz definicije produženog razmjera slijedi: $5:40:22{,}5:31{,}5=1:8:4{,}5:6{,}3$.

2.4. Postotni račun

Postotak je broj jedinica koji se uzima od sto jedinca neke veličine. Drugim riječima: postotak je razlomak s nazivnikom 100, a označava se znakom %. Primjerice, 12% označava 12 jedinica od njih 100. Ako imamo 400 jedinica, onda 12% od 400 znači 12 od svakih 100 jedinica, odnosno $4\cdot 12=48$ jedinica.

[8] Štambuk,LJ.: **Poslovna Matematika 1**, op. cit., str. 81.

Budući da je postotak razlomak s nazivnikom 100, može se označiti i u decimalnom zapisu, iz čega proizlazi da je $12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

U postotnom se računu javljaju veličine:[9]

1. **postotak ($p\%$)** - broj jedinca koji otpada na 100 jedinica,

$$p\% = \frac{p}{100}$$

2. **osnovna veličina (S) -** broj od kojeg se obračunava postotak,
3. **postotni dio (P) -** broj koji se dobije kada se od osnovne veličine odredi dio naznačen danim postotkom.

Ove veličine čine razmjer $S : 100 = P : p$ iz kojeg je moguće izračunati bilo koju od triju veličina ukoliko su ostale dvije poznate. Vrijede sljedeće formule:

1. $p = \frac{100 \cdot P}{S}$,
2. $S = \frac{100 \cdot P}{p}$,
3. $P = \frac{S \cdot p}{100}$.

Primjer 9. Prodavaonica je iz skladišta primila pošiljku od 840 kg jabuka. Koliko je kilograma jabuka bilo na skladištu ako je trgovina dobila 42% od ukupne količine jabuka na skladištu?

Rješenje:

$P = 840$

$\underline{p = 42}$

Osnovna veličina S izračunava se prema formuli $S = \frac{100 \cdot P}{p}$, pa slijedi da je:

$$S = \frac{100 \cdot 840}{42} = 2000$$

[9] Perše D.: **Gospodrastvena matematika,** Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2003., str. 92.

Na skladištu je bilo 2000 kg jabuka.

Primjer 10. Planirana mjesečna proizvodnja iznosi 4800 komada proizvoda. Plan proizvodnje je podbačen za 18%. Koliko komada tog proizvoda je proizvedeno?

Rješenje:

$S = 4800$

$\underline{p = 18}$

Postotni dio P izračunava se prema formuli $P = \dfrac{S \cdot p}{100}$, pa slijedi da je:

$$P = \frac{4800 \cdot 18}{100}$$

$P = 864$.

Proizvedeno je 864 komada proizvoda manje nego što je planirano.

Količina proizvedenih proizvoda izračunava se na način da se od osnovne veličine S oduzme postotni dio P.

$S - P = 4800 - 864 = 3936$

Proizvedeno je 3936 komada proizvoda.

Primjer 11. Trgovački lanac je primio 110,4 kg salate od pošiljke koja je imala 120 kg. Koliko je posto pošiljke kaliralo?

Rješenje:

$S = 120$

$\underline{P = 120 - 110{,}4 = 9{,}6}$

Postotak p se izračunava prema formuli $p = \dfrac{100 \cdot P}{S}$, pa je:

$$p = \frac{100 \cdot 9{,}6}{120}$$

$p = 8\%$.

Kaliralo je 8% pošiljke salate koju je primio trgovački lanac.

2.4.1. Postotni račun niže sto

Za rješavanje problema u kojima je zadana umanjena osnovna veličina, $S-P$, može se koristiti tzv. **postotni račun niže sto**. Temeljni razmjer kod postotnog računa niže sto je: $S:100=(S-P):(100-p)$ iz kojeg se izvode sljedeće formule za izračun veličina:[10]

1. $S=\dfrac{100\cdot(S-P)}{100-p}$,
2. $P=\dfrac{(S-P)\cdot p}{100-p}$.

Primjer 12. Zbog korištenja neplaćenog dopusta zaposleniku je isplaćeno 15% manje od osobnog dohotka. Koliki mu je osobni dohodak ako je sada primio 8.160,00 kn? Koliko je kn zaposlenik manje dobio?

Rješenje:

$p=15\%$
$S-P=8160$

Potrebno je izračunati osnovu veličinu S i postotni dio P.

Osnovna veličina S izračunava se na sljedeći način:

$$S=\frac{100\cdot(S-P)}{100-p}=\frac{100\cdot 8160}{100-15}=9600.$$

Osobni dohodak zaposlenika iznosi 9.600,00 kn, a da bi se utvrdilo za koliko je novaca zaposlenik dobio manje potrebno je izračunati postotni dio P.

$$P=S-(S-P)=9600-8160=1440$$

Postotni dio P se može izračunati i prema formuli $P=\dfrac{(S-P)\cdot p}{100-p}$, pa se uvršavanjem dobiva: $P=\dfrac{8160\cdot 15}{85}=1400$.

Dakle, zaposleniku je zbog neplaćenog dopusta isplaćeno 1.400,00 kn manje.

[10] Štambuk, Lj.: **Poslovna matematika 1**, op. cit., str. 90.

2.4.2. Postotni račun više sto

Za rješavanje problema u kojima je zadana uvećana osnovna veličina, $S+P$, koristi se **postotni račun više sto**. Temeljni razmjer kod postotnog računa više sto je razmjer: $S:100=(S+P):(100+p)$ iz kojeg se izvode sljedeće formule za izračun veličina:

1. $S=\dfrac{100\cdot(S+P)}{100+p}$,
2. $P=\dfrac{(S+P)\cdot p}{100+p}$.

Primjer 13. Cijena neke robe povišena je za 8% i sada iznosi 27,00 kn. Kolika je bila cijena prije povišenja i za koliko je kuna povišena?

Rješenje:

$p=8\%$
$(S+P)=27$

Potrebno je izračunati postotni dio P i osnovu veličinu S.

Postotni dio P se izračunava prema formuli $P=\dfrac{(S+P)\cdot p}{100+p}$, pa se uvrštavanjem dobiva:

$$P=\frac{27\cdot 8}{100+8}$$

$$P=\frac{216}{108}$$

$$P=2.$$

Osnovna veličina S jednaka je razlici uvećane osnovne veličine $S+P$ i postotnog dijela P:

$S=(S+P)-P=27-2=25.$

Osnovna veličina S može se izračunati i po formuli: $S=\dfrac{100\cdot(S+P)}{100+p}$ kao što slijedi:

$$S=\frac{100\cdot 27}{108}=25.$$

Cijena prije poskupljenja iznosila je 25,00 kn i povećana je za 2,00 kn.

2.5. Promilni račun

Promil je broj koji se uzima od tisuću jedinica neke veličine, a označava se znakom ‰.
U promilnom se računu javljaju veličine:

1. promil ($p‰$ **)** - broj jedinica koji otpada na 1000 jedinica,

$$p‰ = \frac{p}{1000}$$

2. osnovna veličina (S **)** - broj od kojeg se obračunava promil,

3. promilni dio (P **)** - broj koji se dobije kada se od osnovne veličine odredi dio naznačen danim promilom.

Osnovni razmjer za promilni račun je:
$S : 1000 = P : p$.

Iz osnovnog razmjera za promilni račun može se izračunati bilo koja veličina, ako su ostale dvije poznate. Formule za izračun veličina su:[11]

1. $p = \frac{1000 \cdot P}{S}$,

2. $S = \frac{1000 \cdot P}{p}$,

3. $P = \frac{S \cdot p}{1000}$.

Primjer 14. Laboratorijskom analizom utvrđeno je da u izvjesnoj količini soka od naranče ima 5,2‰ limunske kiseline, što iznosi 0,26 l. Kolika je količina soka podvrgnuta analizi?

Rješenje:

$p = 5{,}2$
$\underline{P = 0{,}26\ l}$

[11] Relić B.: **Gospodarska matematika**, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 1996., str. 10.

Osnovna veličina izračuna se po formuli: $S = \dfrac{1000 \cdot P}{p}$.

$$S = \frac{1000 \cdot 0{,}26}{5{,}2}$$

$$S = \frac{260}{5{,}2}$$

$S = 50$.

Analizi je podvrgnuta količina od 50 l soka od naranče.

2.5.1. Promilni račun niže tisuću

Temeljni razmjer kod **promilnog računa niže tisuću** je:

$$S : 1000 = (S - P) : (1000 - p)$$

iz kojeg se izvode sljedeće formule za izračun veličina:

1. $S = \dfrac{1000 \cdot (S - P)}{1000 - p}$,
2. $P = \dfrac{(S - P) \cdot p}{1000 - p}$.

Primjer 15. Račun umanjenjen za 6‰ provizije iznosi 31.808,00 kn. Koliki je bio prvobitni iznos računa, a kolika je provizija?

Rješenje:

$p = 6$

$S - P = 31808$

Osnovna veličina izračuna se po formuli: $S = \dfrac{1000 \cdot (S - P)}{1000 - p}$.

$$S = \frac{1000 \cdot 31808}{1\,000 - 6}$$

$$S = \frac{31808000}{994}$$

$S = 32000$.

Promilni dio P dobiva se na način da se od osnovne veličine S oduzme umanjena osnovna veličina $S - P$.

$P = S - (S - P) = 32000 - 31808 = 192$

Promilni dio P može se izračunati i primjenom formule: $P = \frac{(S-P) \cdot p}{1000 - p}$.

$$P = \frac{31808 \cdot 6}{994}$$

$P = 192$

Prvobitan iznos iznosio je 32.000,00 kn, a iznos provizije je 192,00 kn.

2.5.2. Promilni račun više tisuću

Temeljni razmjer kod **promilnog računa više tisuću** je:

$$S : 1000 = (S + P) : (1000 + p) .$$

te se za izračun veličina izvode sljedeće formule:

1. $S = \frac{1000 \cdot (S + P)}{1000 + p}$,
2. $P = \frac{(S + P) \cdot p}{1000 + p}$.

Primjer 16. Nakon povećanja cijene za 180‰ proizvod se prodaje za 57.230,00 kn. Kolika je bila prvobitna cijena proizvoda i koliko iznosi njezino povećanje?

Rješenje:

$$\frac{p = 180 \quad S + P = 57230}{}$$

Osnovna veličina izračuna se po formuli $S = \dfrac{1000 \cdot (S + P)}{1000 + p}$:

$$S = \frac{1000 \cdot 57230}{1000 + 180}$$

$$S = 48500 .$$

Promilni dio P dobiva se na način da se od uvećane osnovne veličine $S - P$ oduzme osnovna veličina S .

$$P = (S + P) - S = 57230 - 48500 = 8730 .$$

Promilni dio P može se izračunati i primjenom formule: $P = \dfrac{(S + P) \cdot p}{1000 + p}$

$$P = \frac{57230 \cdot 180}{1180}$$

$$P = 8730$$

Cijena proizvoda prije povećanja iznosila je 48.500,00 kn, a povećana je za 8.730,00 kn.

Napomena: Do istog rješenja moglo se doći i preko postotnog računa tako da se u izračun uzeo postotak povećanja cijene od 18%.

2.6. Pravilo trojno

Gotovo da nema područja u gospodarskoj praksi u kojem se ne koristi **pravilo trojno**. Naziv pravila proizlazi iz činjenice da se iz tri poznate veličine nalazi četvrta nepoznata. Pravilo trojno se dijeli na jednostavno i složeno.

2.6.1. Jednostavno pravilo trojno

Jednostavno pravilo trojno je shematski postupak na osnovu kojeg se iz tri poznata člana razmjera određuje, dobiva četvrti nepoznati član. Kod sastavljanja sheme istovrsne veličine se ispisuju jedna ispod druge nakon čega se formira razmjer iz kojeg se onda izračunava nepoznata veličina.

Pokraj veličina crtamo strelice i to:

1. u istom smjeru ako su veličine upravno razmjerne,
2. u suprotnom smjeru ako su veličine obrnuto razmjerne.[12]

I. slučaj- upravno razmjerne veličine

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ \uparrow & \uparrow \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

Iz shematskog prikaza proizlazi sljedeći razmjer:

$$y_2 : y_1 = x_2 : x_1 \left(\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \right).$$

Rješavanjem razmjera dobivamo sljedeće formule:

$$y_1 = \frac{x_1 \cdot y_2}{x_2},\ y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}.$$

II. slučaj- obrnuto razmjerne veličine

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ \downarrow & \uparrow \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

[12] Štambuk, Lj.: **Poslovna matematika 1**, op. cit., str. 96.

Iz shematskog prikaza proizlazi sljedeći razmjer:

$$y_2 : y_1 = x_1 : x_2 \quad \left(\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Rješavanjem razmjera dobivamo sljedeće formule:

$$y_1 = \frac{x_2 \cdot y_2}{x_1}, \; y_2 = \frac{x_1 \cdot y_1}{x_2}.$$

Primjer 17. Ako smo za 6 kg limuna platili 48,00 kn, koliko bi stajalo 20 kg limuna?

Rješenje:

Kilogrami i cijena robe nalaze su u upravno razmjernom odnosu, te se postavlja sljedeća shema:

$$\begin{array}{ll} 6\,\text{kg} & 48\,\text{kn} \\ \quad\uparrow & \quad\uparrow \\ 20\,\text{kg} & x\,\text{kn} \end{array}$$

Iz sheme se određuje razmjer: $x : 48 = 20 : 6$.

Rješavanjem razmjera (množenjem unutarnjih članova s unutarnjim, a vanjskih s vanjskim) dobiva se:

$$6x = 48 \cdot 20$$

$$x = \frac{960}{6}$$

$$x = 160.$$

Dakle, 20 kg limuna stoji 160,00 kn.

Primjer 18. 32 radnika obavi neki posao za 10 sati. Koliko radnika isti posao obavi za 8 sati?

Rješenje:

Broj radnika i vrijeme potrebno za obavljanje nekog posla nalaze su u obrnuto razmjernom odnosu, pa vrijedi sljedeća shema:

$$\begin{array}{ll} 32 \text{ radnika} & 10 \text{ sati} \\ \qquad\quad\uparrow & \qquad\quad\downarrow \\ x \text{ radnika} & 8 \text{ sati} \end{array}$$

Iz sheme se određuje razmjer $x:32 = 10:8$.

Rješavanjem razmjera, tj. množenjem unutarnjih članova s unutarnjim, a vanjskih s vanjskim dobiva se :

$$8x = 32 \cdot 10$$

$$x = \frac{320}{8}$$

$$x = 40.$$

Dakle, da bi se posao završio za 8 sati potrebno je 40 radnika.

2.6.2. Složeno pravilo trojno

Složeno pravilo trojno shematski je postupak za određivanje nepoznate šeste, osme,…, veličine, ako je poznato pet, sedam,… veličina produženog razmjera. Problemi koji se rješavaju složenim pravilom trojnim mogu se rješavati postupno, uzastopnom primjenom jednostavnog pravila trojnog ili primjenom algoritma složenog pravila trojnog.

Algoritam složenog pravila trojnog sastoji se od 5 koraka:[13]

1. istovjetne veličine zapišu se jedna ispod druge;

[13] Štambuk, Lj.: **Poslovna matematika 1**, op. cit., str. 98.

2. uz par istovjetnih veličina u kojem se nalazi nepoznata veličina x postavlja se strelica od nepoznate veličine prema poznatoj;
3. odvojeno i postupno se uspoređuje par koji sadrži nepoznatu veličinu x s ostalim parovima istovjetnih veličina te se stavljaju strelice u istom smjeru kao uz nepoznatu veličinu ako se radi o upravno razmjernim veličinama, odnosno u suprotnom smjeru ako su veličine obrnuto razmjerne;
4. na temelju postavljenih strelica postavljaju se odgovarajući razmjeri;
5. nepoznata veličina x izračunava se na način da se umnožak unutarnjih članova postavljenog razmjera podijeli s umnoškom vanjskih članova razmjera.

Primjer 19. 12 osoba prilijepi 150000 bar-kodova na određene proizvode za 3 dana radeći 10 sati dnevno. Koliko treba osoba da bi se priljepilo 80000 bar-kodova na proizvode za 4 dana, radeći 8 sati dnevno?

Rješenje:

Postavlja se sljedeća shema:

$$\begin{array}{cccc} 12\text{ osoba} & 150000\text{ bar-kodova} & 3\text{ dana} & 10\text{ sati} \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\ x\text{ osoba} & 80000\text{ bar-kodova} & 4\text{ dana} & 8\text{ sati} \end{array}$$

Iz sheme slijedi razmjer:

$$\begin{aligned} x:12 &= 80\,000:150\,000 \\ &= 3:4 \\ &= 10:8 \end{aligned}$$

$$x = \frac{12 \cdot 80\,000 \cdot 3 \cdot 10}{150\,000 \cdot 4 \cdot 8} = 6\,.$$

Dakle, da bi prilijepili 80000 bar-kodova potrebno je 6 osoba koje će raditi 4 dana po 8 sati dnevno.

Primjer 20. 15 zemljoradnika obradi poljoprivrednu površinu od 12,5 ha za 8 dana radeći dnevno 10 sati. Koliko dnevno mora raditi 12 jednako vrijednih radnika žele li za 10 dana obraditi površinu od 10 ha?

Rješenje:

Postavlja se sljedeća shema:

$$\begin{array}{cccc} 15 \text{ kosaca} & 12{,}5 \text{ ha} & 8 \text{ dana} & 10 \text{ sati} \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ 12 \text{ kosaca} & 10 \text{ ha} & 10 \text{ dana} & x \text{ sati} \end{array}$$

Iz sheme slijedi razmjer:

$$\begin{aligned} x : 10 &= 15 : 12 \\ &= 10 : 12{,}5 \\ &= 8 : 10 \end{aligned}$$

$$x = \frac{10 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 8}{12 \cdot 12{,}5 \cdot 10} = \frac{1200}{150} = 8 .$$

12 jednako vrijednih radnika žele li za 10 dana obraditi površinu od 10 ha trebaju dnevno raditi 8 sati.

2.7. Prosječni račun

Prosječnim se **računom** određuje prosječna vrijednost više veličina. Prosječna vrijednost više veličina je njihova aritmetička sredina, pa je prosječna vrijednost:

- dvaju brojeva x_1 i x_2 broj: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$,

- *n* brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je broj: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Dakle, da bi se dobila prosječna vrijednost od *n* brojeva, potrebno je zbrojiti sve brojeve i dobiveni iznos podijeliti s *n*. To se kraće zapisuje na način:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Ukoliko su osnovni podaci sređeni te je poznat broj pojavljivanja, tj. učestalost frekvencija pojedinih vrijednosti obilježja: f_1, $f_2, \ldots, f_k$, aritmetička sredina računa se po formuli:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + f_k}.$$

Budući da je $f_1 + f_2 + \ldots + f_k = n$, formula se može kraće zapisati kao:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \ .$$

Primjer 21. Zadani su brojevi 3,62**,** 3,78**,** 4,02**,** 3,56**,** 3,94. Kolika je prosječna vrijednost tih brojeva?

Rješenje:

Prosječna vrijednost računa se prema formuli:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{3{,}62 + 3{,}78 + 4{,}02 + 3{,}56 + 3{,}94}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{18{,}92}{5} = 3{,}784 \ .$$

Prosječna vrijednost brojeva iznosi 3,784.

Primjer 22. Imamo 22 kg robe po 63,50 kn, 19 kg robe po 65,00 kn i 55 kg robe po 71,30 kn. Uz koju će se prosječnu cijenu prodavati roba koja se dobije ako se sve tri vrste pomiješaju?

Rješenje:

Poznata je učestalost frekvencija vrijednosti obilježja: f_1, $f_2, \ldots, f_k$, pa se aritmetička sredina računa po formuli:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + f_k}$$

$$\bar{x} = \frac{22 \cdot 63{,}50 + 19 \cdot 65 + 55 \cdot 71{,}30}{22 + 19 + 55}$$

$$\bar{x} = \frac{1397 + 1235 + 3921{,}5}{96}$$

$$\bar{x} = \frac{6553{,}5}{96}$$

$$\bar{x} = 68{,}27 .$$

Roba dobivena miješanjem 22 kg robe po 63,50 kn, 19 kg robe po 65,00 kn i 55 kg robe po 71,30 kn prodavat će se po prosječnoj cijeni od 68,27 kn.

2.8. Račun diobe

U praksi se javlja potreba za podjelom troškova u određenom omjeru, kao što su podjela troškova električne energije, podjela troškova vode, troškova grijanja stanova ili poslovnih objekata, podjela imovine kod nasljeđivanja i dr. **Račun diobe** je postupak pomoću kojeg se pojednostavljuje rješavanje problema u kojima je potrebno neku zadanu veličinu razdijeliti na dijelove (nositelje) prema jednom ili više kriterija.[14] Ovisno o broju kriterija razlikujemo jednostavni i složeni račun diobe.

2.8.1. Jednostavni račun diobe

Zadanu veličinu S treba razdijeliti na nositelje (dijelove) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prema **jednom** kriteriju, tako da se ti dijelovi odnose kao $a_1 : a_2 : \ldots : a_n$. Potrebno je odrediti vrijednost dijelova $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Taj problem može se matematički formulirati kao[15]:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$$

$$x_1 : x : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$$

Produženi razmjer $x_1 : x : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$ može se zapisati kao *n* jednadžbi:

[14] Štambuk LJ.: **Poslovna Matematika 1**, op. cit., str. 110.
[15] Relić B.: **Gospodarska matematika,** op. cit., str. 19.

$x_1 = k \cdot a_1$, $x_2 = k \cdot a_2, \ldots,$ $x_n = k \cdot a_n$.

Zbrajanjem jednadžbi dobiva se jednakost $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)$, odnosno $k \cdot \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = S$, pa je koeficijent razmjernosti k jednak:

$$k = \frac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Veličine dijelova x_i određuju se uvrštavanjem koeficijenta k u jednakost $x_i = k \cdot a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Primjer 23. Računovodstvo neke tvrtke dijeli dohodak na osobne dohotke i fondove u omjeru $8:3$. Ukupni dohodak iznosi 396.000,00 kn. Koliki je iznos osobnog dohotka, a koliki je iznos za fondove ?

Rješenje:

$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 396000$

$a_1 = 8, \quad a_2 = 3$

$a_1 : a_2 = 8 : 3$

Koeficijent razmjernosti k jednak je:

$$k = \frac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

$$k = \frac{396000}{8+3}$$

$$k = \frac{396000}{11}$$

$$k = 36000.$$

Iz jednadžbe $x_i = k \cdot a_i$ slijedi:

$x_1 = 8k = 8 \cdot 36000 = 288000$

$x_2 = 3k = 3 \cdot 36000 = 108000$.

Iznos od 396.000,00 kn podijelit će se 288.000,00 kn za osobne dohotke i 108.000,00 kn za fondove.

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos 396000.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$$

$$288000 + 108000 = 396000$$

Primjer 24. Trgovačko društvo je primilo 650 kg sirovine A, 500 kg sirovine B i 1250 kg sirovine C. Ukupni troškovi prijevoza pošiljke sirovina iznose 6.000.000,00 kn. Treba razdijeliti te troškove za pojedine sirovine prema kriteriju količine sirovina.

Rješenje:

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 6000000$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = 650 : 500 : 1250$$

$$\underline{a_1 = 650,\ a_2 = 500,\ a_3 = 1250}$$

Uvrštavanjem u formulu za koeficijent razmjernosti $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ dobiva se:

$$k = \frac{6000000}{650 + 500 + 1250}$$

$$k = \frac{6000000}{2400}$$

$$k = 2500\ .$$

Uvrštavanjem u jednakost $x_i = a_i \cdot k$ slijedi:

$$x_1 = 650k = 650 \cdot 2500 = 1625000$$

$$x_2 = 500k = 500 \cdot 2500 = 1250000$$

$$x_3 = 1250k = 1250 \cdot 2500 = 3125000\ .$$

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos 6000000.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$

$1625000 + 1250000 + 3125000 = 6000000\,.$

Na sirovinu A otpada 1.625.000,00 kn, na sirovinu B 1.250.000,00 kn te na sirovinu C 3.125.000,00 kn troškova prijevoza.

2.8.2. Složeni račun diobe

Kod složenog računa diobe veličina S dijeli se na dijelove x_1, $x_2, \ldots, x_n$ prema **više** kriterija, tako da se ti dijelovi odnose kao $b_1 : b_2 : \ldots : b_n$ prema prvom kriteriju, kao $c_1 : c_2 : \ldots : c_n$ prema drugom kriteriju i tako za svaki sljedeći kriterij, što se može zapisati kao:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S \\
&x_1 : x_2 : \ldots : x_2 = b_1 : b_2 : \ldots : b_n \\
&\qquad\qquad\qquad\quad c_1 : c_2 : \ldots : c_n \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\quad m_1 : m_2 : \ldots : m_n
\end{aligned}
$$

Iz zapisa se formira složeni razmjer:

$x_1 : x : \ldots : x_n = (b_1 \cdot c_{1.} \cdot \ldots \cdot m_1) : (b_2 \cdot c_{2.} \cdot \ldots \cdot m_2) : (b_{n.} \cdot c_n \ \ldots \cdot m_n).$

Uvođenjem oznaka :

$a_1 = b_1 \cdot c_1 \cdot \ldots \cdot m_1$, $a_2 = b_2 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot m_2$, …, $a_n = b_{n\cdot} \cdot c_n \cdot \ldots \cdot m_n$ dobivamo zapis:

$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$, odnosno jednostavni račun diobe kod kojeg je koeficijent razmjernosti *k* jednak:

$$k = \frac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\,.$$

Primjer 25. Četiri radnika radeći zajedno zaradili su 12.330,00 kn. Kako raspodijeliti zaradu ako je prvi radio 5 dana po 12 sati, drugi 7 dana po 10 sati, treći 12 dana po 6 sati i četvrti 9 dana po 8 sati?

Rješenje:

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 12330$$

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= 5 : 7 : 12 : 9 \\ &= 12 : 10 : 6 : 8 \; / : 2 \\ &= 6 : 5 : 3 : 4 \end{aligned}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (5 \cdot 6) : (7 \cdot 5) : (12 \cdot 3) : (9 \cdot 4)$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 30 : 35 : 36 : 36$$

$$a_1 = 30,\ a_2 = 35,\ a_3 = 36,\ a_4 = 36$$

Prema formuli: $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ je:

$$k = \frac{12330}{30 + 35 + 36 + 36}$$

$$k = \frac{12330}{137}$$

$$k = 90 \; .$$

Iz jednadžbe $x_i = a_i \cdot k$ slijedi:

$$x_1 = 30k = 30 \cdot 90 = 2700$$

$$x_2 = 35k = 35 \cdot 90 = 3150$$

$$x_3 = 36k = 36 \cdot 90 = 3240$$

$$x_4 = 36k = 36 \cdot 90 = 3240 \, .$$

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos 12330.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$$

$$2700 + 3150 + 3240 + 3240 = 12330$$

Prvi radnik je zaradio 2.700,00 kn, drugi 3.150,00 kn , a treći i četvrti po 3.240,00 kn

Primjer 26. Tri grada zajednički grade most i vrijedi:

- grad A ima 16000 stanovnika i 6000 vozila, a udaljen je od mosta 12 km,
- grad B ima 18000 stanovnika i 7500 vozila, a udaljen je od mosta 15 km,
- grad C ima 12000 stanovnika i 8000 vozila, a udaljen je od mosta 8 km.

Troškovi izgradnje mosta iznose 3.958.500,00 kn. Kojim iznosom će gradovi sudjelovati u izgradnji ako su troškovi upravno razmjerni s brojem stanovnika i s brojem vozila, a obrnuto razmjerni s brojem km udaljenosti?

Rješenje:

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3958500$$

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= 16000 : 18000 : 12000 \;/ :1000 \\ &= 16 : 18 : 12 \\ &= 6000 : 7500 : 8000 \;/ :1000 \\ &= 6 : 7{,}5 : 8 \\ &= \frac{1}{12} : \frac{1}{15} : \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{16 \cdot 6}{12} : \frac{18 \cdot 7{,}5}{15} : \frac{12 \cdot 8}{8}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 8 : 9 : 12$$

$$a_1 = 8,\ a_2 = 9,\ a_3 = 12$$

Prema formuli $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ je:

$$k = \frac{3958500}{8+9+12}$$

$$k = \frac{3958500}{29}$$

$$k = 136500 \quad .$$

Iz jednadžbe $x_i = k \cdot a_i$ slijedi:

$$x_1 = 8\,k = 8 \cdot 136500 = 1092000$$

$$x_2 = 9k = 9 \cdot 136500 = 1228500$$

$x_3 = 12k = 12 \cdot 136500 = 1638000$.

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos 3958500.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$

$1092000 + 1228500 + 1368000 = 3958500$

Prvi grad treba dati 1.092.000,00 kn za most, drugi 1.228.500,00 kn, a treći 1.638.000,00 kn.

2.9. Račun smjese

Račun smjese koristi se pri određivanju omjera u kojem treba miješati neke istovrsne veličine, kao što su alkohol, voće, kava, zlato i dr, da bi se dobila smjesa željenog prosječnog intenziteta. Veličine imaju neku zajedničku osobinu različitog intenziteta npr. slatkost, finoću, cijenu i dr.

Ako je:

x_i - količina *i*-te komponente smjese,

a_i - intenzitet promatrane osobine za *i*-tu komponentu,

m - prosječni intenzitet zadane osobine

pri čemu je $i = 1, 2, ..., n$, onda je ukupna količina smjese S jednaka:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S .$$

Mora vrijediti jednakost[16]:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot m ,$$

pri čemu je prosječni intenzitet m jednak:

$$m = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} ,$$

što se kraće može zapisati kao:

[16] Tevčić, M.: **Predavanja iz Poslovne matematike 1**, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2012.

$$m=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=n}^{n} x_i}.$$

Omjer mješavina $x_1 : x_2 : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$ i količine $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ mogu se odrediti: [17]

a) rješavanjem sustava linearnih jednadžbi,
b) pomoću posebnih shema.

2.9.1. Jednostavni račun smjese

Ako je smjesa sastavljena od dvaju sastojaka, tada se za izračun primjenjuje **jednostavni račun smjese**. Kod jednostavnog računa smjese dolazi do miješanja dvije vrste robe:

- robu količine x_1 intenziteta osobine a_1,
- robu količine x_2 intenziteta osobine a_2.

Mješanjem se dobije smjesa količine $x_1 + x_2$ intenziteta m , pri čemu je potrebno odrediti omjer miješanja $x_1 : x_2$.

Uključivanjem tih veličina u formulu za intenzitet $m=\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$, dobivamo:

$$m=\frac{a_1x_1 + a_2x_2}{x_1 + x_2}.$$

Ako pretpostavimo da je $a_1 < a_2$ (isto vrijedi i ako je $a_2 < a_1$) slijedi:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = m\left(x_1 + x_2\right)$$

$$\Rightarrow \left(m - a_1\right)\cdot x_1 = \left(a_2 - m\right)\cdot x_2$$

iz čega proizlazi traženi omjer miješanja:

$$x_1 : x_2 = \left(a_2 - m\right) : \left(m - a_1\right).$$

[17] Štambuk LJ.: **Poslovna Matematika 1**, op. cit., str. 115.

Budući da je m prosječni intenzitet osobine, vrijedi $a_1 < m < a_2$.

U praksi se omjer miješanja uglavnom određuje pomoću sheme iz koje se očita traženi omjer.

Algoritam postavljanja sheme uključuje 3 koraka:

1. Osobine se upišu jedna ispod druge, od osobine manjeg do osobine većeg intenziteta. Između zadanih intenziteta a_1 i a_2 upisuje se prosječni intenzitet m .

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & \\ & m & \\ a_2 & & \end{array}$$

2. Strelicama se označava miješanje, zatim se dijagonalno određuju razlike $(a_2 - m)$ i $(m - a_1)$.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & & & a_2 - m \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & m & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ a_2 & & & & m - a_1 \end{array}$$

2. Iz sheme se određuje omjer

$$x_1 \; : \; x_2 = (a_2 - m) : (m - a_1).$$

Primjer 27. Od alkohola jakosti 70% i 95% treba napraviti mješavinu od 230 l jakosti 85%.

Rješenje:

Postavljanje sheme:

$$\begin{array}{ccccc} 70 & & & & 95 - 85 = 10 \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & 85 & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ 95 & & & & 85 - 70 = 15 \end{array}$$

Iz sheme se određuje omjer:

$$x_1 : x_2 = (a_2 - m) : (m - a_1)$$

$$x_1 : x_2 = 10 : 15 / : 5$$

$$x_1 : x_2 = 2 : 3$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3$$

Dalje se postupa prema računu diobe, pa uvrštavanjem u formulu $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ dobivamo:

$$k = \frac{230}{2+3}$$

$$k = \frac{230}{5}$$

$$k = 46.$$

Količine x_i određuju se iz formule $x_i = k \cdot a_i$ uvrštavanjem:

$$x_1 = 2 \cdot k = 2 \cdot 46 = 92,$$

$$x_2 = 3 \cdot k = 3 \cdot 46 = 138.$$

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos S.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$$

$$92 + 138 = 230$$

Dakle, da bi se dobilo 230 l alkohola jakosti 85% potrebno je miješati 92 l alkohola jakosti 70% i 138 l alkohola jakosti 95%.

Primjer 28. Od robe po cijeni 130,00 kn za 1 kg i robe po cijeni 280,00 kn za 1 kg valja napraviti mješavinu od 6.000 kg koja će se prodavati po cijeni od 210,00 kn po kg. Koliko kilograma svake vrste robe treba miješati?

Rješenje:

Postavljanje sheme:

$$\begin{array}{ccccc}
130 & & & & 280-210=70 \\
 & \ddots & & \cdots & \\
 & & 210 & & \\
 & \cdots & & \ddots & \\
280 & & & & 210-130=80
\end{array}$$

Iz sheme se određuje omjer:

$$x_1 : x_2 = 70:80 \,/:10$$

$$x_1 : x_2 = 7:8$$

$$a_1 = 7,\; a_2 = 8$$

Prema računu diobe koeficijent razmjernosti $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ je:

$$k = \frac{6000}{7+8}$$

$$k = 400\,.$$

Količine se određuju iz formule $x_i = k \cdot a_i$:

$$x_1 = 7 \cdot k = 7 \cdot 400 = 2800$$

$$x_2 = 8 \cdot k = 8 \cdot 400 = 3200\;\;.$$

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos S.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$$

$$2800 + 3200 = 6000$$

Dakle, da bi dobili mješavinu od 6.000 kg koja će se prodavati po cijeni od 210,00 kn po kg, potrebno je miještati 2.800 kg robe po cijeni od 130,00 kn za kg i 3.200 kg robe po cijeni od 280,00 kn po kg.

2.9.2. Složeni račun smjese

U slučajevima kada se radi o smjesi više od dviju veličina, potrebno je riješiti sustav dviju jednadžbi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ i $m = \dfrac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$ s n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$.[18]

Poznato je da takav sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Jedno od rješenja se može odrediti na način da se jedna od veličina odabere proizvoljno, a preostale dvije izračunaju. Slično kao i kod jednostavnog računa smjese, kod **složenog računa smjese** za izračun se primjenjuje shematski postupak.

Kod shematskog postupka veličine se i dalje ispisuju od najmanjeg prema najvećem intenzitetu. Do omjera miješanja dolazimo postepeno, promatrajući uvijek jednu vrijednost većeg i jednu vrijednost manjeg intenziteta od zadane prosječne vrijednosti, računajući omjer miješanja po pravilu miješanja dvaju sastojaka. Postupak ponavljamo dok ne iscrpimo sve mogućnosti:[19]

a) ako je broj sastojaka kojima je vrijednost veća od prosječne jednak broju sastojaka kojima je vrijednost manja od prosječne, dobivamo po jedan omjer;
b) ako broj sastojaka kojima je vrijednost veća od prosječne nije jednak broju sastojaka kojima je vrijednost manja od prosječne, primjenom postupka dobivamo više omjernih brojeva koje treba zbrojiti da bi dobili jedinstveni omjer za navedeni sastojak;
c) pri miješanju više od dvaju sastojka, složeni račun smjese daje više rješenja (ovisno o odabiru parova sastojaka), pa biramo ono rješenje koje nam je u konkretnom slučaju povoljnije.

Primjer 29. Potrebno je pomiješati tri vrste kave čije su cijene 23,00 kn za 1 kg, 25,00 kn za 1 kg i 32,00 kn za 1 kg. Želimo dobiti ukupno 64 kg smjese koja će se prodavati po cijeni od 29,00 kn za 1 kg.

Rješenje:

Postavljanje sheme:

[18] Ibidem, str. 119.
[19] Ibidem, str. 120.

$$\begin{array}{lll} 23 & & 32-29=3 \\ 25 & & 32-29=3 \\ & 29 & \\ 32 & & (29-25)+(29-23)=4+6=10 \end{array}$$

Iz sheme se određuje omjer:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 3:3:10$$

$$a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 10.$$

Prema računu diobe koeficijent razmjernosti $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ je:

$$k = \frac{64}{3+3+10}$$

$$k = \frac{64}{16}$$

$$k = 4.$$

Količine se određuju iz formule $x_i = k \cdot a_i$:

$$x_1 = 3 \cdot k = 3 \cdot 4 = 12$$

$$x_2 = 3 \cdot k = 3 \cdot 4 = 12$$

$$x_3 = 10 \cdot k = 10 \cdot 4 = 40\ .$$

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos S.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$$

$$12 + 12 + 40 = 64\ .$$

Dakle, potrebno je pomiješati 12 kg kave po 23,00 kn, 12 kg kave po 25,00 kn i 40 kg kave po 32,00 kn, da bi se dobila smjesa od 64 kg kave po 29,00 kn za 1 kg.

Primjer 30. U kojem je omjeru potrebno pomiješati četiri vrste srebra finoće 650‰, 720‰, 850‰ i 920‰, da bi se dobila smjesa od 10 kg čija je finoća 800‰? Koliko svake vrste srebra treba uzeti?

Rješenje:

1. izbor

Postavljanje sheme:

650		$920-800=120$
720		$850-800=50$
	800	
850		$800-720=80$
920		$800-650=150$

Iz sheme se određuje omjer:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 120 : 50 : 80 : 150 \; / : 10$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 12 : 5 : 8 : 15$$

$$a_1 = 12,\; a_2 = 5,\; a_3 = 8,\; a_4 = 15$$

Prema računu diobe koeficijent razmjernosti $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ je:

$$k = \frac{10}{12+5+8+15}$$

$$k = \frac{10}{40}$$

$$k = 0{,}25.$$

Potrebne količine su:

$$x_1 = 12 \cdot k = 12 \cdot 0{,}25 = 3$$

$$x_2 = 5 \cdot k = 5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$$

$$x_3 = 8 \cdot k = 8 \cdot 0{,}25 = 2$$

$$x_4 = 15 \cdot k = 15 \cdot 0{,}25 = 3{,}75.$$

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos S .

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$

$3 + 1{,}25 + 2 + 3{,}75 = 10$

Dakle, da bi se dobila smjesa od 10 kg srebra finoće 800‰ potrebno je pomiješati 3 kg srebra finoće 650‰, 1,25 kg srebra finoće 720‰, 2 kg srebra finoće 850‰, i 3,75kg srebra finoće 920‰.

<u>2. izbor</u>

Postavljanje sheme:

650		$850 - 800 = 50$
720		$920 - 800 = 120$
	800	
850		$800 - 650 = 150$
920		$800 - 720 = 80$

Iz sheme se određuje omjer:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 50 : 120 : 150 : 80 \,/ : 10$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 12 : 15 : 8$$

$$a_1 = 5,\ a_2 = 12,\ a_3 = 15,\ a_4 = 8$$

Prema računu diobe koeficijent razmjernosti $k = \dfrac{S}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ je:

$$k = \frac{10}{5 + 12 + 15 + 8}$$

$$k = \frac{10}{40}$$

$$k = 0{,}25 .$$

Potrebne količine su:

$x_1 = 5 \cdot k = 5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$

$x_2 = 12 \cdot k = 12 \cdot 0{,}25 = 3$

$x_3 = 15 \cdot k = 15 \cdot 0{,}25 = 3{,}75$

$x_4 = 8 \cdot k = 8 \cdot 0{,}25 = 2$.

Kontrola:

Zbrajanjem svih dijelova mora se dobiti ukupni iznos S.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$

$1{,}25 + 3 + 3{,}75 + 2 = 10$

Iz izračuna se vidi da izbor nije jedinstven. Smjesu od 10 kg srebra finoće 800‰ moguće je dobiti i ako se pomiješa 1,25 kg srebra finoće 650‰, 3 kg srebra finoće 720‰, 3,75 kg srebra finoće 850‰ i 2 kg srebra finoće 920‰.

2.10. Verižni račun

Verižni račun je shematski postupak pomoću kojeg se pojednostavljuje rješavanje problema u kojemu je potrebno naći odnos između dviju veličina, koje su zadane drugim upravno razmjernim veličinama[20]. Shema po kojoj se rješavaju problemi verižnim računom naziva se **verižnik**. Verižni račun danas se najčešće upotrebljava za preračunavanje mjernih i novčanih jedinica.

Pravila pri postavljanju verižnika su: [21]

1. Počinje se nepoznatom veličinom.
2. Mjerna jedinica veličina na desnoj strani svakog reda mora biti istovrsna mjernoj jedinici veličine na lijevoj strani sljedećeg reda.
3. Verižnik završava mjernom jedinicom kojom i počinje.

Pojednostavljeno rečeno: rješenje verižnika je kvocijent između umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika.

Primjer 31. Kolika je cijena 1.200 kg neke robe u Hrvatskoj u kunama, ako je cijena te iste robe u Zürichu 3 CHF[22] za 1 kg robe? Prema tečaju HNB-a 1 CHF je 7,140147 kn.[23]

[20] Relić B.: **Gospodarska matematika,** op. cit., str. 34.
[21] Štambuk, Lj.: **Poslovna matematika 1**, op. cit., str. 105.
[22] Švicarski franak (CHF) je novčana jedinica Švicarske i Lihtenštajna.
[23] Srednji tečaj HNB-a na dan 11.03.2015.

Rješenje:

Postavljanje verižnika

x kn	1200 kg
1kg	3CHF
1CHF	7,140147 kn

Rješenje verižnika je kvocijent umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika, pa je:

$$x = \frac{1200 \cdot 3 \cdot 7{,}140147}{1 \cdot 1} = 25704{,}5292\ .$$

Cijena 1.200 kg te robe u Hrvatskoj iznosi 25.704,53 kn.

Primjer 32. Koliko stoji metar neke tkanine u Zagrebu, ako 100 yd[24] te tkanine stoji u Londonu 230 GBP[25], s time da je 1 m= 1,09361 yd, a 1 GBP je 10, 689706[26] kn?

Rješenje:

Postavljanje verižnika

x kn	1m
1m	1,09361 yd
100 yd	230 GBP
1 GBP	10,689706 kn

Rješenje verižnika se dobije na način da se izračuna kvocijent umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika, pa je:

$$x = \frac{1 \cdot 1{,}09361 \cdot 230 \cdot 10{,}689706}{1 \cdot 100 \cdot 1} = 26{,}88784957\ .$$

Dakle, 1 metar tkanine u Zagrebu košta 26,79 kn.

---

[24] Yard (*yd*) je osnovna angloamerička jedinica za duljinu, 1 yd iznosi 0,914399 metara.
[25] Britanska funta (GBP) je novčana jedinica Velike Britanije, simbol je £, a stoti dio zove se peni.
[26] Srednji tečaj HNB-a na dan 11.03.2015.

Primjer 33. Koliko EUR-a[27] stoji 1 l nafte, ako 1 gallon[28] stoji 4,6 USD[29], pri čemu je 1 gallon je 3,785 l, a 1 USD iznosi 0,9454 EUR-a?[30]

Rješenje:

Postavljanje verižnika

$$\begin{array}{ll} x\ \text{EUR} & 1\text{l} \\ 3{,}785\text{l} & 1\text{gallon} \\ 1\text{gallon} & 4{,}6\ \text{USD} \\ 1\ \text{USD} & 0{,}9454\ \text{EUR} \\ \hline \end{array}$$

Rješenje verižnika je kvocijent umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika, pa je:

$$x = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}9454}{3{,}785 \cdot 1 \cdot 1} = 1{,}148966975 \ .$$

Ako 1 gallon nafte stoji 4,6 USD, tada prema tečaju na dan 11.03.2015. godine cijena 1 l nafte je 1,15 EUR.

Verižni račun nalazi svoju najčešću primjenu u **računu deviza** (preračunu novčanih jedinica). Devize su sva potraživanja koja glase na stranu valutu[31]. Tečaj deviza je vrijednost jedinice jedne valute iskazana brojem jedinica druge, to je cijena koja se službeno objavljuje i uz koju se devize kupuju i prodaju. Za devizu, za koju je tečaj objavljen, kaže se da notira ili kotira[32]. Dva su načina notiranja: izravno i neizravno. Pri izravnom notiranju tečaj se iskazuje kao broj jedinica domaće valute koji se daje za 100 jedinica ili za 1 jedinicu strane valute. Kod neizravnog notiranja tečaj s iskazuje kao broj jednica strane valute kojeg treba dati za 1 jedinicu domaće valute. U državama EU primjenjuje se uglavnom izravno notiranje, osim u Velikoj Britaniji, gdje se primjenjuje neizravno notiranje.

---

[27] Euro (EUR) je zajednička valuta država Europske unije, simbol mu je €, stoti dio zove se cent, a danas je službena valuta 19 zemalja članica.

[28] Gallon je angloamerička mjerna jedinica za obujam, njome se izražava obujam tekućina.

[29] Američki dolar (USD) je novčana jednica SAD-a, simbol je $, a razdijeljen je u sto centi.

[30] Tečaj Europske centralne banke na dan 11.03.2015.

[31] Valuta je papirni i kovani novac koji izdaje država ili središnja banka, a služi kao sredstvo razmjene i zakonsko sredstvo plaćanja olakšavajući proces razmjene dobara i usluga.

[32] Relić B.: **Gospodarska matematika,** op. cit., str. 42.

Primjer 34. Klijent želi u Karlovcu promijeniti 500,00 EUR u kn. Promjenu EUR-a moguće je izvršiti u bankama i mjenjačnicama. U Tablici 1. dani su tečajevi nekoliko banaka u Karlovcu te mjenjačnice „Titanic". Gdje je to za klijenta najpovoljnije, a gdje najnepovoljnije na dan 11.03.2015. godine? Kolika iznosi razlika u kn?

Tablica 1. **Tečaj EUR-a u bankama na području grada Karlovca te mjenjačnici „Titanic" na dan 11.03.2015. godine**

Tečaj EUR-a na dan 11.03.2015.					
Naziv banke	*Kupovni tečaj za efektivu*[33]	*Kupovni tečaj za devize*	*Srednji tečaj*	*Prodajni tečaj za devize*	*Prodajni tečaj za efektivu*
Karlovačka banka	*7.540000*	7.550000	7.627105	7.689000	*7.699000*
Privredna banka Zagreb	*7,550000*	7,560000	7,610000	7,660000	*7,670000*
Erste & Steiermärkische banka	*7,565000*	7,575000	7,625000	7,675000	*7,687000*
Hrvatska poštanska banka	*7,545000*	7,565000	7,627105	7,665000	*7,675000*
Zagrebačka banka	*7,580000*	7,590000	7,627105	7,690000	*7,700000*
RBA -Raiffeisen bank	*7,570000*	7,570000	7,627105	7,670000	*7,685000*
Sberbank	*7,5900*	7,6100	7,627105	7,7100	*7,7300*
Hypo-alpe-adria-bank	*7,557000*	7,567000	7,627805	7,665000	*7,675000*
Splitska banka Societe Generale Group	*7,556000*	7,566000	7,627105	7,666000	*7,676000*
OTP banka	*7,564803*	7,577010	7,627105	7,745096	*7,756537*
Mjenjačnica „Titanic"	*7,550000*	-	-	-	*7,670000*

Izvor: Obrada autora

[33] Efektiva je bankarski izraz za gotov novac, odnosno gotovinu, obuhvaća novčanice i kovani novac, stoga će banka strane valute kod mijenjačkih poslova na šalteru promijeni po tečaju za efektivu.

Rješenje:

Za klijenta koji mijenja EUR-e u kn na dan 11.03.2015. godine u Karlovcu najpovoljnije je promijenu izvršiti u Sberbank, a najnepovoljnije u Karlovačkoj banci

Najpovoljnije

Postavljanje verižnika:

$$\begin{array}{ll} x \text{ kn} & 500\ € \\ 1\ € & 7{,}5900 \text{ kn} \\ \hline \end{array}$$

Rješenje verižnika je kvocijent umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika pa je:

$$x = \frac{500 \cdot 7{,}5900}{1} = 3795\ .$$

Kod promjene 500,00 € dobije se 3.795,00 kn.

Najnepovoljnije

Postavljanje verižnika:

$$\begin{array}{ll} x \text{ kn} & 500\ € \\ 1\ € & 7{,}5400 \text{ kn} \\ \hline \end{array}$$

Rješenje verižnika je kvocijent između umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika, pa je:

$$x = \frac{500 \cdot 7{,}5400}{1} = 3770\ \ .$$

Kod promjene 500,00 € dobije se 3.770,00 kn.

Razlika između između najpovoljnijeg i najnepovljnijeg tečaja iznosi 25,00 kn.

Primjer 35. Klijent želi 11.03.2015. u Karlovcu promijeniti 10.000,00 kn u USD: Gdje je za klijenta najpovoljnije, a gdje najnepovoljnije promijeniti kn u USD?

U Tablici 2. dani su tečajevi nekoliko banaka na području grada Karlovca te mjenjačnice „Titanic“.

Tablica 2. **Tečaj USD u bankama na području grada Karlovca te mjenjačnici „Titanic" na dan 11.03.2015. godine**

Tečaj USD na dan 11.03.2015.					
Naziv banke	*Kupovni tečaj za efektivu*	*Kupovni tečaj za devize*	*Srednji tečaj*	*Prodajni tečaj za devize*	*Prodajni tečaj za efektivu*
Karlovačka banka	*6.850000*	6.900000	7.088388	7.278000	*7.358000*
Privredna banka Zagreb	*6,852355*	6,852355	7,064284	7,276213	*7,385356*
Erste & Steiermärkische banka	*6,884000*	6,912200	7,082100	7,252000	*7,292000*
Hrvatska poštanska banka	*6,875736*	6,875736	7,088388	7,301040	*7,410555*
Zagrebačka banka	*6,862192*	6,931507	7,088388	7,347397	*7,411167*
RBA -Raiffeisen bank	*6,911887*	6,946620	7,088388	7,230156	*7,266307*
Sberbank	*6,9537*	6,9892	7,088388	7,3081	*7,3436*
Hypo-alpe-adria-bank	*6,885000*	6,986000	7,090888	7,186000	*7,287000*
Splitska banka Societe Generale Group	*6,895400*	6,962700	7,088388	7,210800	*7,299400*
OTP banka	*6,907935*	6,950510	7,088388	7,241446	*7,276925*
Mjenjačnica „Titanic"	*6,700000*	-	-	-	*7,25000*

Izvor: Obrada autora

Rješenje:

Najpovoljniji tečaj za za klijenta na dan 11.03.2015. godine je u mjenjačnici „Titanic", a najnepovoljniji u Sberbank banci.

Najpovoljnije

Postavljanje verižnika:

x USD	10000 kn
7,25000 kn	1 USD

Rješenje verižnika je kvocijent između umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika, pa je:

$$x = \frac{10000}{7{,}25000} = 1\,379{,}310345\ .$$

Za 10.000,00 kn moguće je kupiti 1.379,31 USD.

Najnepovoljnije

Postavljanje verižnika:

x USD	10000 kn
7,411167 kn	1 USD

Rješenje verižnika je kvocijent između umnoška veličina s desne strane i umnoška veličina s lijeve strane verižnika, pa je:

$$x = \frac{10\,000}{7{,}411167} = 1\,349{,}315162\ .$$

Za 10.000,00 kn moguće je kupiti 1349,31 USD.

Razlika između najpovoljnijeg i najnepovljnijeg tečaja iznosi 30,00 USD.

3. ZAKLJUČAK

Praksa pokazuje da je gospodarski račun važan za rješavanje problema s kojima se gospodarstvenici u svom radu svakodnevno susreću. Proizvodnja, prodaja, nabava, prihodi, rashodi, dobiti, gubitci, plaće i dr., veličine su koje se izražavaju brojevima. Gospodarski račun, ako se pravilno primjeni, olakšava određivanje odnosa među tim veličinama i rješavanje problema koji iz njih proizlaze.

Kod rješavanja praktičnih problema često se javljaju veličine koje se nalaze u upravnom ili obrnuto razmjernom odnosu, pri čemu promjena jedne veličine dovodi do promjene druge veličine. Stoga je bio nužan razvoj određenih shema, upotreba omjera i razmjera kako bi se što brže i lakše došlo do potrebnog rješenja.

U ovom završnom radu obrađene su samo temeljne metode gospodarskog računa, i to: postotni i promilni račun, pravilo trojno, prosječni račun, račun diobe, račun smjese te verižni račun. Svi ti računi omogućavaju jednostavno i efikasno rješavanje svakodnevnih problema u gospodarstvu. Za svaku od metoda gospodarskog računa u radu dana je definicija, opisan postupak izračuna koji je ilustriran na primjerima iz prakse.

LITERATURA

Stručne knjige:

1. Kovačić, B.:, Radišić, B.: **Gospodarska matematika - Zbirka zadataka s CD-om**, Školska knjiga, Veleučiliste u Požegi, Zagreb, 2011.
2. Pavlović, B.: **Poslovna matematika 1 - Zbirka riješenih zadataka**, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2009.
3. Perše, D.: **Gospodrastvena matematika,** Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2003.
4. Relić, B.: **Gospodarska matematika**, RRiF, Zagreb, 2002.
5. Štambuk, Lj.: **Poslovna matematika 1**, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2006.
6. Tevčić, M.: **Predavanja iz Poslovne matematike 1**, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac, 2012.
7. Zrno, Ž.: **Matematika za ekonomiste**, Veleučilište Marko Marulić, Knin, 2011.

Internet stranice:

1. ECB: European Central Bank, www.ecb.europa.eu (11.03.2015.)
2. Erste & Steiermärkische banka, www.erstebank.hr (11.03.2015.)
3. Hrvatska enciklopedija, www.enciklopedija.hr (13.05.2015.)
4. Hrvatska narodna banka, www.hnb.hr (11.03.2015.)
5. Hrvatska poštanska banka, www.hpb.hr (11.03.2015.)
6. HYPO ALPE-ADRIA-BANK d.d., www.hypo-alpe-adria.hr (11.03.2015.)
7. Karlovačka banka d.d., www.kaba.hr (11.03.2015.)
8. Moj-bankar, www.moj-bankar.hr (11.03.2015.)
9. *OTP* banka d.d., www.otpbanka.hr (11.03.2015.)
10. Privredna banka Zagreb, www.pbz.hr (11.03.2015.)
11. RBA-Raiffeisen bank, www.rba.hr (11.03.2015.)
12. Sberbank d.d., www.sberbank.hr (11.03.2015.)
13 Splitska banka Societe Generale Group, www.splitskabanka.hr (11.03.2015.)
14. Tečajna lista, www.tecajnalista.info (11.03.2015.)
15. Proleksis enciklopedija, proleksis.lzmk.hr (13.05.2015.)
16. Zagrebačka banka, www.zaba.hr (11.03.2015.)

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

POPIS PRILOGA

Prilog 1. **Tečaj i trgovanje valutama**

Valuta je službena novčana jedinica u nekoj državi, koja služi kao sredstvo razmjene i zakonsko sredstvo plaćanja, a omogućava razmjenu dobara i usluga. Prilikom obavljanja međunarodnih plaćanja između država koje nemaju istu valutu, da bi se plaćanje moglo izvršiti, potrebna je konverzija valuta korištenjem deviznih tečajeva koji se temelje na ponudi i potražnji za nekom od valuta.

Tečaj valute se formira ovisno od tržišne ponude i potražnje, dnevnog prometa i promjena stranih valuta, a formira ga država odnosno njezina središnja banka. Putem tečajne liste se objavljuje vrijednost valuta. U Hrvatskoj tečajnu listu formira i objavljuje Hrvatska narodna banaka.

Slika 3. **Hrvatska narodna banka**

Izvor: Proleksis enciklopedija, proleksis.lzmk.hr (11.03.2015.)

Hrvatska narodna banka provodi fluktuirajući tečaj, što znači da tečaj nacionalne valute nije fiksiran prema nekoj stranoj valuti već se slobodno formira na deviznom tržištu. Tečaj fluktuira ovisno o ponudi i potražnji deviza na deviznom tržištu, a Hrvatska narodna banka nastoji održati tečaj relativno stabilnim i sprječava prevelike oscilacije. Hrvatska narodna banka svakog radnog dana utvrđuje vrijednost kune prema drugim valutama, što se objavljuje na tečajnoj listi Hrvatske narodne banke.

Slika 4. **Tečajna lista Hrvatske narodne banke na dan 11.03.2015.**

TEČAJNA LISTA BROJ: 48
utvrđena na dan: 10.03.2015.

Tečajevi iz ove liste p r i m j e n j u j u se od 11.03.2015.
Tečajevi u k u n a m a - kn

Zemlja	Šifra	Val	Jed	KUPOVNI za devize	SREDNJI za devize	PRODAJNI za devize
Australija	036	AUD	1	5,396511	5,412749	5,428987
Kanada	124	CAD	1	5,586411	5,603221	5,620031
Češka	203	CZK	1	0,279033	0,279873	0,280713
Danska	208	DKK	1	1,020495	1,023566	1,026637
Mađarska	348	HUF	100	2,480177	2,487640	2,495103
Japan	392	JPY	100	5,811405	5,828892	5,846379
Norveška	578	NOK	1	0,879609	0,882256	0,884903
Švedska	752	SEK	1	0,827833	0,830324	0,832815
Švicarska	756	CHF	1	7,118727	7,140147	7,161567
Vel. Britanija	826	GBP	1	10,657637	10,689706	10,721775
SAD	840	USD	1	7,067123	7,088388	7,109653
EMU	978	EUR	1	7,604224	7,627105	7,649986
Poljska	985	PLN	1	1,842108	1,847651	1,853194

Napomena:
Za 09.03.2015. tečaj 1,00 XDR iznosi 9,680245 kn.

Izvor: Hrvatska narodna banka, www.hnb.hr (11.03.2015.)

Banke, kod trgovine deviza, međusobne obračune vrše po srednjem tečaju, a kod naloga za kupnju deviza od strane klijenta obračunavaju viši prodajni tečaj, dok kod prodaje deviza obračunavaju niži kupovni tečaj. Banka će strana sredstva plaćanja kod mijenjačkih poslova na šalteru promijeniti, ne po deviznom tečaju, nego po tečaju za efektivu. Osim kod banaka, promijena valute može se obaviti i u mjenjačinicama.