

# Nastanak i osnovne karakteristike izmjenične struje

---

**Lukanec, Magdalena**

**Master's thesis / Specijalistički diplomski stručni**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Karlovac University of Applied Sciences / Veleučilište u Karlovcu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:128:523196>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-23**



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
Karlovac University of Applied Sciences

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Karlovac University of Applied Sciences - Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
ODJEL SIGURNOSTI I ZAŠTITE  
SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ SIGURNOSTI I  
ZAŠTITE

MAGDALENA LUKANEC

**NASTANAK I OSNOVNE  
KARAKTERISTIKE IZMJENIČNE STRUJE**

DIPLOMSKI RAD

KARLOVAC, 2017.

KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES  
SAFETY AND PROTECTION DEPARTMENT  
PROFESSIONAL GRADUATE STUDY OF SAFETY AND PROTECTION

MAGDALENA LUKANEC

**THE ORIGIN AND BASIC  
CHARACTERISTIC OF THE  
ALTERNATING CURRENT**

GRADUATE THESIS

KARLOVAC, 2017.



VELEUČILIŠTE U KARLOVCU  
ODJEL SIGURNOSTI I ZAŠTITE  
SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ SIGURNOSTI I  
ZAŠTITE

MAGDALENA LUKANEC

**NASTANAK I OSNOVNE  
KARAKTERISTIKE IZMJENIČNE STRUJE**

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Slaven Lulić, dipl. ing.

KARLOVAC, 2017.



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**  
KARLOVAC UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Trg J.J.Strossmayera 9  
HR-47000, Karlovac, Croatia  
Tel. +385 - (0)47 - 843 - 510  
Fax. +385 - (0)47 - 843 - 579



**VELEUČILIŠTE U KARLOVCU**

Specijalistički studij: Specijalistički diplomski stručni studij sigurnosti i zaštite

Usmjerenje: Zaštita na radu      Karlovac, 09./2017.

**ZADATAK ZAVRŠNOG RADA**

Student: Magdalena Lukanec      Matični broj: 0420415008

Naslov: Nastanak i osnovne karakteristike izmjenične struje

Opis zadatka:

U diplomskom radu govorit će se o nastanku izmjenične struje kao i o njezinoj primjeni. Pojasnit će se pojam elektromagnetske indukcije, transformatora, elektromagnetskog polja.

Zadatak zadan:                      Rok predaje:                      Predviđeni datum obrane:  
02./2017.                              09./2017.                              09./2017.

Mentor:  
Lulić Slaven, dipl. ing.

Predsjednik Ispitnog povjerenstva:  
Štedul Ivan, prof.

## **PREDGOVOR**

Izjavljujem da sam ovaj diplomski rad s naslovom „*Nastanak i osnovne karakteristike izmjenične struje*“ izradila samostalno koristeći se literaturom koja je navedena na kraju diplomskog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući navela u diplomskom radu na standardan sam način citirala i povezala s fusnotama.

Zahvaljujem se svojem mentoru, profesoru Slavenu Luliću na korisnim savjetima i usmjeravanju pri izradi rada, te svim profesorima i asistentima sa Veleučilišta u Karlovcu na suradnji, ugodnom boravku i stečenim znanjima. Posebno bih se zahvalila svojoj obitelji koja mi je pružila veliku podršku i strpljenje tijekom cjelokupnog mog studiranja i veliko hvala svim prijateljima i kolegama na pomoći i savjetima tijekom studiranja.

Magdalena Lukanec

## SAŽETAK

Tema ovo diplomskog rada je *Nastanak i osnovne karakteristike izmjenične struje*. U radu je detaljno opisana pojava elektromagnetske indukcije, njezina formula te pravila koja se na tu pojavu nadovezuju kao što su pravilo desne ruke, Lenzovo pravilo i Faradayev zakon elektromagnetske indukcije. Osim navedenoga, veliki dio rada govori o izmjeničnim strujama. Na konkretnim primjerima prikazana su objašnjenja o različitim vrstama otpora, spojevima u strujnim krugovima s izmjeničnom strujom, impedanciji, admitanciji i reaktanciji i ostalim veličinama i vrijednostima u takvoj vrsti strujnog kruga. Opisan je i uređaj za prijenos izmjenične struje koji se naziva transformator te je objašnjen pojam trofazne izmjenične struje.

Ključne riječi:

električna struja, elektromagnetska indukcija, elektromotorna sila, magnetizam, samoindukcija, reaktancija, impedancija, admitancija, induktivni otpor, kapacitivni otpor, napon, transformator, trofazna izmjenična struja



## **SUMMARY**

The theme of this graduate thesis is *The origin and basic characteristic of the alternating current*. The electromagnetic induction phenomenon, its formula and the rules that complement this phenomenon, such as the rule of the right hand, the Lenz rule and Faraday's electromagnetic induction, are described in detail. Apart from the above mentioned, much of the work is about alternating currents. Specific examples illustrate different resistance types, AC circuits, alternating current, impedance, admittance and reactance, and other sizes and values in such a circuit type. Also describes a device for the transmission of alternating current who is called transformer, and explain the three-phase alternating current.

Key words:

electrical current, electromagnetic induction, electromotive force, magnetism, self-induction, reactance, impedance, admittance, inductive resistance, capacitance resistance, voltage, transformer, three-phase alternating current

# SADRŽAJ

ZADATAK ZAVRŠNOG RADA.....	I
PREDGOVOR.....	II
SAŽETAK.....	III
SUMMARY .....	IV
SADRŽAJ.....	V
1. UVOD.....	1
2. ELEKTROMAGNETIZAM KROZ POVIJEST.....	2
2.1. Magnetizam .....	2
2.2. Elektromagnetizam.....	3
3. ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA U VODIČU KOJI SE GIBA U MAGNETSKOM POLJU .....	5
3.1. Pravilo desne ruke .....	7
4. FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE.....	9
5. LENZOVO PRAVILO .....	11
6. INDUCIRANA ELEKTROMOTORNA SILA U ROTIRAJUĆOJ PETLJI.....	13
7. SAMOINDUKCIJA .....	15
8. STRUJA U KRUGU SA ZAVOJNICOM .....	17
8.1. Elektromagnetska energija pohranjena u zavojnici - energija magnetskog polja ....	19
8.2. Zavojnice u seriji - ekvivalentna induktivnost .....	20
9. IZMJENIČNE STRUJE .....	23
9.1. Strujni krug izmjenične struje .....	23
9.1.1. Strujni krug s otporom i induktivnosti - induktivna reaktancija.....	24
9.1.2. Strujni krug s otporom i kapacitetom - kapacitivna reaktancija.....	27
9.1.3. Opći slučaj RLC - kruga - impedancija.....	30
9.2. Reaktancija, impedancija i rezonancija .....	31

9.3. Efektivna vrijednost jakosti i napona sinusoidalne struje .....	33
9.4. Razlika potencijala između točaka u krugu s izmjeničnom strujom .....	35
9.5. Prikaz jakosti i napona izmjenične struje u kompleksnoj ravnini .....	37
9.5.1. Admitancija .....	41
9.6. Strujni krug s paralelno spojenim elementima .....	42
10. SNAGA I RAD IZMJENIČNE STRUJE.....	45
11. TRANSFORMATOR.....	50
12. TROFAZNE IZMJENIČNE STRUJE .....	53
13. ZAKLJUČAK.....	55
14. LITERATURA .....	57
15. POPIS PRILOGA .....	58
15.1. Popis slika.....	58
15.2. Popis tablica.....	59

## 1. UVOD

Predmet i cilj diplomskog rada je opisati otkriće i pojavu elektromagnetske indukcije i izmjenične električne struje kao nešto što zapravo susrećemo svakodnevno te upoznavanje čitatelja sa pojmovnim određenjima koja su bitna za razumijevanje pojave elektromagnetske indukcije ili neke druge pojave u strujnom krugu izmjenične struje kao što je otpor, admitancija, impedancija i slično. Svrha rada je upoznati čitatelja sa svim bitnim pojmovima vezanim uz električnu struju te ga na temelju rada potaknuti na moguće daljnje istraživanje.

Rad je podijeljen u trinaest poglavlja. Prvo poglavlje je uvod u kojem se objašnjavaju i izlažu podaci o predmetu i cilju rada te samoj strukturi rada. Drugo poglavlje govori o povijesnim otkrićima koja su vezana uz elektricitet, magnetizam i na kraju elektromagnetizam. Treće poglavlje pojašnjava sam pojam elektromagnetske indukcije te prikazuje kako se uz pomoć pravila desne ruke može odrediti smjer elektromotorne sile tj. inducirane struje. U četvrtom poglavlju je detaljnije analiziran Faradayev zakon elektromagnetske indukcije, dok peto poglavlje analizira Lezovo pravilo. Šesto se poglavlje osvrće na induciranu elektromotornu silu u rotirajućoj petlji. Sedmo poglavlje pojašnjava pojam samoindukcije, a osmo je poglavlje orijentirano na struju u strujnom krugu gdje postoji i zavojnica, pa govori o energiji magnetskog polja i ekvivalentnoj induktivnosti. Deveto je poglavlje podijeljeno na nekoliko manjih cjelina. Prvi dio govori o strujnom krugu izmjenične struje, induktivnom i kapacitivnom otporu te impedanciji. Osim toga, deveto poglavlje opisuje reaktanciju, rezonanciju, efektivnu vrijednost jakosti i napona izmjenične struje, razliku potencijala među točkama koje se nalaze u nekom strujnom krugu izmjenične struje, admitanciju i paralelno spojene elemente u strujnom krugu. Deseto poglavlje definira i prikazuje pojmove snage i rada izmjenične struje. U jedanaestom poglavlju opisan je transformator, a dvanaesto poglavlje detaljnije pojašnjava pojam trofazne izmjenične struje. Cijeli rad završava sa zaključkom gdje su izneseni svi bitni podatci koji su prikupljeni i izneseni u radu. Sva korištena literatura navedena je u popisu literature, dok su sve korištene slike i tablice navedene u popisu priloga.

## **2. ELEKTROMAGNETIZAM KROZ POVIJEST**

Povijest elektromagnetizma kreće od oko 400.-te godine prije nove ere kad su Grci otkrili statički elektricitet. Pronašli su ga na osnovu toga što je s komadom krpe, protrljani komad jantara privlačio komadiće slame. Daleko kasnije, oko 1729. godine, Englez Stephen Gray dodirnuo je elektrizirana tijela metalnim komadićima i ustanovio da ti komadići također postaju električni. Time se došlo do zaključka da elektricitet prelazi na neelektrična tijela. Nakon toga, Du Fay je otkrio kako se dva elektrizirana komadića smole odbijaju kao i dva staklena štapa, a nakon što se trenjem elektriziraju, i smola i staklo se privlače. Velik iskorak u istraživanju elektriciteta napravio je profesor anatomije Luigi Galvani (1739. - 1798.) koji je otkrio sasvim nove izvore elektriciteta. Prema nekim povjesničarima, to veliko otkriće nije napravio on već njegova žena. Kad je jednog dana pripremala ručak, žablji kraci koji su bili napola oguljeni nalazili su se na pladnju i slučajnim dodirom noža na krakove oni su se trgali, kao da su živi. Tada je Galvani shvatio da je pronašao životinjski elektricitet, izvor životne snage. Alessandro Volta (1745. - 1827.) je počeo proučavati Galvanijevo otkriće i shvatio da Galvani zapravo nije uočio ono najvažnije, a to je da su se žablji kraci počeli trgati kad su se našli između noža i metalnog pladnja. Nakon toga je Volta uronio cinkovu i bakrenu ploču u vodu u kojoj je bila sumporna kiselina. Kad je žicom spojio krajeve bakrene i cinkove ploče koje su virile iz kiseline, žicom je potekla električna struja. Od tada su se električne pojave mogle lako proučavati.

### **2.1. Magnetizam**

Narod koji je prvi otkrio magnetske pojave bili su Stari Grci. Magnet je otkrio pastir Magnes kad je jednog dana sa sandalama na kojima je imao željezne čavle prolazio planinom Idom. U jednom trenutku nešto je snažno privuklo Magnesove noge ka zemlji, a na zemlji nije bilo ništa drugo osim kamena. Tada je shvatio da taj kamen, magnetit odnosno magnetska ruda, privlači čavle s njegovih sandala. Tales iz Mileta pokušao je takvo djelovanje magneta rastumačiti mističnim silama. Govorio je da magnet ima neku „dušu“ koja privlači željezo. Proučavanjem magneta, Grci su otkrili i da se magnetska moć prenosi i na drugo, nemagnetično željezo. Zanimanje za magnetske pojave ponovno je oživjela uporaba kompasa u pomorstvu u Srednjem vijeku. Upotrebom kompasa nastale su jasnije predodžbe o zemaljskom magnetizmu i djelovanju magneta. Petrus Peregrinus u potpunosti se posvetio istraživanju magneta. Spoznao je i da su dijelovi magneta opet potpuni magneti tj. raspolovimo li magnet na dva dijela, neće jedan dio nositi samo

sjeverni pol, a drugi samo južni pol, već će svaka polovica imati svoj sjeverni i južni pol. Istraživajući magnetizam, William Gilbert ponovio je stare eksperimente o magnetizmu. Cilj njegova ispitivanja bio je spoznati povećava li se težina željeznih igala magnetiziranjem. Istraživanjima je spoznao da to nije tako. Njegova ispitivanja sadržavale su metode koje su se početkom novog doba razvile u mehanici. Nakon njega, karakteristična oznaka pravog fizičara postaje nastojanje da satovima, metrima i vagom utvrdi različite odnose u vanjskom svijetu i zbog toga je bio smatran jednim od utemeljitelja eksperimentalnog istraživanja. Gilbert je otkrio osnovnu razliku između električnih i magnetskih tijela. Otkrio je da magnetska sila izlazi samo iz polova dok električna tijela privlače sitne papiriće na svakoj točki svoje površine. Osim toga, veoma važna su bila i njegova istraživanja o zemaljskom magnetizmu kad je spoznao da je sama Zemlja jedan ogromni magnet. Njezin magnetski pol smješten je na sjeveru i privlači magnetsku iglu.

## **2.2. Elektromagnetizam**

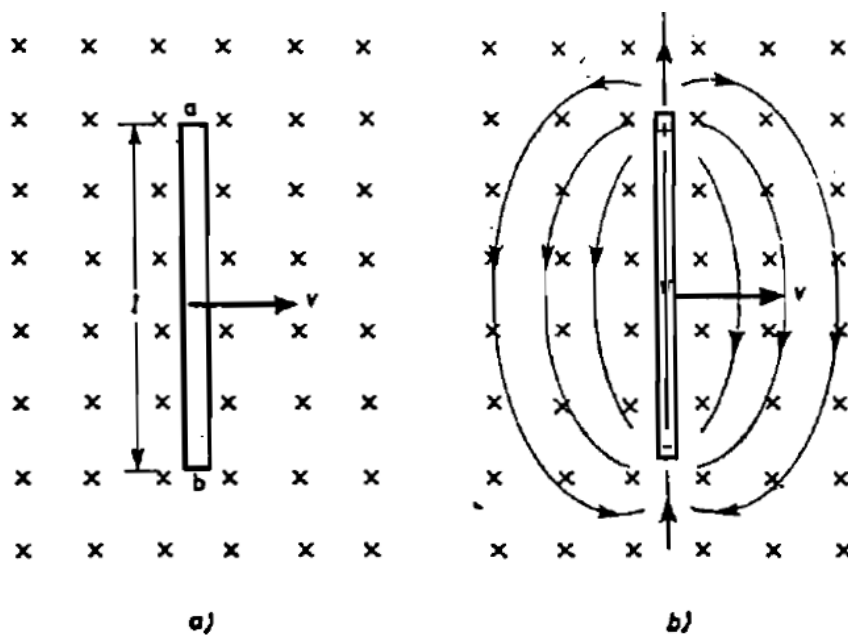
Otkrićem elektriciteta kao fenomena, pružila se mogućnost za nova eksperimentiranja od kojih se velik broj desio neočekivano tj. sasvim slučajno. 1819. godine danski fizičar Hans Christian Oersted izvodio je jedan eksperiment s električnom strujom kroz metalnu žicu i tada se u blizini, sasvim slučajno, nalazio kompas. Oersted se začudio kad je shvatio da magnetna igla na kompasu reagira svaki put kad se struja uključi. Tada je uočio jasnu vezu između otklona igle i pravca struje kao i razmaka između žice i kompasa. Oersted se nije zaustavio na ovim otkrićima već je nastavio s eksperimentiranjem. Otkrio je da magnet također djeluje na žicu za vrijeme protoka struje. Poslije toga je zaključio da se kod njegovog eksperimenta radi o nepoznatoj magnetskoj sili koju uzrokuje električna struja. Ovaj eksperiment smatra se vrlo važnim za povijest jer do tada nitko nije postavio vezu između elektriciteta i magnetizma. Francuski fizičar André Marie Ampere (1775. - 1863.) bio je fasciniran elektromagnetizmom. Nastavio je proučavati Oerstedova otkrića i postavio hipotezu da se magnetne pojave mogu svesti na električne. Da bi to i dokazao izvodio je mnoge eksperimente i na kraju otkriva da se vodiči kroz koje protječu dvije istosmjerne struje privlače, dok se isti odbijaju prilikom prolaska struje suprotnog smjera.

Michael Faraday bio je najveći eksperimentalni fizičar 19. stoljeća, podrijetlom iz Engleske. On je nastavio istraživanje problema kojima se bavio Ampere, a to je promatranje dvaju vodiča od kojih jednim teče struja koja bi trebala djelovati na drugi

vodič kojim ne protječe električna struja. Ampere u tom pokušaju nije uspio te je u jednom pismu napisao da takav učinak zapravo ne postoji, ali da se pri uključivanju i isključivanju struje u prvoj žici može primijetiti nešto u drugoj žici. Nakon proučavanja dotadašnjih otkrića Oersteda i Ampera, Faraday je bio duboko uvjeren u jedinstvenu prirodu električnih i magnetskih pojava na osnovu dotadašnjih saznanja. Zbog toga je smatrao da mora postojati i obrnuta pojava u kojoj magnetsko polje stvara struju u vodiču. Prilikom jednog eksperimenta u kojem je na jedan drveni cilindar postavio dva posebna namotaja bakrene žice, jedan preko drugoga, od kojih je jedan povezo baterijom, dok je drugi povezo s galvanometrom, shvatio je da se kod uključivanja i isključivanja baterije na galvanometru pojavio kratki prekid uz mali očevadni rezultat. Tada se Faraday susreo s principom indukcije i na taj način dokazao da se u zavojnici inducira struja kada joj se približava ili udaljava druga zavojnica kroz koju protječe struja. U istoj toj, slavnoj 1831. godini napravio je i malu zavojnicu koju je okretao u polju permanentnog magneta i tom prilikom je uočio da se u zavojnici inducira naizmjenični napon. U tadašnje vrijeme znanstvenici su smatrali da se djelovanje nekog tijela prenosi trenutno i da pri tome prostor između ta dva tijela ne igra apsolutno nikakvu ulogu. Na temelju tog shvaćanja nastala je i teorija djelovanja na daljinu koju su prihvatili mnogi znanstvenici, no ne i Faraday. On je smatrao da oko vodiča kroz koji protječe struja, kao i oko magneta, postoji posebno elektroničko stanje. U vrijeme kada se vodič ili magnet pomaknu, po njemu se to stanje mijenja i nastaje stanje induktivne struje. Kako bi to stanje i znanstveno prikazao uvodi pojam linija sile kao nečega što, po njemu, realno postoji. Kasnije je dokazano da takve realne linije sile zapravo ne postoje, ali se taj pojam i danas koristi za očigledno prikazivanje polja. Faraday je bio izuzetno dobar znanstvenik s mnogo različitih ideja koje nažalost, i pokraj njegovog velikog znanstvenog autoriteta što je tada uživao zbog otkrića elektromagnetske indukcije, zakona elektrolize, dijamagnetizma, nisu prihvaćene zbog toga što nisu imale matematičku formulaciju.

### 3. ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA U VODIČU KOJI SE GIBA U MAGNETSKOM POLJU

Pojava kod koje se u vodiču pobuđuje ili inducira elektromotorna sila ako isti vodič siječemo magnetskim silnicama naziva se elektromagnetska indukcija. Kao primjer za objašnjenje poslužit će slika broj 1 na kojoj je prikazan vodič dužine  $l$  u homogenom magnetskom polju okomitom na ravninu papira i usmjerenom od čitatelja. Pomakne li se vodič na desnu stranu nekom brzinom  $v$ , kojoj je smjer okomit i na vodič i na smjer djelovanja magnetskog polja, tada na svaki naboj u vodiču djeluje sila  $F = Q B v$  koja je usmjerena uzduž vodiča. Smjer djelovanja te sile na negativne naboje je od  $a$  prema  $b$ , a na pozitivne naboje od  $b$  prema  $a$ . Na naboje u vodiču djeluju iste sile koje bi djelovale i da se vodič nalazi u homogenom električnom polju jakosti  $Bv$  usmjerenom od  $b$  prema  $a$ . Iz tog razloga će se slobodni elektroni koji se nalaze u vodiču gibati u smjeru od  $a$  prema  $b$  sve do trenutka dok nagomilavanjem na jednom kraju odbojna sila ne kompenzira djelovanje vanjskog polja. U slučaju koji je prikazan na slici, gornji će dio vodiča postati pozitivno, a donji dio negativno nabijen.

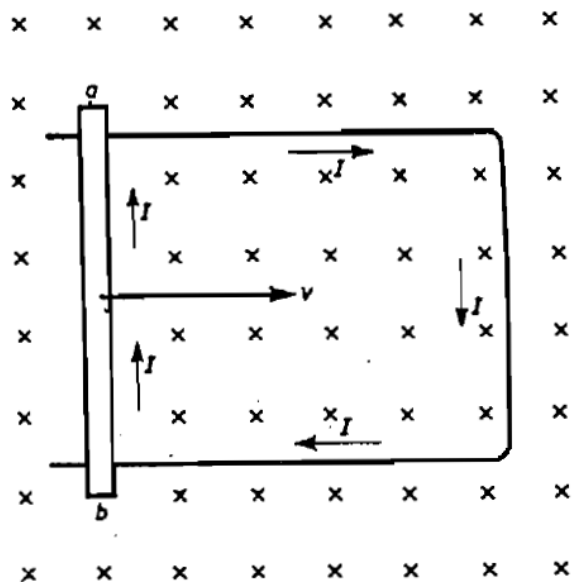


Slika 1. Gibanje vodiča u homogenom magnetskom polju

U primjeru koji je prikazan na slici broj 2, vodič  $ab$  giba se duž kovne žice koja ima oblik zatvorenog slova  $U$ . Magnetsko polje ne djeluje na naboje na žici nego samo na naboje u dijelu  $ab$  koji se giba. Sila kojom to polje djeluje na naboje tjera višak slobodnih elektrona u donji dio vodiča, odakle oni odlaze u žicu. Na taj se način uspostavlja električna struja



čiji je smjer na slici prikazan strelicama i ona će teći sve dok se vodič giba u magnetskom polju. Gibanje vodiča je ekvivalentno postojanju izvora elektromotorne sile koju nazivamo induciranom elektromotornom silom, a struju koja teče vodičem induciranom strujom.



**Slika 2.** Inducirana struja u vodiču koji se giba u magnetskom polju

Elektromotorna sila jednaka je omjeru rada koji vanjske sile izvrše da pomaknu električni naboj i količine naboja koji prođe danom točkom vodiča. U krugu prikazanom na slici struja je označena s  $I$ , a na dio vodiča koji se giba djeluje sila  $F = BIl$ , za koju se iz smjera struje  $I$ , te smjera magnetskog polja vidi da djeluje ulijevo tj. suprotno smjeru gibanja vodiča  $ab$ . Zbog toga vanjske sile moraju utrošiti radnju za gibanje vodiča  $ab$  i taj je rad izvor inducirane elektromotorne sile.

Sila na vodič u gibanju iznosi  $F = BIl$  dok je put koji vodič prijeđe  $ds = v dt$ . Po tome ispada je izvršena radnja  $dW = F ds = Bl v l dt$ . Za vrijeme  $dt$  pomaknut je naboj  $dQ = I dt$  te je zbog toga  $dW = Blv dQ$ .

Prema svemu tome, elektromotorna sila  $\frac{dW}{dQ}$  jednaka je

$$\varepsilon = B l v. \quad (1)$$

Mjerna jedinica za elektromotornu silu je volt zbog toga što je magnetska indukcija izražena u  $\frac{Wb}{m^2}$ , duljina vodiča u metrima, a njegova brzina u m/s.

### 3.1. Pravilo desne ruke

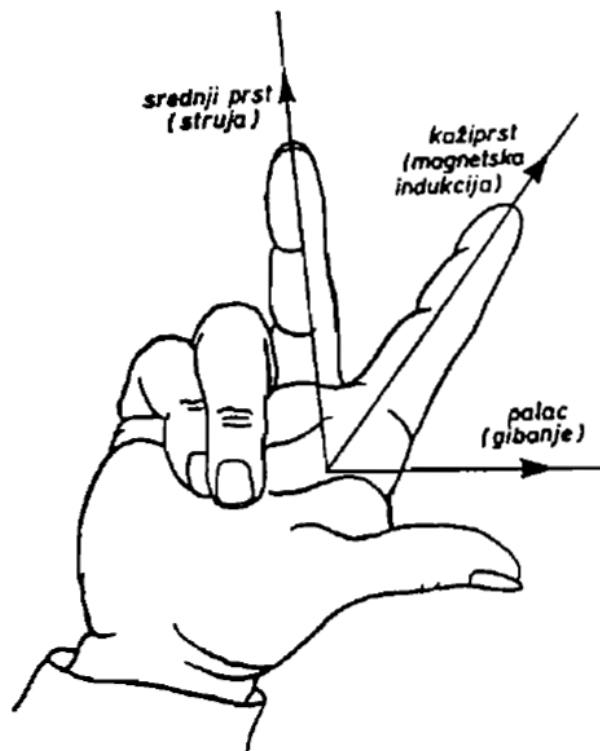
Ako je vodič u kojem se inducira elektromotorna sila dio zatvorenog strujnog kruga, kroz njega će poteći struja. Struja koja je pobuđena elektromagnetskom indukcijom zove se inducirana struja, a njezin se smjer određuje pomoću pravila desne ruke. Pravilo desne ruke povezano je sa smjerom djelovanja magnetske indukcije, gibanjem vodiča te induciranom elektromotornom silom. Kada usmjerimo palac desne ruke u smjeru gibanja vodiča i kažiprst u smjeru magnetske indukcije, tada nam srednji prst pokazuje smjer inducirane elektromotorne sile, odnosno inducirane struje. To pravilo posljedica je činjenice da je opći izraz za induciranu elektromotornu silu dan formulom

$$d\varepsilon = (\vec{B} \cdot d\vec{l}) \cdot \vec{v} \quad (2)$$

odnosno

$$d\varepsilon = Bv dl \sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad (3)$$

gdje  $dl$  predstavlja element vodiča koji se giba brzinom  $v$  u polju magnetske indukcije  $B$ ,  $\theta$  je kut između  $B$  i  $dl$ , a  $\varphi$  kut između  $v$  i okomice na ravninu određenu s  $B$  i  $dl$ .

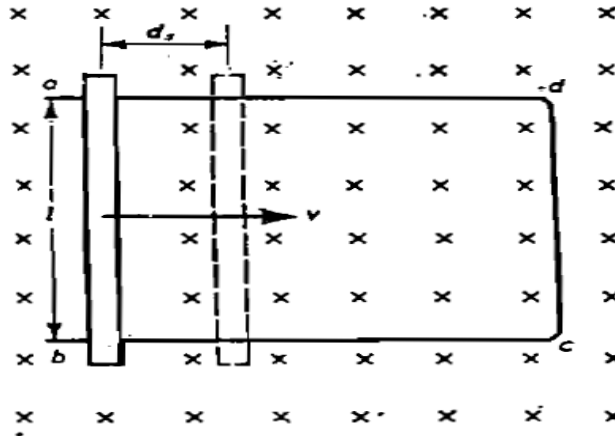


**Slika 3.** Pravilo desne ruke za smjer inducirane struje

Vektorski oblik zakona indukcije govori da se struja u vodiču koji se giba kroz magnetsko polje može inducirati samo ako vodič siječe silnice magnetskog polja. To znači da vodič ne smije biti postavljen paralelno silnicama magnetskog polja jer kut  $\theta$  mora biti različit od nule, a gibanje vodiča ne smije se odvijati u ravnini koju određuju silnice magnetskog polja i uzdužna dimenzija vodiča tj. kut  $\varphi$  mora biti različit od  $\pi/2$ .

#### 4. FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE

Faradayev zakon elektromagnetske indukcije je osnovni zakon elektromagnetizma prema kojemu se na krajevima zatvorene vodljive petlje, kroz koju prolazi promjenjivi magnetski tok, inducira elektromotorni napon koji je razmjern brzini promjene toka. Pomoću konkretnog primjera sa slike u ovom će poglavlju biti izvedena i formula za Faradayev zakon elektromagnetske indukcije



Slika 4. Promjena toka kod gibanja vodiča kroz magnetsko polje

Na prikazanoj slici broj 4 može se uočiti da vodič  $ab$  u vremenu  $dt$  presiječe površinu  $dS = l ds$ , gdje  $ds$  predstavlja pomak vodiča. Promjena toka magnetske indukcije kroz petlju  $abcd$  izazvana tim pomakom jednaka je

$$d\Phi = -BdS = -Blds.$$

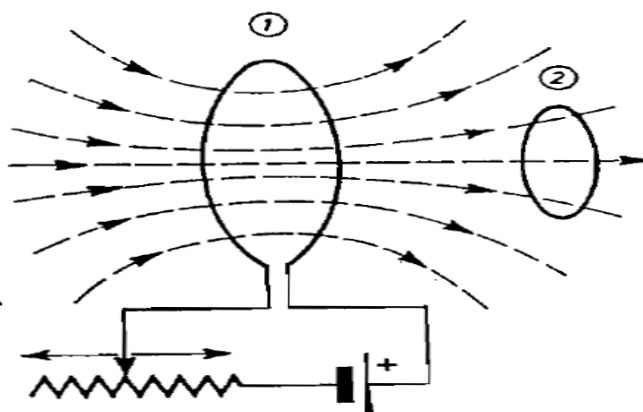
Promjena toka je negativna iz razloga što se tok kroz petlju smanjio. Brzina promjene toka iznosi

$$\frac{d\Phi}{dt} = -Bl \frac{ds}{dt} = -Blv.$$

Iz toga možemo uočiti da je  $Blv$  inducirana elektromotorna sila  $\varepsilon$ . Na temelju toga vrijedi da je inducirana elektromotorna sila u krugu numerički jednaka negativnoj brzini promjene toka kroz krug.

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4)$$

Dani izraz zapravo ukazuje ono što je najvažnije kod indukcije elektromotorne sile u krugu, a to je promjena toka magnetskog polja. Magnetsko polje sadržava određenu energiju, a inducirana elektromotorna sila je zapravo posljedica pretvaranja energije magnetskog polja u energiju električnog polja. Zaključak je da nije gibanje vodiča najvažnije kod induciranja elektromotorne sile, već je to promjena toka izazvana tim gibanjem.



**Slika 5.** Promjena struje u petlji 1 uzrokuje promjenu toka magnetske indukcije u petlji 2, u kojoj se inducira elektromotorna sila

Na slici broj 5 prikazane su dvije petlje. Kroz petlju broj 1 prolazi struja čija se jakost može mijenjati potenciometrom. Time ujedno dolazi i do promjene polja magnetske indukcije koje ta petlja stvara oko sebe i toka polja magnetske indukcije kroz petlju broj 2. Petlja broj 2 se ne giba kroz polje, ali se u njoj inducira elektromotorna sila  $\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$ . Smanji li se struja kroz petlju broj 1, smanjuje se i magnetsko polje oko nje što znači da energija toga polja nije nestala nego se pretvorila u energiju ekvivalentnog električnog polja koje uzrokuje pomak naboja po vodiču. S obzirom da je tok polja magnetske indukcije  $B$  kroz danu površinu definiran izrazom

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B \cdot \cos \varphi dS,$$

gdje  $\varphi$  predstavlja kut između smjera indukcije  $B$  i okomice na element površine  $dS$ , to se kao izraz za elektromotornu silu može napisati u obliku

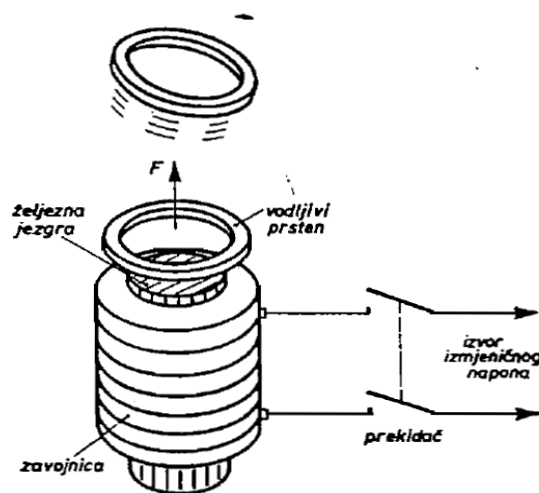
$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int \frac{d(B \cos \varphi)}{dt} \cdot dS. \quad (5)$$

Takav izraz je u fizici poznat kao Faradayev zakon elektromagnetske indukcije.

## 5. LENZOVO PRAVILO

Heinrich Lenz bio je njemački fizičar koji je radio u carskoj Rusiji i upravo je on pronašao pravilo za određivanje smjera inducirane elektromotorne sile. Inducirana električna struja u nekoj petlji ima takav smjer, da proizvodi magnetsko polje koje se suprotstavlja promjeni magnetskog toka kroz plohu zatvorenu tom petljom ili, jednostavnije rečeno, inducirana elektromotorna sila uvijek ima smjer suprotan uzroku koji ju je stvorio. Ako je inducirana elektromotorna sila nastala zbog gibanja vodiča, ona će u tom vodiču dati struju takvog smjera da će sila vanjskog polja na vodič djelovati u smjeru suprotnom gibanju vodiča. Ako je vodič bio u stanju mirovanja, a do inducirane elektromotorne sile je došlo zbog promjene toka magnetskog polja, onda će nastala elektromotorna sila nastojati spriječiti tu promjenu, tj. ako se tok kroz petlju smanjivao, inducirana struja u petlji će biti takvog smjera da uzrokuje dodatni tok kroz petlju i obratno. Najjednostavnije rečeno, prema Lenzovom pravilu, inducirana struja ima uvijek takav smjer da svojim magnetskim poljem nastoji spriječiti promjene koje ju izazivaju.

Lenzovo pravilo je zapravo posljedica zakona o održanju energije. Inducirana elektromotorna sila nastaje transformacijom različitih oblika energija, kao npr. energija magnetskog polja u energiju električnog polja. Iz toga se može zaključiti da je električnom polju potrebno dovoditi energiju što činimo djelovanjem mehaničkih sila kao što je gibanje vodiča ili promjenom magnetskog toka. Inducirana struja nosi energiju koju uzima od svoga uzroka i sposobna je obavljati radnje, te zbog toga ima smjer koji se protivi uzroku nastajanja inducirane struje.

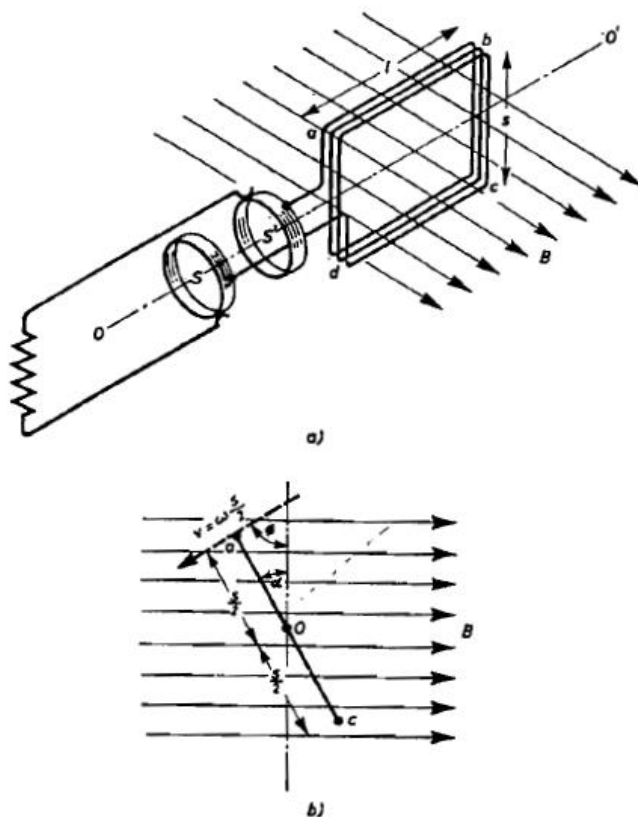


**Slika 6.** Elektromagnet kojim teče promjenjiva struja odbija prsten izrađen od vodljivog materijala

Pokus na slici broj 6 daje vrlo jasnu demonstraciju Lenzova pravila. Aluminijski prsten se postavi na elektromagnet. Kada se elektromagnet spoji s izvorom izmjenične struje, prsten odskoči s njega. Sila koja podigne prsten dolazi od struja koje promjenjivo magnetsko polje u njemu inducira, a odskakanje prstena pokazuje da se struje koje u njemu nastaju suprotstavljaju uzroku koji ih je stvorio. Kada je struja u elektromagnetu takva da je npr. sjeverni pol na gornjoj strani kao na slici, inducirane struje stvaraju sjeverni pol na donjem dijelu prstena. Iz ovog se pokusa lako može uočiti da odbijanje stvarno nastaje zbog struje inducirane u prstenu jer ukoliko se prsten prereže, elektromagnet ga više neće odbijati.

## 6. INDUCIRANA ELEKTROMOTORNA SILA U ROTIRAJUĆOJ PETLJI

Mehaničku energiju možemo najlakše pretvoriti u električnu uz pomoć rotirajućeg sistema. Princip rada takvog rotirajućeg sistema prikazan je na slici broj 7. „Gusto namotani četvrtasti svitak  $abcd$ , koji se sastoji od  $N$  zavoja, okreće se oko osi  $OO'$ , okomitoj na homogeno magnetsko polje indukcije  $B$ . Krajevi svitka povezani su prstenovima  $S$  i  $S'$ , koncentričnim s osi svitka. Prstenovi se okreću zajedno sa svitkom, no oni su međusobno izolirani, dok četkice koje dotiču prstenove stvaraju električni kontakt s vanjskim krugom.“<sup>1</sup>



**Slika 7.** Princip rada rotacijskog generatora elektromotorne sile

Elektromotorna sila inducirana u svitku promjenom magnetskog toka u njemu, može se izračunati na slijedeći način. „Neka u određenom trenutku ravnina svitka zatvara kut  $\alpha$  s okomicom na smjer magnetske indukcije  $B$ . Tada je tok kroz svitak  $\Phi = N S B \cos \alpha$ , gdje je  $S$  površina koju zatvara svaki od ukupno  $N$  zavoja u svitku. Brzina promjena toka u rotirajućem svitku je

<sup>1</sup> CINDRO N.: Fizika 2, Elektricitet i magnetizam, 2. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1988.



$$\frac{d\Phi}{dt} = -N S B \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

$\frac{d\alpha}{dt}$  je kutna brzina rotacije  $\omega$ . To znači da je u svitku inducirana elektromotorna sila (N zavoja)

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = N S B \omega \sin \alpha. \quad {}^{2}$$
 (6)

Prema navedenom je vidljivo da je elektromotorna sila u svitku najveća kada je ravnina svitka paralelna smjeru polja jer se tada strane svitka gibaju okomito na polje i promjena toka je najveća. Označimo li s  $\varepsilon_{max} = N S B \omega$  najveću trenutnu vrijednost elektromotorne sile, izraz  $\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = N S B \omega \sin \alpha$  mijenja se u

$$\varepsilon (t) = \varepsilon_{max} \cdot \sin \alpha.$$

Ukoliko svitak rotira jednolikom kutnom, možemo pisati  $\alpha = \omega t$ , odnosno  $\alpha = 2\pi vt$ ; odatle

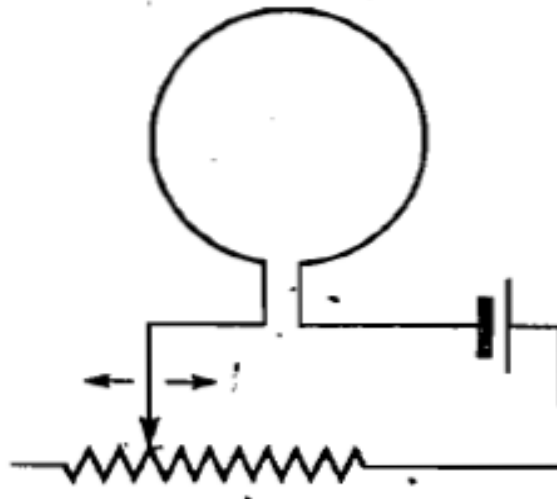
$$\varepsilon (t) = \varepsilon_{max} \cdot \sin \omega t = \varepsilon_{max} \sin 2\pi vt. \quad (7)$$

---

<sup>2</sup> CINDRO N.: Fizika 2, Elektricitet i magnetizam, 2. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

## 7. SAMOINDUKCIJA

Samoindukcija je pojava koja nastaje kada promjenjiva struja svojim promjenjivim magnetskim poljem stvara induciranu struju. Kada kroz vodič teče struja oko njega se stvara magnetsko polje. Promjenljiva struja stvara magnetsko polje čiji intenzitet magnetske indukcije varira, što znači da se mijenja i tok struje. Promjena toka, prema Faradayevom zakonu označava i stvaranje inducirane elektromotorne sile, odnosno inducirane struje. Smjer inducirane struje određuje se pomoću Lenzovog pravila. Prema istom, inducirana struja ima takav smjer da se protivi uzroku svog nastanka, odnosno promjeni toka. Povećanje struje označava povećanje toka koje inducirana struja nastoji smanjiti, pa je tada smjer inducirane struje suprotan od smjera proticanja nominalne struje. Pri smanjenju vrijednosti nominalne struje, odnosno struje izvora, tok se smanjuje, inducirana struja ga nastoji povećati, pa je tada smjer inducirane struje isti kao i nominalne. Iz toga je vidljivo da se inducirana elektromotorna sila suprotstavlja promjeni struje u krugu, a ne samoj struji. Samoindukcija ima za posljedicu činjenicu da struja u krugu ne dostiže odmah vrijednost predviđenu Ohmovim zakonom, već to čini nakon određenog vremena, koje je relativno kratko. Isto tako pri otvaranju prekidača u strujnom krugu, odnosno prekidom proticanja struje izvora kroz isto, u krugu će i dalje postojati struja nastala uslijed samoindukcije, ali samo određeno vrijeme.



**Slika 8.** Promjene toka kroz petlju kojom teče promjenjiva struja izazivaju samoindukciju u petlji

Pomičemo li klizaljku promjenjivog otpornika na slici broj 8, tok kroz petlju se mijenja iz razloga što se i jakost struje u njoj mijenja, pa se u samoj petlji inducira elektromotorna sila. Tu elektromotornu silu nazivamo samoinducirana elektromotorna sila, a samo pojavu

nazivamo samoindukcija. Samoinduciranu elektromotornu silu možemo izraziti pomoću promjene jakosti struje. Ulančeni tok u jednom krugu uvijek je proporcionalan jakosti struje kroz drugi krug, tj.

$$\Phi = K I,$$

gdje  $K$  predstavlja geometrijski faktor. Ako se krug sastoji od  $N$  zavoja i sav tok prolazi kroz svaki zavoj, inducirana elektromotorna sila tada će biti

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N K \frac{dI}{dt}.$$

Označi li se konstanta  $N K$  s  $L$  koje označava induktivnost kruga, tada vrijedi

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}. \quad (8)$$

Alternativni izraz za induktivnost kruga može se dobiti izjednačavanjem izraza za induciranu elektromotornu silu:

$$N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

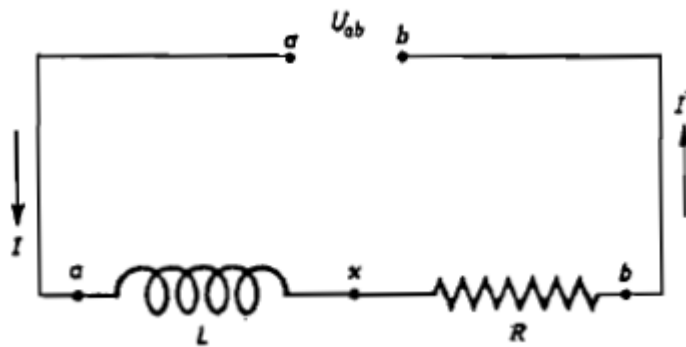
odakle se integriranjem dobiva  $N\Phi = LI + konst.$  S obzirom da je tok  $\Phi = 0$  kada je struja  $I = 0$ , i konstanta u gornjem izrazu ima vrijednost nula, pa vrijedi

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (9)$$

Induktivnost  $L$  kruga može se definirati kao ulančeni tok samoga kruga po jedinici jakosti struje. Induktivnost kruga je 1 henri ako struja od 1 ampera proizvede ulančeni tok od 1 veber - zavoja. Veličina induktivnosti nekog kruga ovisi o geometrijskim svojstvima tog kruga, odnosno rasporedu vodiča u njemu, kao i o materijalu koji ispunjava šupljinu unutar zavojnice.

## 8. STRUJA U KRUGU SA ZAVOJNICOM

Električna zavojnica je električni vodič koji se, stvarajući magnetsko polje, opire promjenama smjera i jakosti električne struje. U istosmjernoj mreži zavojnica predstavlja kratki spoj. Kroz nju teče struja koja je određena elementima u mreži. Prilikom priključivanja na naponski izvor struja postupno raste do svoje stacionarne vrijednosti. Zavojnica nastoji zadržati struju koja teče kroz nju, odnosno protivi se promjeni toka koji se zatvara kroz nju. Na slici broj 9 prikazan je strujni krug u kojem se nalaze otpornik  $R$  i zavojnica induktivnosti  $L$ . Izvor napona  $U_{ab}$  tjera struju kroz krug. Ukoliko uključimo izvor napona, jakost struje u krugu raste, a zavojnica djeluje kao izvor elektromotorne sile čiji je smjer suprotan smjeru struje izvora  $U_{ab}$ . Veličina nastale elektromotorne sile iznosi  $-L \frac{dI}{dt}$ .



**Slika 9.** Struja u krugu sa zavojnicom

Iz toga je vidljivo da kad se uključi izvor, struja u krugu neće odmah porasti do svoje maksimalne vrijednosti  $U_{ab}/R$ , već će vrijednost struje rasti brzinom koja ovisi o induktivnosti  $L$  zavojnice i veličini otpora  $R$ . Tijek porasta struje s vremenom se dobiva primjenom Kirchhoffova zakona.

$$U = \Sigma I R - \Sigma \mathcal{E}.$$

U formuli slovo  $R$  predstavlja neinduktivni tj. omski otpor, a  $\mathcal{E} = -\frac{LdI}{dt}$ . Na primjeru slike broj 9 vrijedi

$$U_{ab} = I R + L \frac{dI}{dt}, \quad (10)$$

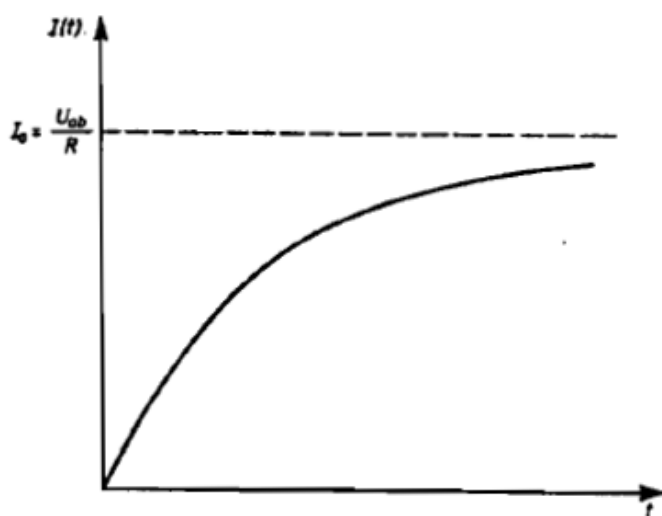
gdje je  $I$  struja koja teče krugom u nekom trenutku. Ukoliko se preuredi prethodna formula, dobiva se slijedeći izraz

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I - \frac{U_{ab}}{L} = 0. \quad (11)$$

Preuređeni izraz zapravo je diferencijalna jednačba prvog reda, čije je rješenje

$$I = \frac{U_{ab}}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right). \quad (12)$$

Iz rješenja jednačbe se može zaključiti da se struja u krugu s induktivnošću asimptotski približava konačnoj vrijednosti  $I_0 = \frac{U_{ab}}{R}$  po eksponencijalnoj krivulji  $\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$  te da tu vrijednost dosegne nakon beskonačno dugog vremena što je prikazano na slici broj 10.



**Slika 10.** Porast jakosti struje u krugu s induktivnosti i omskim otporom

Vremenskom konstantom kruga može se nazvati vrijeme za koje struja naraste do vrijednosti koja se za dio  $\frac{1}{e}$  razlikuje od konačne vrijednosti. Prema prethodnom izrazu tj. jednačbi može se vidjeti da je vremenska konstanta

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (13)$$

Ukoliko je vremenska konstanta kruga veća ( $L$  veći, a  $R$  manji), struja u krugu sporije raste, što znači da bi krivulja prikazana na slici broj 10 bila položenija. Vremenska promjena razlike potencijala na krajevima zavojnice  $U_{ax}$  dobije se pomoću

$$U_{ax} = \Sigma I R - \Sigma \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

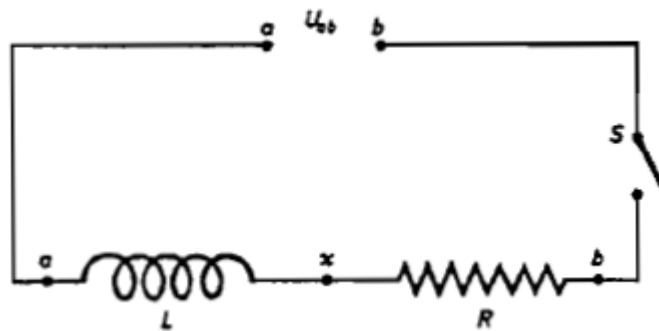
Izračuna li se  $\frac{dI}{dt}$  pomoću rješenja diferencijalne jednačbe prvog reda, slijedi da je

$$U_{ax} = U_{ab} e^{-\frac{Rt}{L}}. \quad (14)$$

U trenutku kada je izvor napona ukopčan ( $t = 0$ ) čitav se napon  $U_{ab}$  pojavi na krajevima zavojnice i nakon toga se eksponencijalno smanjuje.

### 8.1. Elektromagnetska energija pohranjena u zavojnici - energija magnetskog polja

U zavojnici u kojoj je formirano magnetsko polje, pohranjena je određena količina energije magnetskog polja. Energija magnetskog polja pohranjena u zavojnici jednaka je radu koji treba obaviti električni izvor na kojega je zavojnica priključena, za uspostavljanje magnetskog polja unutar zavojnice.



**Slika 11.** Mehanizam pohranjivanja elektromagnetske energije u zavojnici

Pohranjivanje elektromagnetske energije u zavojnici strujnog kruga u kojem postoji induktivnost detaljnije je pojašnjeno pomoću slike broj 11. Kada se uključi prekidač u strujnom krugu, struja raste dok ne dosegne konačnu vrijednost  $\frac{U_{ab}}{R}$ . Prema izrazu

$U_{ab} = I R + L \frac{dI}{dt}$  u svakom trenutku  $t$  vrijedi relacija između jakosti struje  $I$  i njene brzine porasta  $\frac{dI}{dt}$ :

$$U_{ab} = U_{ax} + U_{bx} = L \frac{dI}{dt} + R I.$$

Snaga električne struje u krugu iznosi

$$P = I U_{ab} = L I \frac{dI}{dt} + R I^2. \quad (15)$$

$RI^2$  je snaga koju troši omski otpor i prema tome je  $LI \frac{dI}{dt}$  snaga koju troši zavojnica. Vidljivo je da se energija pohranjuje u zavojnici za vrijeme dok struja u krugu raste. U trenutku kad jakost struje dosegne svoju krajnju vrijednost  $\frac{dI}{dt} = 0$ , dovod energije u zavojnicu prestaje.

Na sve ovo postavlja se pitanje na što se troši energija dovedena u zavojnicu. Poznato je da se u zavojnici koja se nalazi u strujnom krugu stvara magnetsko polje, a za uspostavljanje magnetskog polja u zavojnici i oko nje potrebna je energija. Iz toga možemo zaključiti da energija dovedena u zavojnicu postaje potencijalna energija magnetskog polja. Veličina te energije može se izračunati tako da se izraz za snagu električne struje u krugu koja ulazi u zavojnicu, integrira po vremenu za koje se energija pohranjuje u zavojnici, odnosno za vrijeme za koje struja dosegne svoju konačnu vrijednost  $I_0 = \frac{U_{ab}}{R}$ .

$$P = \frac{dW}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

$$dW = LI dI$$

$$W = \int dW = \int_0^{I_0} LI dI$$

$$W = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (16)$$

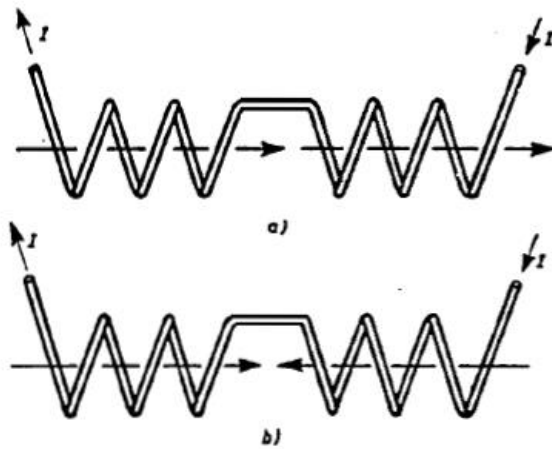
Dani izraz predstavlja elektromagnetsku energiju pohranjenu u zavojnici kojom teče struja  $I$ , a ujedno je to i izraz za potencijalnu energiju magnetskog polja u zavojnici.

## 8.2. Zavojnice u seriji - ekvivalentna induktivnost

Postoji nekoliko načina na koji se mogu spojiti zavojnice, a u strujnom krugu ih se često nalazi u serijskom ili paralelnom spoju. Da bi se izračunala jakost struje i njezin vremenski tok u takvoj vrsti strujnog kruga potrebna je ekvivalentna induktivnost mreže zavojnica. Ekvivalentna induktivnost može se definirati kao omjer ukupne inducirane elektromotorne sile između krajeva mreže i brzine promjene struje koja taj inducirani napon uzrokuje.

$$\text{ekvivalentna induktivnost} = \frac{\text{ems samoindukcije} + \text{ems međuintukcije}}{\text{brzina promjene struje}} \quad (17)$$

Kao primjer za izračun ekvivalentne induktivnosti za dvije serijski spojene zavojnice induktivnosti  $L_1$  i  $L_2$ , čija je međui induktivnost  $M$ , poslužit će slika broj 12.



**Slika 12.** Ekvivalentna induktivnost dviju serijski spojenih zavojnica: a) magnetski tokovi u istom smjeru, b) u suprotnom smjeru

U prvom slučaju je magnetski tok u svakoj zavojnici uzrokovan strujom u drugoj zavojnici, istog smjera kao i tok uzrokovan strujom u samoj zavojnici. Tada se, ako se struja mijenja, elektromotorne sile u zavojnici uzrokovane samoindukcijom i međui indukcijom zbrajaju:

$$ems \text{ u zavojnici } 1 = ems \text{ samoindukcije} + ems \text{ međui indukcije} = L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

i za drugu zavojnicu

$$ems \text{ u zavojnici } 2 = L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

daju ukupnu elektromotornu silu

$$(L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt},$$

pa je prema svemu tome ekvivalentna induktivnost

$$L = L_1 + L_2 + 2M. \tag{18}$$

Ukoliko su zavojnice međusobno toliko udaljene da jedna na drugu ne djeluju, ekvivalentna induktivnost jednaka je zbroju induktivnosti  $L_1$  i  $L_2$ .



Iz navedenih formula može se zaključiti da je moguće konstruirati zavojnicu promjenjive induktivnosti na način da se u serijskom spoju dviju zavojnica jedna može rotirati prema drugoj. U tom slučaju  $L_1$  i  $L_2$  ostaju stalni dok se međui induktivnost  $M$  mijenja ovisno o kutu rotacije zavojnice koja se pomiče. Namotaju li se obje zavojnice u kuglasti predložak na način da jedna može rotirati unutar druge, ekvivalentna induktivnost takve mreže se kontinuirano mijenja od  $(L_1 + L_2 + 2M)$  do  $(L_1 + L_2 - 2M)$ .

Čest je i slučaj u kojem su dvije zavojnice namotane oko iste željezne jezgre. Najbolji primjer za to je transformator. Ukoliko se zanemari rasipanje, tada sav tok iz jedne zavojnice prolazi kroz drugu zavojnicu. Prema definiciji je

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1}, \quad L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2},$$

a

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}.$$

No,  $\Phi_{12} = \Phi_2$ , a  $\Phi_{21} = \Phi_1$  zbog toga što sav tok iz jedne zavojnice prolazi kroz drugu. Iz toga vrijedi

$$M = \frac{N_1 \Phi_2}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_1}{I_1}.$$

Nakon što se ove jednadžbe pomnože i kad se preuredi poredak faktora dobiva se:

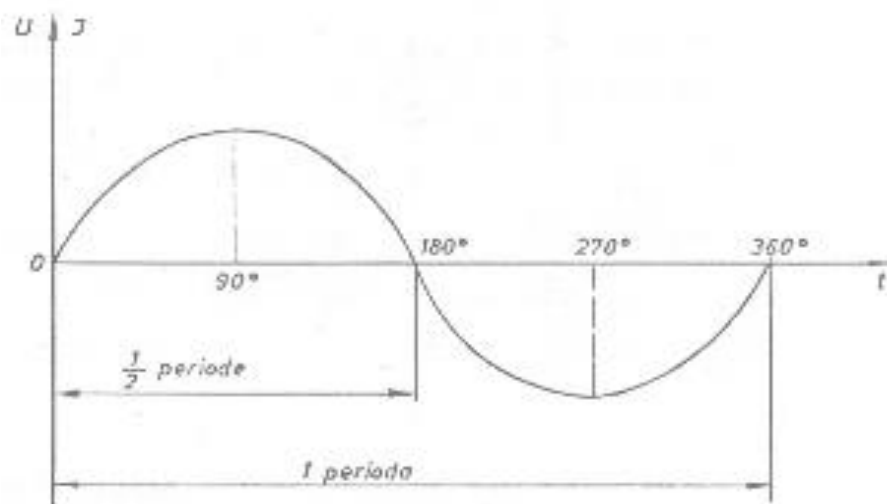
$$M^2 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} \cdot \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = L_1 L_2.$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \tag{19}$$

Međui induktivnost dviju zavojnica koje su namotane jedna preko druge je geometrijska sredina njihovih induktivnosti.

## 9. IZMJENIČNE STRUJE

Izmjenična električna struja je ona struja koja mijenja svoju vrijednost i smjer tijekom određenog vremenskog intervala. Nastaje ako se svitak okreće u homogenom magnetskom polju. Izmjenična struja mijenja svoj smjer, napon i svoju jakost. Do promjene tih veličina dolazi zbog toga što petlja ne siječe magnetske silnice stalno pod istim kutom, odnosno ne siječe uvijek isti magnetski tok u jedinici vremena. Niz promjena izmjenične struje koje se periodički ponavljaju naziva se perioda izmjenične struje.



**Slika 13.** Perioda izmjenične struje

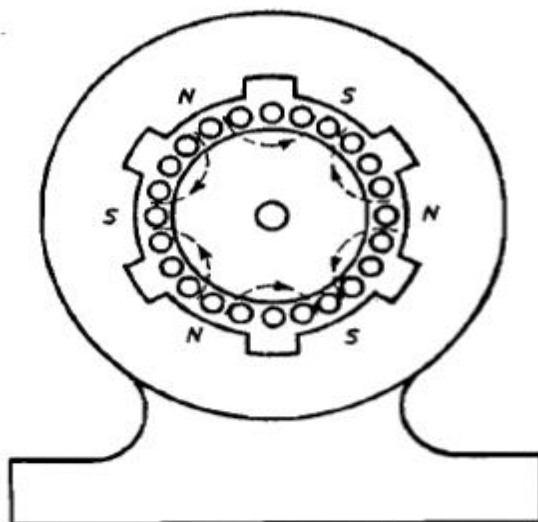
Broj perioda u jednoj sekundi zove se frekvencija izmjenične struje i može se prikazati kao

$$T = \frac{1}{f} \quad (20)$$

gdje  $T$  predstavlja vrijeme trajanja jedne periode izraženo u sekundama [s], a  $f$  je oznaka za frekvenciju [Hz].

### 9.1. Strujni krug izmjenične struje

U petlji od žice koja rotira stalnom kutnom brzinom u nekom homogenom magnetskom polju inducira se izmjenična elektromotorna sila sinusoidalnog oblika. Takva rotirajuća petlja je najjednostavniji uređaj za generiranje izmjeničnog napona. U praksi se kao izvor izmjeničnog napona koristi generator čiji su glavni dijelovi prikazani na slici broj 14.



**Slika 14.** Shema generatora izmjeničnog napona

Na kružnom željeznom statoru poredani su polovi magneta u parovima. Polove na slici prikazuju slova *N* i *S*. Na pomičnom rotirajućem valjku tj. rotoru namotan je veći broj zavoja. Kako vrtnjom rotora zavoji prolaze kroz magnetsko polje, u njima se inducira elektromotorna sila. Kad inducirana elektromotorna sila prolazi kraj sjevernog pola (*N*), ona ima jedan smjer, a kad prolazi kraj južnog pola (*S*) kreće se u suprotnom smjeru. Inducirana elektromotorna sila u zavojima za vrijeme jedne rotacije mijenja smjer toliko puta koliko ima parova polova *NS*.

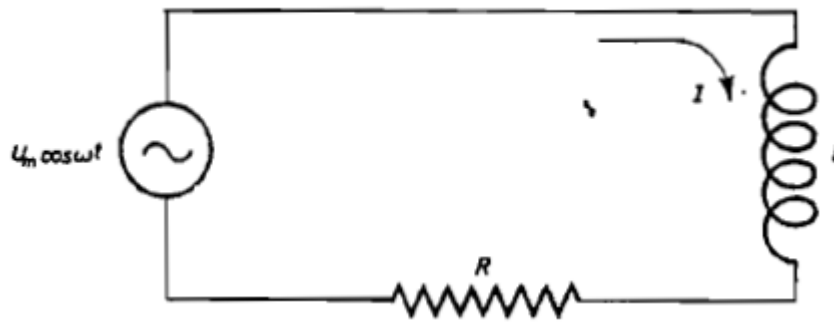
Ovo poglavlje orijentirano je na pojave u strujnim krugovima u kojima postoji sinusoidalni izmjenični napon *U* oblika

$$U = U_m \cdot \cos 2\pi vt = U_m \cos \omega t. \quad (21)$$

U danom izrazu  $U_m$  predstavlja maksimalnu vrijednost napona,  $v$  je oznaka za frekvenciju koja je jednaka broju okretaja rotora u jednoj sekundi, pomnoženim s brojem parova polova *NS*.

### 9.1.1. Strujni krug s otporom i induktivnosti - induktivna reaktancija

Induktivni otpor ili induktivna reaktancija je otpor koji nastaje uslijed samoindukcije u nekom induktivnom trošilu. Kao primjer za objašnjenje ovakve pojave poslužit će slika broj 15 na kojoj će se promatrati vremenska promjena jakosti struje, u kojoj uz izvor izmjenične elektromotorne sile postoji i omski otpor *R* i zavojnica induktivnosti *L*. Kao što je vidljivo na slici, svi navedeni elementi u strujnom krugu spojeni su serijski.



**Slika 15.** Strujni krug s izmjeničnom elektromotornom silom u kojem se nalaze otpornik i zavojnica

Neka je trenutna veličina napona u izvoru  $U_{ab} = U_m \cos \omega t$ . Zadana veličina mora biti jednaka zbroju padova napona preko elemenata kruga  $R$  i  $L$ , tj.

$$U_m \cos \omega t = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (22)$$

Taj je izraz diferencijalna jednadžba čije rješenje daje vremensku ovisnost jakosti struje u krugu  $I = I(t)$ . Navedena jednadžba riješit će se postavkom  $I = I_m \cos(\omega t + \delta)$ . Uvrstimo li ta dva izraza, dobivamo slijedeće:

$$U_m \cos \omega t = RI_m \cos(\omega t + \delta) - L\omega I_m \sin(\omega t + \delta).$$

Da bi se odredile konstante  $I_m$  i  $\delta$ , potrebno je razviti gornji izraz i skupiti koeficijente članova s  $\omega t$ , odnosno  $\cos \omega t$ .

$$U_m \cos \omega t = RI_m(\cos \omega t \cdot \cos \delta - \sin \omega t \cdot \sin \delta) + L\omega I_m(\sin \omega t \cdot \cos \delta - \cos \omega t \cdot \sin \delta)$$

$$(U_m - RI_m \cos \delta + LI_m \sin \delta) \cos \omega t - (RI_m \sin \delta + L\omega I_m \cos \delta) \sin \omega t = 0$$

Gornja razlika iščezava za sve vrijednosti  $t$  ako su koeficijenti uz  $\cos \omega t$  i  $\sin \omega t$  svaki za sebe jednaki nuli. Zbog toga mora biti:

$$L\omega I_m \cos \delta + RI_m \sin \delta = 0$$

$$U_m - RI_m \cos \delta + LI_m \sin \delta = 0.$$

Iz toga slijedi:

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{L\omega}{R}, \quad (23)$$

te

$$I_m = \frac{U_m}{\cos \delta - L\omega \sin \delta}.$$

Množenjem brojnika i nazivnika s  $\cos \delta$  dobiva se

$$I_m = \frac{U_m \cos \delta}{R \cos^2 \delta - L\omega \sin \delta \cos \delta},$$

što uz  $L\omega = -R \operatorname{tg} \delta = -R \sin \delta / \cos \delta$  daje

$$I_m = \frac{U_m}{R} \cos \delta.$$

Kako je, nadalje, prema  $\operatorname{tg} \delta = -\frac{L\omega}{R}$ ,

$$\cos \delta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}},$$

vrijedi da je

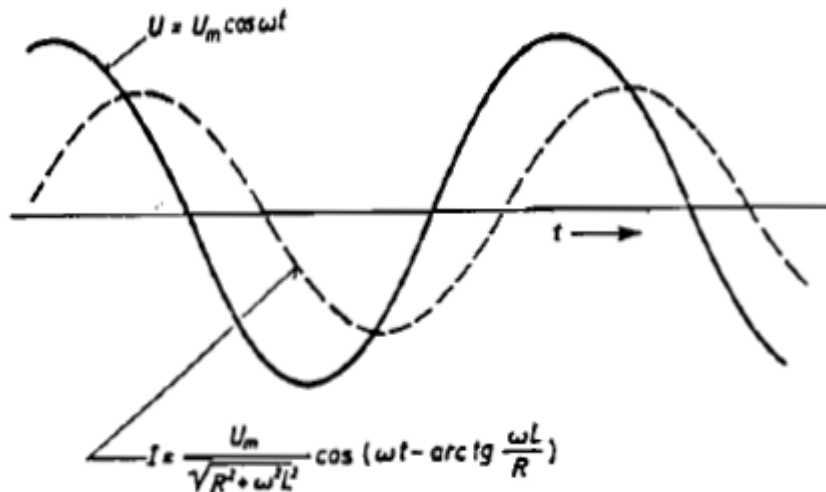
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}. \quad (24)$$

Trenutna vrijednost jakosti struje je

$$I = I_m \cdot \cos(\omega t + \delta) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{L\omega}{R}\right). \quad (25)$$

Iz ovog izraza tj. formule može se uočiti da u strujnom krugu s otporom i induktivnosti, u kojem djeluje inducirana izmjenična elektromotorna sila, vremenska promjena struje zaostaje za promjenom napona tj. oscilacije struje slijede oscilacije napona sa stalnom razlikom u fazi. Isto tako se može zaključiti da se uz omski otpor  $R$  u krugu javlja i novi član  $L\omega$  koji ima dimenziju električnog otpora  $[L\omega] = H s^{-1} = V A^{-1} = \Omega$ . Taj član naziva se induktivna reaktancija, a koristi se i izraz i induktivni otpor.

Induktivni otpor  $L\omega$  javlja se samo u krugovima u kojima postoji periodički promjenjiva elektromotorna sila kružne frekvencije  $\omega = 2\pi v$ .

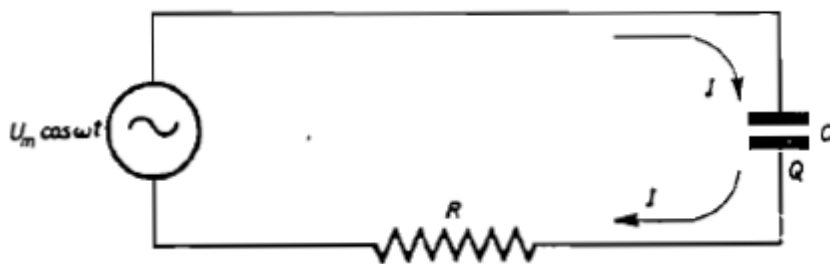


**Slika 16.** Dijagram vektorskog slijeda oscilacija jakosti struje i napona u krugu s otporom  $R$  i zavojnicom induktivnosti  $L$

Na slici se mogu vidjeti oscilacije izmjeničnog napona i jakosti struje u krugu sa serijski vezanim otporom  $R$  i induktivnosti  $L$ . Razlika u fazi tj. fazni pomak može se odrediti kao  $\delta = \arctg \frac{L\omega}{R}$ . Ako je omski otpor  $R$  mnogo veći od reaktancije  $L\omega$ , razlika u fazi veoma je malena. U suprotnome, ako je u krugu čisti induktivni otpor,  $R = 0$ , razlika između faza je  $-\pi/2$ . To je zapravo i najveća fazna razlika između vremenskih oscilacija napona i jakosti struje u strujnom krugu s omskim i induktivnim otporom.

### 9.1.2. Strujni krug s otporom i kapacitetom - kapacitivna reaktancija

Kondenzator propušta izmjeničnu struju, ali joj pruža izvjesni otpor. Taj otpor koji kondenzator pruža prolazu izmjenične struje zove se kapacitivni otpor. U krugu izmjenične struje kondenzator ne djeluje kao prekid strujnog kruga zbog toga što elektromotorna sila izvora naizmjenično puni i prazni ploče kondenzatora pa elektroni stalno teku kroz strujni krug u jednom ili drugom smjeru. U ovom poglavlju kao primjer će poslužiti strujni krug u kojem su serijskim spojem spojeni izvor izmjenične elektromotorne sile, omski otpor  $R$  i kondenzator kapaciteta  $C$  kao što je i prikazano na slici broj 17.



**Slika 17.** Strujni krug s izmjeničnom elektromotornom silom u kojem se nalaze otpornik i kondenzator

Pomoću slike se promatra vremenska promjena jakosti struje u strujnom krugu u kojem se uz izvor izmjenične elektromotorne sile nalaze omski otpor  $R$  i kondenzator kapaciteta  $C$ .  
 „Trenutna vrijednost napona u krugu

$$U = U_m \cdot \cos \omega t$$

jednaka je padu napona na otporu i kondenzatoru

$$U_m \cdot \cos \omega t = RI - \frac{Q}{C}. \quad (26)$$

Rješenje se može pretpostaviti i u sljedećem obliku

$$I = I_m \cos(\omega t + \delta).$$

Kako je  $I = -\frac{dQ}{dt}$  (predznak je negativan zbog toga što se naboj na kondenzatoru smanjuje), to je:

$$Q = -\int I dt = -\frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \delta).$$

Kako bi se odredile konstante  $I_m$  i  $\delta$  u jednadžbu za trenutnu vrijednost napona u krugu potrebno je uvrstiti gornje izraze te skupiti sve članove uz  $\sin \omega t$  i  $\cos \omega t$ .<sup>3</sup>

$$U_m \cos \omega t = RI_m (\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) + \frac{I_m}{C\omega} (\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta)$$

$$\left( U_m - RI_m \cos \delta - \frac{I_m}{C\omega} \sin \delta \right) \cos \omega t - \left( RI_m \sin \delta - \frac{I_m}{C\omega} \cos \delta \right) \sin \omega t = 0$$

<sup>3</sup> CINDRO N.: Fizika 2, Elektricitet i magnetizam, 2. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

Dalje slijedi:

$$RI_m \sin \delta - \frac{I_m}{C\omega} \cos \delta = 0$$

$$U_m - RI_m \cos \delta - \frac{I_m}{C\omega} \sin \delta = 0$$

Rješenje prve jednačbe, od prethodne dvije, glasi:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{RC\omega}.$$

Nakon što se dobiveno rješenje iz prve jednačbe uvrsti u drugu dobiva se

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{U_m}{R \cos \delta + \frac{1}{C\omega} \sin \delta} = \frac{U_m \cos \delta}{R \cos^2 \delta + \frac{1}{C\omega} \sin \delta \cos \delta} = \frac{U_m}{R \cos^2 \delta + \frac{1}{C\omega} \sin^2 \delta \operatorname{ctg} \delta} \\ &= \frac{U_m}{R} \cos \delta. \end{aligned}$$

Uz pomoć  $\frac{1}{\cos^2 \delta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \delta$  nastaje  $\cos \delta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ ,

pa je

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (27)$$

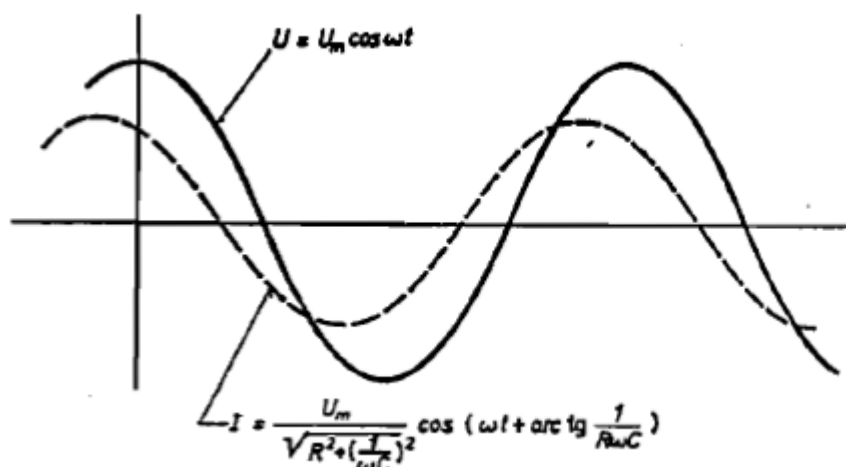
a trenutna vrijednost struje

$$I = I_m \cos(\omega t + \delta) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{RC\omega}\right). \quad (28)$$

Iz zadnje formule zaključuje se da u strujnom krugu s otporom i kapacitetom u kojem djeluje izmjenična elektromotorna sila, vremenska promjena struje ide ispred vremenske promjene napona, tj. oscilacije struje prethode oscilacijama napona sa stalnom razlikom u fazi. Uz omski otpor  $R$  u strujnom krugu javlja se i novi član  $\frac{1}{C\omega}$  čija je dimenzija električnog otpora  $\left[\frac{1}{C\omega}\right] = C^{-1}Vs = VA^{-1} = \Omega$ . Taj član naziva se kapacitivna reaktancija, a naziva se još i kapacitivni otpor.



Usporede li se dobiveni rezultati za  $RC$  i  $RL$  krug jasno je vidljiva razlika u predznaku faznog pomaka te u različitom tipu reakncije.



**Slika 18.** Dijagram vremenskog slijeda oscilacija jakosti struje i napona u krugu s otporom  $R$  i kapacitetom  $C$

Na slici broj 18 prikazane su oscilacije izmjeničnog napona i jakosti struje u nekom strujnom krugu gdje su serijskim spojem vezani otpor  $R$  i kapacitet  $C$ . Razlika u fazi može se prikazati kao  $\delta = \frac{1}{\arctg \left( \frac{1}{RC\omega} \right)}$ . Za čisti kapacitivni otpor,  $R = 0$ , razlika faza je  $\frac{\pi}{2}$  dok je za  $RL$  krug s čistim induktivnim otporom razlika faza  $-\frac{\pi}{2}$ .

### 9.1.3. Opći slučaj RLC - kruga - impedancija

Impedancija se može definirati kao omjer efektivnoga napona i efektivne struje u krugu izmjenične struje u kojemu se nalaze omski otpor, zavojnica s induktivnim otporom i kondenzator s kapacitivnim otporom. Pomoću Kirchhoffova pravila moguće je izračunati vremensku promjenu struje u krugu, u kojem se u serijskom spoju nalaze izvor sinusoidalnog napona, otpornik, zavojnica i kondenzator.

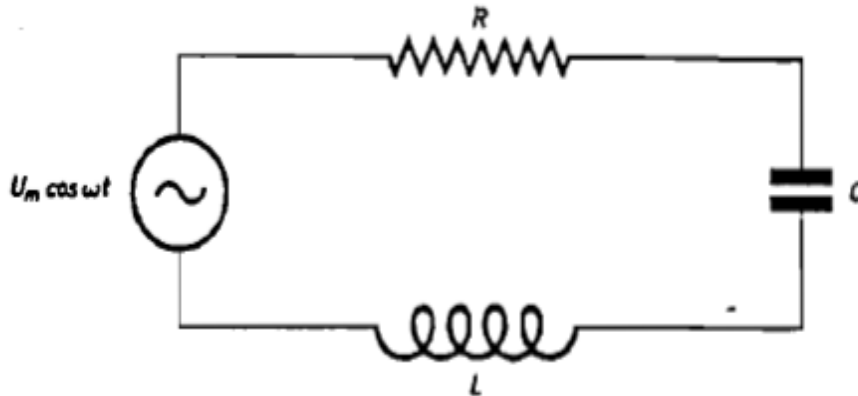
$$U_m \sin \omega t = RI + L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} \quad (29)$$

$$I = I_m \cos(\omega t + \delta) \quad (30)$$

Uvrštavanjem drugog izraza u prvi te postupkom određivanja konstanta  $I_m$  i  $\delta$  dobiva se

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R} = \frac{I}{R} \left( \frac{1}{C\omega} - L\omega \right) \quad (31)$$

$$I = \frac{U_m \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (32)$$



**Slika 19.** Strujni krug s izmjeničnom elektromotornom silom u kojem se nalaze otpornik, zavojnica i kondenzator

Kod općeg  $RLC$  - kruga struja oscilira istom frekvencijom kao i napon, ali se njihove oscilacije razlikuju za stalnu faznu razliku. Predznak te razlike ovisi o razlici između kapacitivnog i induktivnog otpora  $\frac{1}{c\omega} - L\omega$ . Preteže li prva  $\left(\frac{1}{c\omega}\right)$ , struja će brzati pred naponom, a ako preteže druga  $(L\omega)$ , struja će zaostajati za naponom. U slučaju da je  $\frac{1}{c\omega} - L\omega = 0$ , suprotna djelovanja induktivnosti i kapaciteta se poništavaju i struja i napon ostaju u fazi. Uvrstivši taj uvjet u drugo rješenje postupka određivanja konstanta  $I_m$  i  $\delta$  može se zaključiti da je tada jakost struje najveća i iznosi

$$I = \frac{U_m \cos \omega t}{R} = \frac{U}{R}$$

Dana formula govori da krugom teče struja koja bi tekla da u krugu postoji samo omski otpor  $R$ . Pripadna frekvencija  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  je vlastita frekvencija oscilatorskog  $RLC$  - kruga.

## 9.2. Reaktancija, impedancija i rezonancija

U strujnom krugu u koji je ukopčan izmjenični sinusoidalni napon nakon nekog vremena uspostavlja se stacionarno stanje. Vremenske promjene električne struje slijede promjene napona po obliku i frekvenciji, ali s određenom stalnom razlikom u fazi. Kod toga se u

strujnom krugu uz omski otpor  $R$  pojavljuju ekvivalentni otpori koji su povezani s induktivnosti  $L$  zavojnice i kapacitetom  $C$  kondenzatora.

$$X_L = L\omega = 2\pi L\nu \quad (33)$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi C\nu} \quad (34)$$

U navedenim izrazima tj. formulama veličina  $X_L$  naziva se induktivna reaktancija, a veličina  $X_C$  kapacitivna reaktancija. Te veličine se u  $RL$  i  $RC$  krugovima kvadratno pribrajaju omskom otporu. Slijedeća veličina

$$X = X_L - X_C = L\omega - \frac{1}{C\omega} \quad (35)$$

naziva se reaktancija ili jalovi otpor. Prema svemu navedenom, reaktanciju možemo definirati kao razliku induktivnog i kapacitivnog otpora. Reaktancija se u  $RLC$  krugu kvadratno pribraja omskom otporu  $R$ .

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (36)$$

Veličina izražena u ovoj formuli naziva se impedancija, a to je, kao što je već definirano, omjer efektivnog napona i efektivne struje u krugu izmjenične struje u kojemu se nalaze omski otpor, zavojnica s induktivnim otporom i kondenzator s kapacitivnim otporom. Vrijedi

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_m}{Z}, \quad (37)$$

kao i

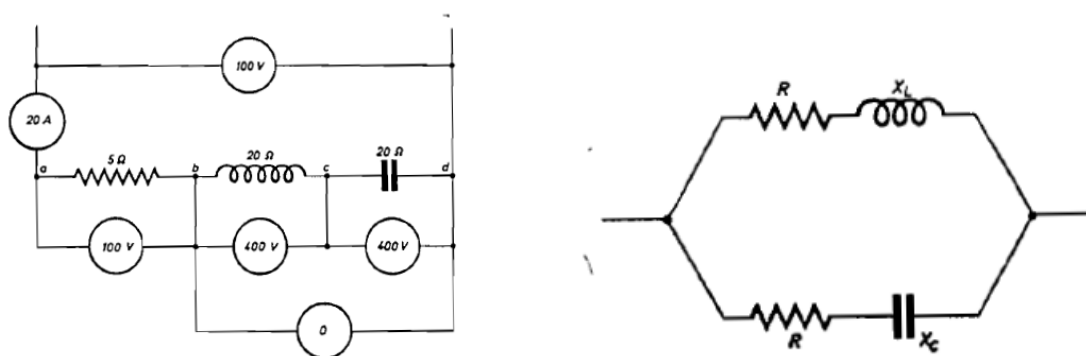
$$\delta = \arctg \frac{X}{R}. \quad (38)$$

Ako se računa impedancija u strujnom krugu s izmjeničnom strujom, omski otpor te induktivna i kapacitivna reaktancija ne zbrajaju se algebarski, nego vodeći računa o fazama.

„Jakost struje koja teče krugom u kojem se uz izmjenični napon  $U = U_m \cos(\omega t + \delta)$  nalaze i omski otpor  $R$ , induktivnost  $L$  i kapacitet  $C$  definirana je izrazom

$$I = I_m \cos(\omega t + \delta) = \frac{U_m \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{Z},$$

gdje je  $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  impedancija kruga,  $X_L = L\omega$  i  $X_C = \frac{1}{C\omega}$  predstavljaju induktivnu i kapacitivnu reaktanciju. Posebnu važnost ima ako je  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  tj. ako je  $X_L = X_C$ . Tada je reaktancija jednaka nuli i impedancija kruga jednaka je njegovom omskom otporu. Ako je razlika u fazi između struje i napona  $\delta = \arctg \frac{X}{R} = 0$ , struja i napon su u fazi. Takva vrsta kruga naziva se rezonantni krug, a pojava unutar njega električna rezonancija.



**Slika 20.** Serijski i paralelno spojeni elementi u rezonantnom krugu

Struja koja teče takvim krugom može biti veoma velika ako je omski otpor  $R$  kruga malen, no napon preko same zavojnice ili kondenzatora može u tom slučaju biti znatno veći nego napon preko cijelog kruga.“<sup>4</sup>

### 9.3. Efektivna vrijednost jakosti i napona sinusoidalne struje

Pojam efektivne vrijednosti električnog napona i struje od temeljne je važnosti pri razmatranju rada i snage izmjeničnog električnog napona, odnosno struje. Efektivna vrijednost napona i struje kvantitativno povezuje amplitudu i oblik izmjeničnog napona, odnosno struje s veličinom rada i snage u električnim strujnim krugovima. U nekom strujnom krugu vrijednosti jakosti i napona izmjenične struje konstantno se mijenjaju te im se pri tome mijenja veličina i predznak. Srednja vrijednost sinusoidalnog napona ili jakosti struje za vrijeme od jedne ili više potpunih perioda jednaka je nuli i zbog toga ne daje pravu sliku o djelovanju struje i opisuje se takozvanim efektivnim vrijednostima jakosti

<sup>4</sup> CINDRO N.: Fizika 2, Elektricitet i magnetizam, 2. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

struje i napona. Efektivna vrijednost jakosti izmjenične struje u nekom vremenskom razmaku  $t$  definira se kao vrijednost stalne struje koja prolazeći kroz otpornik, proizvede u isto vrijeme jednaku količinu topline kao i izmjenična struja. Razvijena toplota definirana je formulom

$$\text{razvijena toplota} = I_{ef}^2 \cdot Rt = \int_0^t R[I(t)]^2 dt.$$

Izraz za efektivnu vrijednost struje glasi

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t I^2 dt}. \quad (39)$$

Iz toga je vidljivo da je efektivna vrijednost izmjenične struje jednaka njenoj srednjoj kvadratnoj vrijednosti. Za izmjeničnu struju sinusoidalnog oblika vrijedi  $I = I_m \cos \omega t$ .

$$I_{ef} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt}.$$

Kako je perioda  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , a  $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi}{\omega}$ , tako je efektivna vrijednost izmjenične struje jednaka

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$

Na sličan način dobiva se i vrijednost napona efektivne struje

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t U^2 dt}. \quad (40)$$

Navedeni izraz za sinusoidalni napon  $U = U_m \cos \omega t$  daje

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m.$$

#### 9.4. Razlika potencijala između točaka u krugu s izmjeničnom strujom

Razlika potencijala je fizikalna veličina koja se odnosi na količinu energije koja je potrebna za pomicanje tijela iz jednog mjesta na drugo pod utjecajem različitih vrsta sila. Pojam se najčešće koristi kao skraćenica za razliku električnog potencijala, što se često pogrešno rabi kao sinonim za napon, ali se isto tako pojavljuje i u ostalim granama fizike. Razlika potencijala između neke dvije točke kruga kojim teče stalna struja iznosi

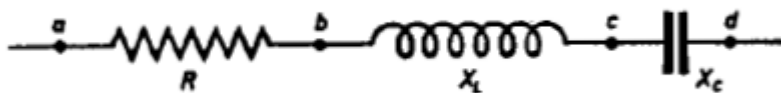
$U = I \cdot R$ .  $R$  predstavlja električni otpor između te dvije točke. U strujnom krugu s izmjeničnom strujom, osim omskog otpora  $R$ , javlja se i reaktancija  $X$ . O reaktanciji  $X$  također ovisi i pojava različitih faznih odnosa između jakosti struje i napona. Efektivna vrijednost razlike potencijala između dvije točke  $a$  i  $b$  u krugu izmjenične struje može se definirati kao produkt jakosti struje i impedancije između navedene dvije točke, što glasi

$$U_{ab} = I Z_{ab} \quad (41)$$

ako između te dvije točke u krugu ne postoji izvor elektromotorne sile. Važan podatak je da jakost struje i napon u krugu nisu u fazi već između njih postoji razlika koja je definirana izrazom

$$\delta = \arctan \frac{X_{ab}}{R}.$$

Upravo radi toga razlika napona između neke dvije proizvoljne točke u strujnom krugu s izmjeničnom strujom ovisi o rasporedu elemenata.



**Slika 21.** Razlika potencijala između dvije točke u krugu kojima teče izmjenična struja

Slika broj 21 prikazuje strujni krug koji sadržava omski otpor  $R$ , zavojnicu i kondenzator, čije su reaktancije  $X_L$  i  $X_C$ . Pomoću primjera sa slike može se odrediti efektivna potencijalna razlika između raznih točaka tog kruga pomoću formule za efektivnu vrijednost razlike potencijala između dvije točke.

Impedancija  $Z_{ab}$  između točaka  $a$  i  $b$  jednaka je omskom otporu zbog toga što između njih nema nikakvih drugih elemenata. Prema tome je  $U_{ab} = I R$ ,  $\delta = \arctan 0 = 0$ . Razlika

potencijala između krajeva čistog omskog otpora je u fazi s jakosti struje u krugu. Između točaka  $b$  i  $c$  impedancija je  $Z_{bc} = X_L$  zbog toga što nema omskog otpora, pa je  $U_{bc} = I X_L, \delta = \arctan \infty = +\frac{\pi}{2}$ . Razlika potencijala između krajeva čistog induktivnog otpora brza u fazi ispred jakosti struje za  $90^\circ$ , tj. jakost struje zaostaje za naponom. Impedancija između točaka  $c$  i  $d$  je  $Z_{cd} = X_C$  pa je  $U_{cd} = I X_C, \delta = \arctan -\infty = -\frac{\pi}{2}$ . Razlika potencijala između krajeva kondenzatora zaostaje za jakošću struje za  $90^\circ$  jer jakost struje brza pred naponom. U praksi se nikad ne događa slučaj čistog omskog otpora ili čiste reaktancije, pa su zbog toga navedeni izrazi aproksimacija stvarne fizikalne situacije.

Kao konkretan primjer, ponovno će poslužiti slika broj 21 sa strujnim krugom u kojem je jakost struje  $10A, R = 3\Omega, X_L = 5\Omega, X_C = 9\Omega$ . Tada je

$U_{ab} = 30 V$ , napon i jakost struje su u fazi;

$U_{bc} = 50 V$ , napon brza ispred jakosti struje za  $90^\circ$ ;

$U_{cd} = 90 V$ , napon zaostaje iza jakosti struje za  $90^\circ$ .

Impedancija sklopa jednaka je

$$Z_{ad} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{3^2 + (5 - 9)^2} = 5\Omega,$$

pa efektivna razlika potencijala između dviju točaka na krajevima sklopa iznosi

$$U_{ad} = I Z_{ad} = 10 \cdot 5 = 50 V.$$

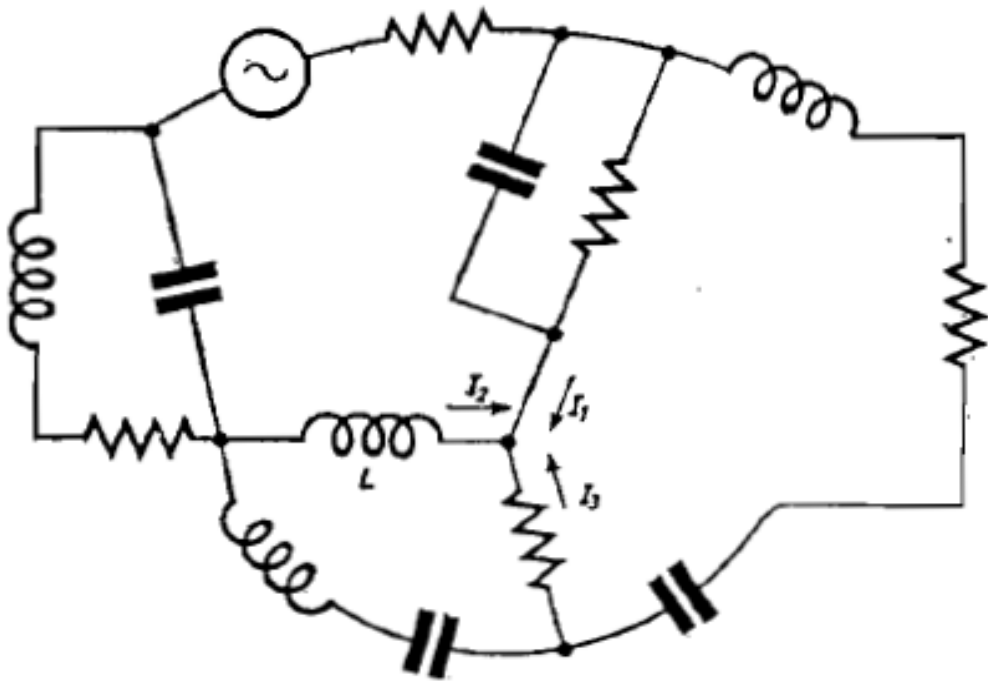
Zbroj razlike napona po svakom elementu sklopa iznosi

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = 170 V,$$

što je različito od potencijala između dviju točaka na krajevima istog sklopa. Razlog ovoj nejednakosti su fazne razlike između pada napona na pojedinim elementima kruga. Padove napona u krugu izmjenične struje nije moguće algebarski zbrajati.

### 9.5. Prikaz jakosti i napona izmjenične struje u kompleksnoj ravnini

Strujna mreža može se definirati kao svaki skup spojenih otpornika, zavojnica i kondenzatora kojima teku izmjenične struje stalne frekvencije  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ . Te struje su posljedica djelovanja jednog ili više izvora elektromotorne sile potpuno iste frekvencije. Kao primjer poslužit će slika broj 22.



Slika 22. Strujna mreža s izvorom izmjeničnog napona

U svakoj pojedinoj grani prikazanoj na slici teče izmjenična struja  $I$  oblika

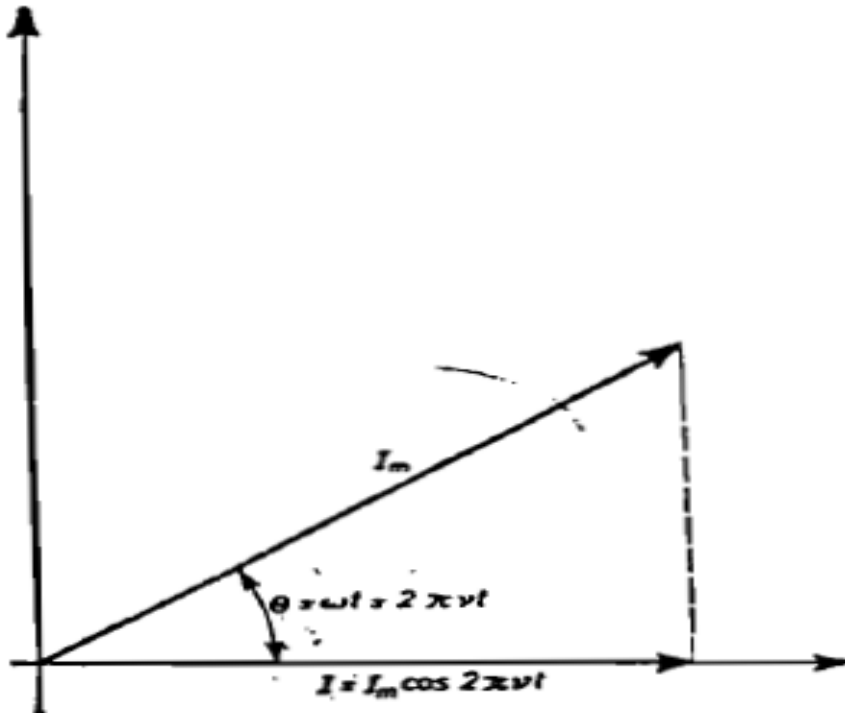
$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Isto je i s naponom, on se u svakoj pojedinoj grani mijenja po relaciji

$$U = U_0 \cos(\omega t + \theta).$$

Kako bi se mogla izračunati struja i napon u svakoj grani posebno, potrebno je odrediti parove konstanata  $(I_0, \varphi)$  i  $(U_0, \theta)$ . To se može izračunati pomoću sistema diferencijalnih jednačbi, ali je jednostavnije prikazati izmjenične struje i napone kompleksnim brojevima. Takva metoda naziva se metoda rotirajućih vektora odnosno frazora.



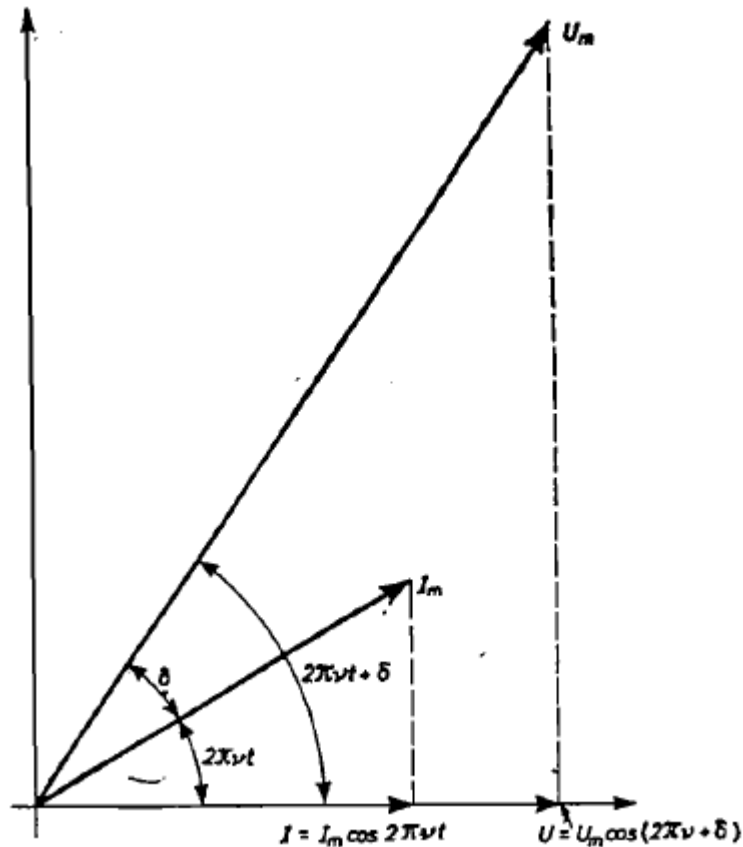


**Slika 23.** Prikaz izmjenične struje pomoću metode rotirajućih vektora

Na slici broj 23 prikazana je izmjenična struja oblika  $I = I_m \cos(\omega t + \delta)$  u obliku dijagrama koji će poslužiti kao primjer za izračun vrijednosti. Neka  $I_m$  rotira oko ishodišta kutnom brzinom  $\omega = 2\pi v \text{ rad/s}$ . Ako se kao os X izabere položaj vektora  $I_m$  u trenutku  $t = 0$ , njegova projekcija na toj osi će u svakom trenutku biti jednaka trenutnoj vrijednosti jakosti struje, što se može prikazati kao

$$I = I_m \cos \omega t = I_m \cos 2\pi vt.$$

Može se reći da je metoda rotirajućih vektora identična načinu na koji se harmonijske oscilacije prikazuju projekcijom položaja točke, koja jednoliko kruži na okomite osi kružnice. Da bi se pomoću istog dijagrama prikazale vremenske promjene napona, potrebno je obratiti pozornost na razliku faze između jakosti struje i napona. Napon se stoga prikazuje rotirajućim vektorom modula  $U_m$  koji se od prethodnog vektora  $I_m$  razlikuje za neki kut rotacije  $\delta$ .



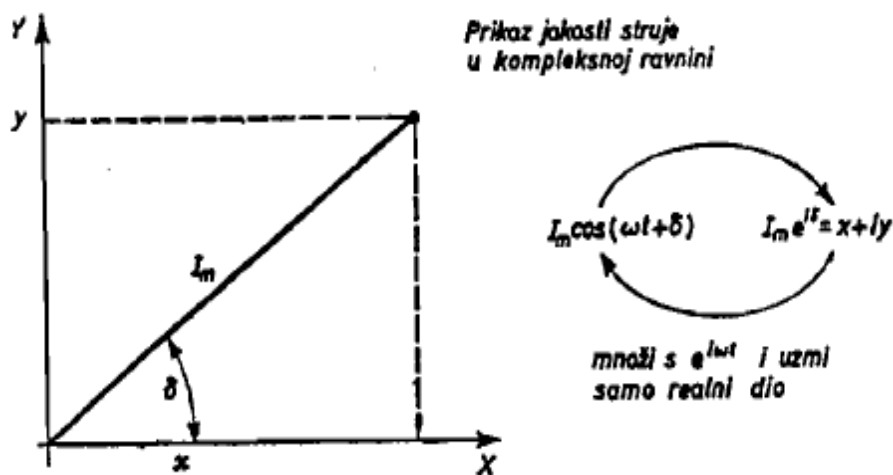
**Slika 24.** Grafički prikaz jakosti struje i napona izmjenične struje metodom rotirajućih vektora

Na prikazanoj slici broj 24 vektor  $U_m$  predstavlja napon koji titra jednakom frekvencijom kao i jakost struje, ali za strujom zaostaje za faznu razliku  $\delta$ . Napon se može definirati izrazom

$$U = U_m \cos(\omega t + \delta).$$

Trenutna vrijednost napona jednaka je projekciji vektora  $U_m$  na os X. Ukoliko se vektori  $U_m$  i  $I_m$  zarotiraju kutnom brzinom  $\omega$  u smjeru suprotnom kazaljci na satu, trenutne će vrijednosti napona  $U$  biti postignute toliko kasnije koliko je vremena potrebno za rotaciju vektora za kut fazne razlike  $\delta$ , za razliku od odgovarajućih vrijednosti struje  $I$ .

Svaki vektor u ravnini moguće je prikazati pomoću dva broja. Tako se izmjenični napon i jakost struje mogu prikazati pomoću kompleksnih brojeva. Jakost izmjenične struje u krugu može se prikazati kompleksnim brojem  $I_m e$ . To je broj čija je realna komponenta  $I_m \cos \delta$ , a imaginarna komponenta  $I_m \sin \delta$ . Ako kompleksni broj  $x + iy$  predstavlja jakost izmjenične struje, tada je vremenska zavisnost struje dana kao realni dio produkta  $(x + iy)e^{i\omega t}$ . Takva dvostruka korespondencija prikazana je na slijedećoj slici.



Slika 25. Prikaz jakosti izmjenične struje kompleksnim brojevima

U kompleksnom prikazu, zbroj dviju struja jednak je zbroju prikaza tih struja. Kao primjer poslužit će slika broj 22 gdje struje  $I_1$  i  $I_2$  ulaze u istu točku mreže. U svakom trenutku  $t$  vrijedi

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= I_{1m} \cos(\omega t + \delta_1) + I_{2m} \cos(\omega t + \delta_2) \\
 &= (I_{1m} \cos \delta_1 + I_{2m} \cos \delta_2) \cos \omega t - (I_{1m} \sin \delta_1 + I_{2m} \sin \delta_2) \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Zbroj kompleksnih brojeva koji prikazuju iste struje je

$$I_{1m} e^{i\delta_1} + I_{2m} e^{i\delta_2} = (I_{1m} \cos \delta_1 + I_{2m} \cos \delta_2) + i(I_{1m} \sin \delta_1 + I_{2m} \sin \delta_2). \quad (42)$$

$i$  ispred zagrade predstavlja imaginarnu jedinicu. Ukoliko pomnožimo desnu stranu drugog izraza s  $\cos \omega t + i \sin \omega t$ , realni dio toga umnoška daje desnu stranu prvog izraza. Iz toga se može zaključiti da je za rezultat dovoljno zbrojiti ili oduzeti dva kompleksna broja. Na isti takav način može se prikazati i izmjenični napon. Bitno je obratiti pozornost na to da u svakom trenutku zbroj padova napona po elementima petlje mora biti jednak elektromotornoj sili u toj petlji. Takva relacija koja povezuje periodičke funkcije napona može se zamijeniti relacijom između zbroja kompleksnih brojeva koji prikazuju različite oscilirajuće funkcije ( $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ).

### 9.5.1. Admitancija

Admitancija se može definirati kao vodljivost u krugu izmjenične struje u kojemu se nalaze induktivni, kapacitivni i omski otpor. Za opisivanje pojma admitancije vremenska promjena napona bit će prikazana izrazom  $U_m \cos \omega t$ , a jakost struje dana izrazom  $I_m e^{i\delta}$ , gdje je  $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$ , a  $\delta = \arctan \left( -\frac{L\omega}{R} \right)$ . Iz navedenih izraza može se zaključiti da su fazna razlika  $\delta$  i omjer amplituda struje i napona  $I_m/U_m$  stalne karakteristike kruga pri danoj frekvenciji izmjeničnog napona koje ne ovise o naponu i jakosti struje. S obzirom da se veza između struje koja teče elementom strujnog kruga i napona na krajevima toga elementa može izraziti kompleksnim brojem,  $Y$  će biti definiran izrazom

$$Y = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \text{ uz } \delta = \arctan \left( -\frac{L\omega}{R} \right). \quad (43)$$

Tada vrijedi

$$I = Y U, \quad (44)$$

gdje  $I$  kao kompleksan broj prikazuje jakost struje u krugu,  $U$  prikazuje napon na krajevima serijskog spoja otpornika i zavojnice. Veličina  $Y$  ima karakter električne vodljivosti i naziva se admitancija. Admitancija je karakteristika strujnog kruga i dane frekvencije i ne ovisi o izvoru napona i struje.

Za strujni krug koji sadržava samo otpor i kapacitet može se definirati

$$Y = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C^2 \omega^2}\right)}} \text{ uz } \delta = \arctan \left( \frac{1}{RC\omega} \right) \quad (45)$$

i iz toga vrijedi



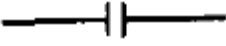
$$I = Y U.$$

Kad zavojnica ne bi imala omski otpor, njezina bi admitancija bila  $Y = -\frac{i}{L\omega}$ , dok je krug sa samim kapacitetom  $Y = iC\omega$ . Imaginarne jedinice ( $i$ ) su znak da struja u zavojnici zaostaje, a u kondenzatoru brza u odnosu na napon. Formulu  $I = Y U$  možemo zapisati i na slijedeći način

$$U = \left(\frac{1}{Y}\right) I = Z I. \quad (46)$$

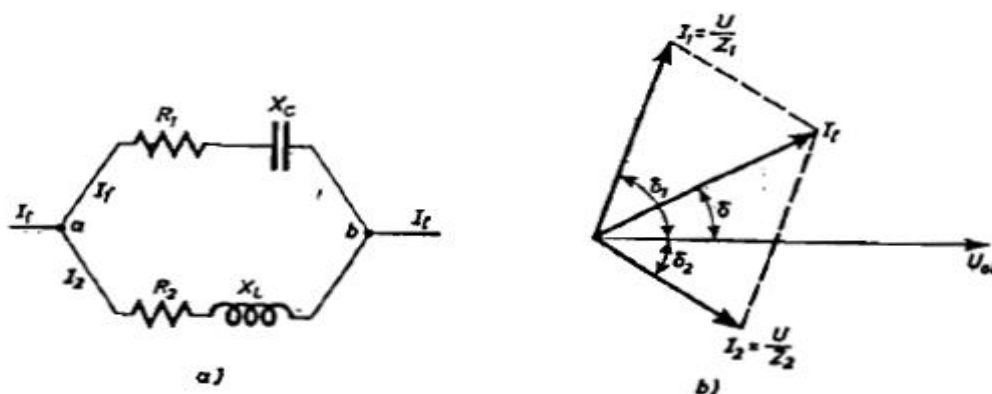
U ovoj formuli, kompleksna veličina  $Z$  naziva se impedancija. Impedancija se kao fizikalna veličina mjeri nekim realnim brojem, odnosno vrijednost impedancije izražena u omima je  $|Z|$  što nazivamo modul  $Z$ . Isto tako je i vrijednost admitancije izražena u simensima definirana s  $|Y|$ .

**Tablica br. 1.** Admitancija i impedancija elemenata strujnog kruga

SIMBOL	ADMITANCIJA $Y$	IMPEDANCIJA $Z = \frac{1}{Y}$
<p><b>R</b></p> 	$\frac{1}{R}$	$R$
<p><b>L</b></p> 	$-\frac{i}{L\omega}$	$iL\omega$
<p><b>C</b></p> 	$iC\omega$	$-\frac{i}{C\omega}$
	$I = Y U$	$U = Z I$

### 9.6. Strujni krug s paralelno spojenim elementima

Strujni krug osim serijski možemo spojiti i paralelno što dovodi do određenih promjena u vrijednostima veličina koje opisuju taj strujni krug. Kao primjer poslužiti će slika broj 26 koja prikazuje paralelno spojene elemente u krugu izmjenične struje.

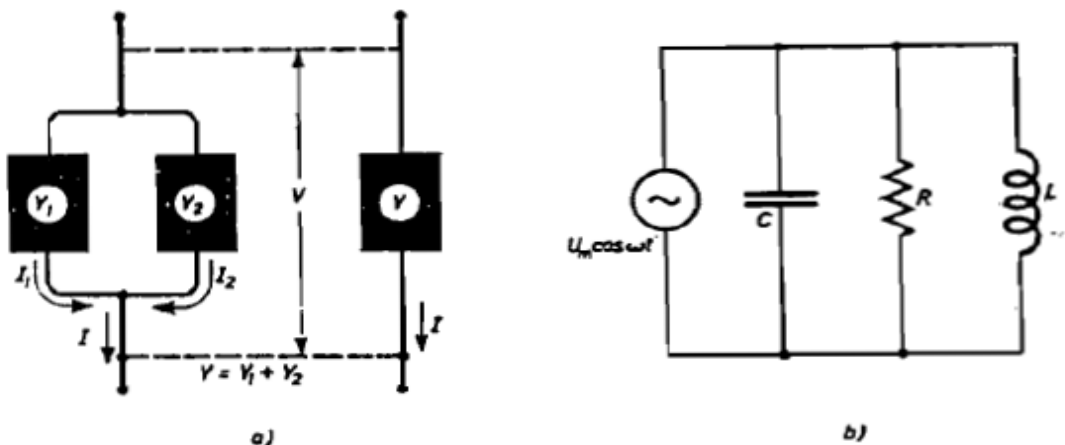


**Slika 26.** a) Paralelno spojeni elementi u krugu izmjenične struje; b) Odgovarajući vektorski dijagram

Razlika potencijala  $U_{ab}$  u svakom je trenutku jednaka u obje grane kruga. Sa strujom je ipak nešto drugačije. Struje  $I_1$  i  $I_2$  različite su jakosti i razlikuju se i u fazi zbog toga što struja u gornjoj grani brza pred naponom, a u donjoj grani zaostaje za naponom. S obzirom da prema Kirchhoffovu pravilu ukupna vrijednost struje mora biti jednaka zbroju struja  $I_1$  i  $I_2$ , u ovom slučaju zbrajat će se vektori kao što je prikazano na slici broj 26. Kao referentni vektor zadan je  $U_{ab}$  koji označava zajednički napon preko obje grane. Vektor struje  $I_1$  brza pred naponom za kut  $\delta_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1}$ , a vektor  $I_2$  zaostaje za kut  $\delta_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2}$ . Njihov vektorski zbroj je vektor  $I$  i on se razlikuje u fazi od napona za neki kut  $\delta$ . Omjer napona i ukupne struje  $I$  može se definirati kao ekvivalentna impedancija kruga

$$Z_{ekv} = \frac{U_{ab}}{I}.$$

Kako bi se pojednostavila analiza strujno-naponskih odnosa u krugu s paralelno spojenim elementima, poslužiti će pojam admitancije i pojmovi iz tablice broj 1. te slijedeća slika.



**Slika 27.** a) Admitancija kruga s paralelno spojenim elementima; b) Krug s paralelno spojenim elementima  $R$ ,  $L$  i  $C$

Neka su admitancije „crnih kutija“ prikazanih na slici pod a)  $Y_1$  i  $Y_2$ . Tada vrijedi

$$I = I_1 + I_2 = Y_1 U + Y_2 U = (Y_1 + Y_2) U$$

$$Y = Y_1 + Y_2,$$

tj. admitancije paralelno spojenih elemenata se zbrajaju baš kao što se zbrajaju impedancije kod serijski spojenih elemenata. U drugom primjeru koji je na slici prikazan pod b) svi su elementi spojeni paralelno. Ukupna admitancija strujnog kruga je zapravo zbroj admitancija elemenata kruga

$$Y = \frac{1}{R} + iC\omega - \frac{i}{L\omega}.$$

Ako je  $U$  napon na krajevima kruga, tada vrijedi

$$I = YU = U \left[ \frac{1}{R} + i \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right],$$

gdje  $I$  predstavlja kompleksni broj koji prikazuje jakost struje. Amplituda strujnih oscilacija jednaka je modulu kompleksnog broja  $I$

$$I_m = |I| = U_m \left[ \left( \frac{1}{R} \right)^2 + \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2 \right]^{1/2},$$

a fazna razlika iznosi

$$\delta = \arctan \left( RC\omega - \frac{R}{L\omega} \right).$$

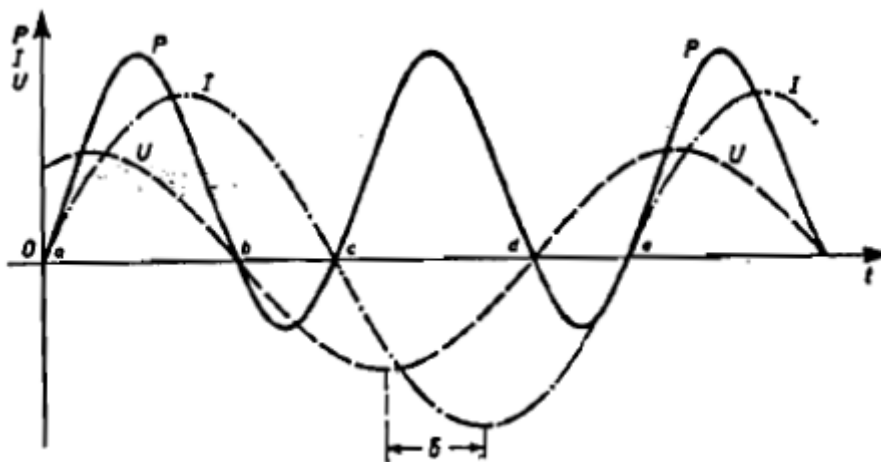
Iz svega navedenoga može se zaključiti da elementi analize vrijede samo za tzv. linearne elemente kruga kao što su  $R$ ,  $L$  i  $C$  gdje je jakost struje razmjerna s naponom.

## 10. SNAGA I RAD IZMJENIČNE STRUJE

Snaga električne struje definira se kao utrošak rada podijeljen s vremenom. Poznat je i podatak da je snaga jednaka produktu jakosti struje  $I$  i napona  $U$  kao i to da će snaga električne struje u krugu s izmjeničnom strujom, tj. energija koju u jedinici vremena struja preda određenom električnom uređaju u tom krugu, biti jednaka produktu trenutne vrijednosti jakosti struje i trenutne vrijednosti razlike napona među krajevima uređaja. S obzirom da se obje veličine konstantno mijenjaju, snaga se može definirati za neizmjereno kratko vrijeme na način

$$P = \frac{dW}{dt} = I U. \quad (47)$$

Električna se energija predaje uređaju u situaciji kad struja teče od točke višeg potencijala prema točki nižeg potencijala, ali ako je situacija obrnuta uređaj mora davati energiju strujnom krugu. Konkretni primjer prikazan je na slici broj 28 gdje su u vremenskom intervalu između dviju točaka ( $a$  i  $b$ ) obje krivulje ( $U$  i  $I$ ) pozitivne i struja teče od točke višeg potencijala prema točki nižeg potencijala te predaje energiju nekom uređaju kao što je npr. zavojnica ili kondenzator. Može se vidjeti da je potencijalna razlika između točaka  $b$  i  $c$  promijenila smjer, dok je struja zadržala svoj smjer i u tom slučaju uređaj predaje energiju krugu, odnosno vraća primljenu energiju. Između točaka  $c$  i  $d$  i struja i napon mijenjaju smjer pa se energija ponovno predaje uređaju. Zaključak je da se energija predaje uređaju kad je krivulja snage pozitivna, a kad je negativna uređaj predaje energiju strujnom krugu.



**Slika 28.** Vremenska promjena snage izmjenične struje u ovisnosti o vremenskoj promjeni jakosti struje i napona



S obzirom da se kod izmjenične struje energija neprestano izmjenjuje između strujnog kruga i uređaja može se reći da je čisti priljev energije koju izmjenična struja preda uređaju za neko vrijeme  $t$  jednak razlici površina iznad i ispod vremenske osi tj.

$$W = \int_0^t P dt.$$

Srednja snaga izmjenične struje je omjer energije koju struja preda uređaju podijeljena s pripadnim vremenom.

$$\frac{W}{t} = P = \frac{1}{t} \int_0^t P dt \quad (48)$$

Ako se uzme u obzir fazna razlika jakosti struje i napona za vrijeme  $T$  od jedne periode izmjenične struje vrijedi

$$U = U_m \cos \omega t$$

$$I = I_m \cos(\omega t + \delta)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I_m U_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \delta) dt = \frac{I_m U_m}{2} \cos \delta.$$

Zbog toga što je  $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  i  $U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  snaga izmjenične struje definirana je kao

$$P = I_{ef} \cdot U_{ef} \cos \delta. \quad (49)$$

Prema ovoj formuli vidljivo je da je srednja snaga koju neki uređaj prima u strujnom krugu izmjenične struje jednaka produktu efektivnog napona i efektivne jakosti struje, te kosinusa fazne razlike između napona i struje, odnosno faktora snage danog uređaja kako se još i naziva faktor  $\cos \delta$ . Taj faktor ovisi o prirodi uređaja, tj. o rasporedu omskog, induktivnog i kapacitivnog otpora u njemu jer oni određuju zaostaje li ili brza struja za naponom i koliko. U slučaju kada je faktor snage jednak nuli, strujni krug ne daje energiju uređaju što ujedno znači da uređaj sadržava čisti reaktivni otpor (induktanciju ili kapacitanciju) i energija se troši isključivo na omski otpor (disipaciju topline). Ako krug sadržava omski otpor i reaktanciju, a nema nikakve mehaničke uređaje, tada je

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{X}{R}, \quad \cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{R}{Z}$$

što znači da srednja snaga postaje

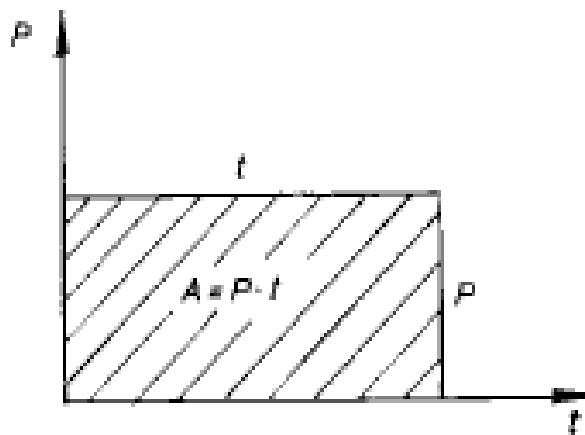
$$P = \frac{UIR}{Z} = I^2 R \quad (50)$$

što je formalno identično s formulom za snagu stalne struje, samo što su  $I$  efektivne vrijednosti. Snaga koju krug izmjenične struje daje uređaju u pravilu se ne može mjeriti istim mjernim instrumentima kao i snaga kruga sa stalnom strujom, zbog toga što ti mjerni uređaji ne vode računa o faktoru snage. Postoje i uređaji koji tu razliku kompenziraju pa se mogu koristiti i za krugove sa stalnom i sa izmjeničnom strujom.

„Rad električne struje općenito se određuje na način da se njezina djelatna snaga pomnoži s vremenom

$$A = P \cdot t, \quad (51)$$

što se grafički može prikazati kao površina pravokutnika čija je jedna stranica djelatna snaga  $P$ , a druga stranica vrijeme  $t$ .

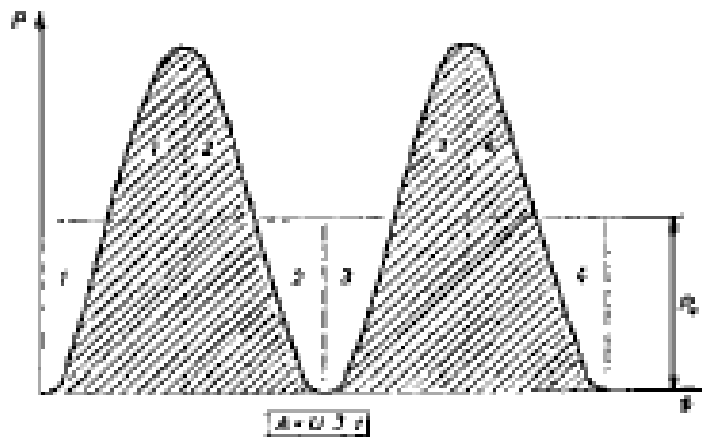


**Slika 29.** Grafičko prikazivanje električnog rada površinom pravokutnika

Kod čistog omskog opterećenja snaga je  $P = U \cdot I$ , stoga je električni rad

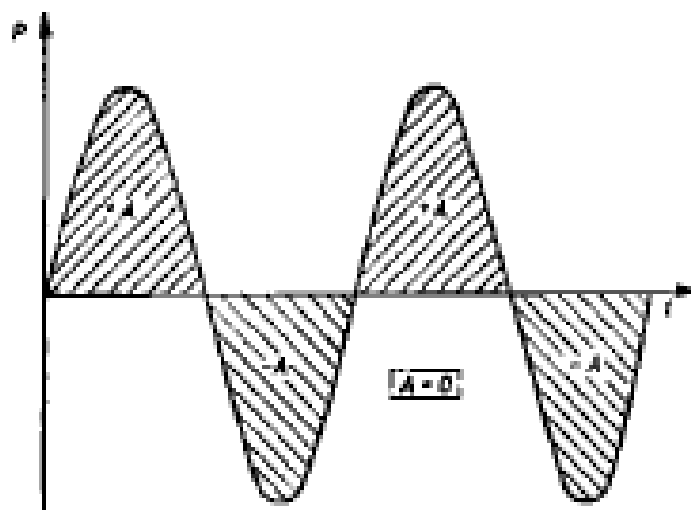
$$A = U \cdot I \cdot t. \quad (52)$$

Takav rad grafički može biti prikazan kao površina koju omeđuje sinusoida snage i apscisna os, jer je ta površina jednaka površini pravokutnika čije su stranice snaga i vrijeme.



**Slika 30.** Električni rad pri omskom opterećenju

Kod čisto induktivnog ili čisto kapacitivnog opterećenja nema snage pa zbog toga nema ni električnog rada. Iz slike broj 31 je vidljivo da se dobiju pozitivni i negativni rad koji su međusobno jednaki i potpuno se poništavaju.

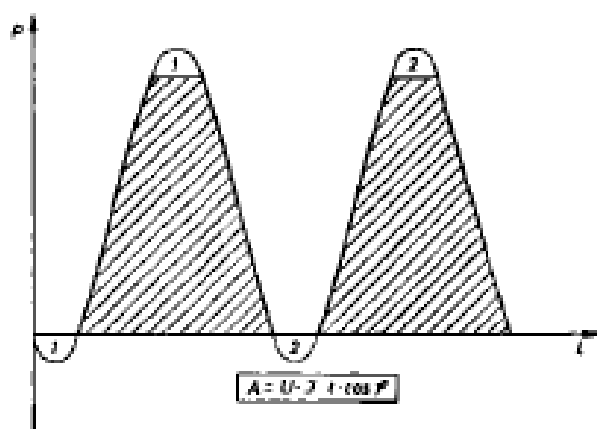


**Slika 31.** Električni rad pri induktivnom ili kapacitivnom opterećenju

Kod induktivno-omskog ili kapacitivno-omskog opterećenja snaga se izračunava prema formuli  $P = U \cdot I \cdot \cos \delta$ , pa je prema tome električni rad

$$A = U \cdot I \cdot t \cdot \cos \delta. \quad (53)$$

Takav rad se grafički prikazuje razlikom pozitivne i negativne površine koju omeđuju sinusoida i apscisna os.“<sup>5</sup>

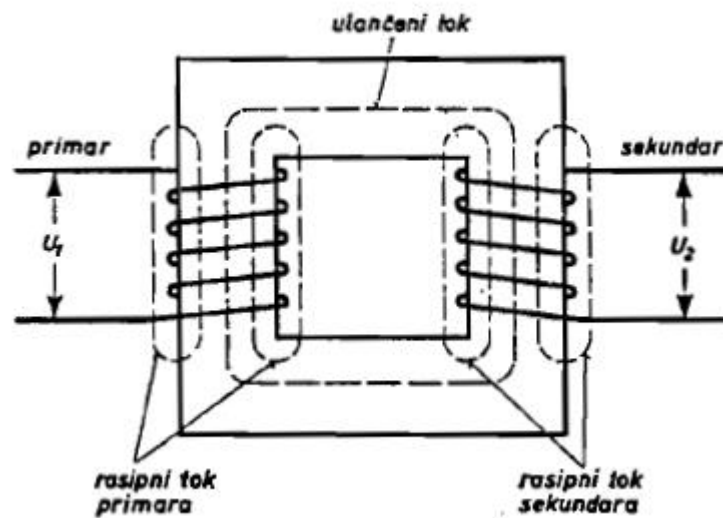


**Slika 32.** Električni rad pri induktivno-omskom ili kapacitivno-omskom opterećenju

<sup>5</sup> STANIĆ E.: Osnove elektrotehnike, XXIX izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

## 11. TRANSFORMATOR

Transformator je uređaj koji se koristi da bi se električna energija mogla prenositi pri visokom naponu, a koristiti pri niskom naponu. Sastoji se od dva električki izolirana svitka koja su namotana oko zajedničke željezne jezgre. Izmjenična struja u jednom svitku uzrokuje promjenjivi magnetski tok u jezgri, koji tada inducira izmjeničnu elektromotornu silu u drugom svitku. To znači da se električna energija prenosi iz jednog svitka u drugi putem željezne jezgre. Svitak koji prima energiju zove se primar, a svitak u koji se energija prenosi, odnosno u kojem se inducira elektromotorna sila, zove se sekundar. Svicima su zamjenjivi i bilo koji od njih može se koristiti i kao primar i kao sekundar. Pri radu transformatora u praksi se dio energije koja uđe u primar gubi zbog toplinske disipacije u svicima ili histereze i vrtložnih struja u željeznoj jezgri. Takvi gubici mogu se smanjiti izborom željeza s uskom petljom histereze te rezanjem jezgre u tanke lamele. Osim ovog gubitka događa se i da dio magnetskog toka procuri iz željezne jezgre u okolinu. Svi ti gubici zajedno mogu iznositi i do 10%.



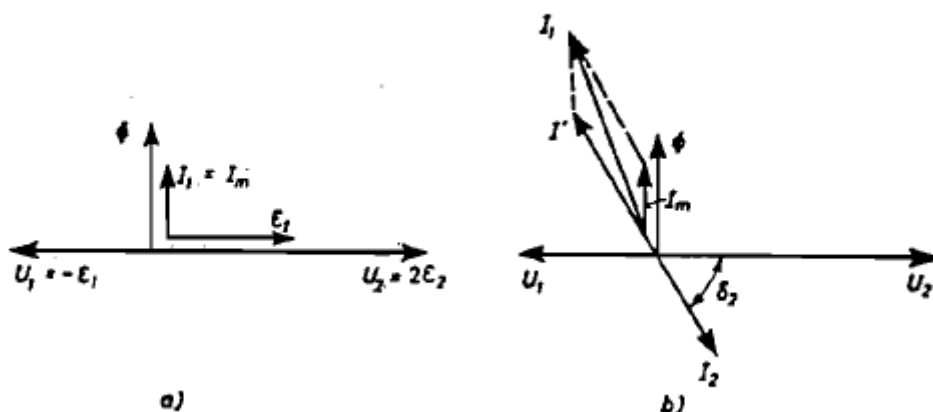
Slika 33. Princip transformatora sa željeznom jezgrom

Zbog jednostavnosti, transformator koji će poslužiti kao primjer za izračunavanje odnosa struje i napona kod prijenosa električne energije iz primara u sekundar bit će bez ikakvih gubitaka i rasipanja. Neka je u primarnom svitku struja  $I_m$  koja će se nazivati strujom magnetizacije i koja zaostaje za naponom u primaru za  $90^\circ$ . Sekundarni svitak je otvoren, a magnetski tok  $\Phi$  u jezgri je u fazi sa strujom u primaru. S obzirom na to da je tok kroz primarni i sekundarni svitak jednak i elektromotorna sila inducirana po zavoju jednaka je u oba svitka. Prema tome je omjer elektromotornih sila induciranih u primarnom i sekundarnom svitku jednak omjeru broja zavoja u svicima, odnosno

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (54)$$

U ovom opisanom idealiziranom slučaju elektromotorne sile jednake su naponima na krajevima svitaka što znači da se povoljnim izborom omjera  $\frac{N_1}{N_2}$  dani izmjenični napon  $U_1$  može transformirati na traženu vrijednost  $U_2$ .

U slijedećoj situaciji sekundarni svitak je zatvoren i tada kroz njega protječe inducirana struja. Fazni odnos struje i napona u sekundaru ovisi o prirodi potrošača koji je uključen u sekundarni krug. Potrošač u sekundarnom krugu troši određenu količinu energije koja dolazi iz primara, osim u situaciji kada je fazna razlika jakosti struje i napona  $\delta_2 = 90^\circ$ . Proces kojim se energija prenosi iz primara u sekundar najjednostavnije je objasniti na slijedeći način: kad je sekundar otvoren, samo primarna struja proizvodi magnetski tok u jezgri, ali kad je on zatvoren i struja kroz njega proizvodi tok. Sekundarna struja nastoji poništiti svoj uzrok prema Lenzovom pravilu, tj. ona nastoji smanjiti primarni tok, odnosno primarnu elektromotornu silu. Tu elektromotornu silu njen izvor drži stalnom i zbog toga taj izvor mora kroz primar protjerati jaču struju koja je potrebna da bi se tok u jezgri vratio na početnu vrijednost bez potrošača.



**Slika 34.** Vektorski dijagram jakosti struje i napona u transformatoru za slučaj  $\frac{N_2}{N_1} = 2$ : a) sekundar je otvoren  $I_2 = 0, I_1 = I_m$ ; b) U sekundarni krug je uključen potrošač s induktivnim otporom

Slika prikazuje fazne odnose struje, napona i toka u primarnom i sekundarnom svitku za slučaj  $\frac{N_2}{N_1} = 2$  za otvoreni i zatvoreni sekundar kako je objašnjeno ranije. Vektor  $I'$  predstavlja promjenu primarne struje kod ukopčavanja potrošača u sekundarni krug.  $I'$  i struja  $I_2$  kroz sekundar su u protufazi. Produkt broja zavoja i jakosti struje, odnosno

magnetomotorna sila, mora za obje navedene struje biti jednaka po iznosu, ali suprotnog smjera, što glasi

$$N_2 I_2 = N_1 I'.$$

Rezultantna primarna struja je  $I_1 = I_m + I'$ , no struja magnetizacije  $I_m$  je u praksi vrlo mala pa se može pisati i  $I' \approx I_1$ , tj.

$$N_2 I_2 = N_1 I_1,$$

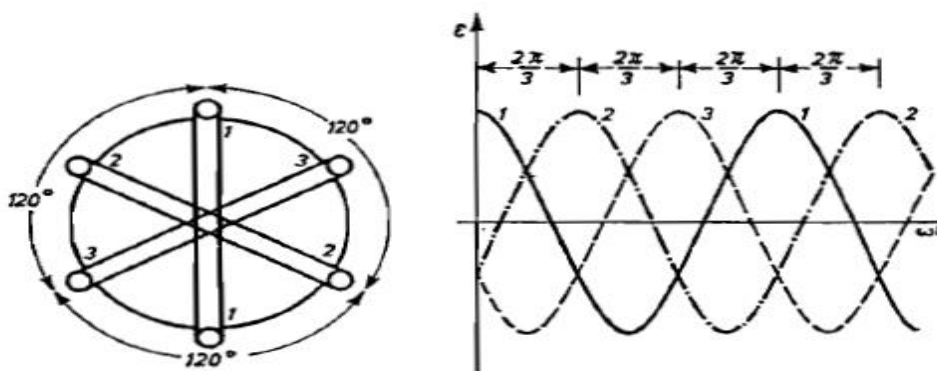
što u konačnici daje

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (55)$$

U transformatoru se, po iznosu, jakosti primarne i sekundarne struje odnose obrnuto od broja zavoja u svicima. Važno je napomenuti da taj rezultat vrijedi približno.

## 12. TROFAZNE IZMJENIČNE STRUJE

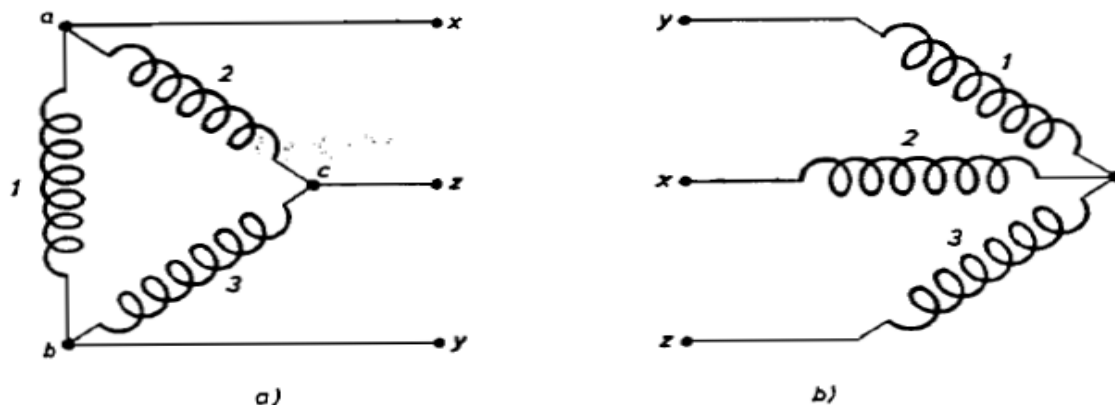
Okretanjem petlje u homogenom magnetskom polju inducira se elektromotorna sila koja u zatvorenom strujnom krugu pokreće izmjeničnu struju. Ako se u homogenom polju okreću tri petlje koje međusobno zatvaraju kutove od  $120^\circ$  tada će se u njima inducirati tri elektromotorne sile. Te elektromotorne sile mogu u tri nezavisna strujna kruga pokrenuti tri izmjenične struje koje su po frekvenciji jednake, ali su jedna prema drugoj fazno pomaknute za  $120^\circ$ . Kada su sva tri strujna kruga međusobno povezana oni čine trofazni sistem, a sve tri struje tada čine trofaznu struju. Struje inducirane u pojedinim petljama nazivaju se fazama trofazne struje, a vodovi kroz koje te struje protječu označuju se slovima  $R$ ,  $S$  i  $T$ . Sve tri inducirane elektromotorne sile nikad nemaju jednake trenutne vrijednosti zbog toga što u svakom trenutku njihove petlje sijeku magnetske silnice pod različitim kutovima. Uređaj koji daje trofaznu izmjeničnu struju prikazan je na slijedećoj slici.



**Slika 35.** a) Shema trofaznog generatora, b) Fazni odnosi triju generiranih elektromotornih sila

Na rotirajuću armaturu postavljena su tri žičana svitka tako da im ravnine simetrije zatvaraju kutove od  $120^\circ$ , odnosno  $2\pi/3$  radijana. Ukoliko armatura rotira stalnom kutnom brzinom  $\omega$ , u svakome se od svitaka inducira sinusoidalna elektromotorna sila koja ima oblik  $\varepsilon = \varepsilon_m \cdot \cos(\omega t + \delta)$ . Očito je da se faze triju elektromotornih sila razlikuju za  $\frac{2\pi}{3}$ . Ako se elektromotorna sila inducirana u svitku 1 označenom na slici a) i označena s 1 na slici b) izrazi kao  $\varepsilon_1 = \varepsilon_m \cos \omega t$ , tada elektromotorna sila u svitku 2 i 3 može biti izražena s  $\varepsilon_2 = \varepsilon_m \cos(\omega t - 2\pi/3)$ , odnosno  $\varepsilon_3 = \varepsilon_m \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3})$ . Svaki svitak može poslužiti kao nezavisni izvor izmjenične elektromotorne sile. U praksi se svitci međusobno spajaju u dva tipa spajanja koja se u elektrotehničkoj praksi najviše koriste. Vrste spojeva prikazane su na slijedećoj slici.





**Slika 36.** Trofazni generator; a) namotaji vezani u trokut, b) namotaji vezani u zvijezdu  
 Kod spajanja u trokut namotaji su vezani jedan za drugi na način da zatvaraju trokut, a tri zajedničke točke označene s  $a$ ,  $b$  i  $c$  su spojene kliznim prstenovima na generatoru. Naponi se označenim linijama  $x$ ,  $y$  i  $z$  odvođe s četkica koje dodiruju klizne prstenove, a svaki par linija  $xy$ ,  $yz$  ili  $xz$  je izvor jednofazne izmjenične struje.

$$U_{xy} = U_{ab} = \varepsilon_1 = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$U_{zx} = U_{ca} = \varepsilon_2 = \varepsilon_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$U_{yz} = U_{bc} = \varepsilon_3 = \varepsilon_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_{ac} + U_{cb} = -(U_{ca} + U_{bc}) = -\varepsilon_m \left[ \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\ &= \varepsilon_m \cos \omega t, \end{aligned}$$

što zapravo predstavlja izmjeničnu elektromotornu silu u namotaju 1. Jednostavnije rečeno, namotaj 1 i serijski spojeni namotaji broj 2 i 3 su međusobno identični, paralelno spojeni izvori elektromotorne sile. Zbog toga je napon između linija  $x$  i  $y$  u svakom trenutku jednak naponu kojeg proizvodi svaki namotaj posebno. Najjednostavniji primjer za to je napon između dvije priključnice naponske utičnice u gradskoj strujnoj mreži. Vrijednost napona u gradskoj mreži iznosi 220 V, a napon priključnica u trofaznoj utičnici je 380 V s time da naponi u parovima zaostaju jedan za drugim za  $2\pi/3$ .

### 13. ZAKLJUČAK

Na temelju napisanog rada mogu zaključiti da nikad prije u povijesti nijedna nova tehnika nije u tako kratkom vremenu udarila sličan pečat na sve aspekte našeg života kao pojava električne struje. Razvoj elektrotehnike, kasnije elektronike, može se usporediti s dostignućima kao što su pronalazak pisma ili tiskanja. Povijest elektrotehnike, odnosno elektronike, može započeti s različitih polaznih točaka. Točka na kojoj fizika prestaje, a elektrotehnika ili elektronika počinju ne može se uvijek točno definirati. Izmjenična električna struja, generatori i motori i svi patenti koji su vezani za izmjeničnu električnu energiju označuju početak druge industrijske revolucije. Elektromagnetska indukcija nije ništa manje važna u odnosu na druga otkrića vezana za električnu energiju. Smatra se izuzetno važnom zbog toga što omogućava produkciju izmjenične struje i napona u generatorima, te njenu promjenu koja ovisi o potrebama, a koja se događa u transformatorima. Upravo zahvaljujući elektromagnetskoj indukciji, danas živimo u osvjetljenim gradovima, koristimo električnu energiju gotovo u svakom koraku i život bez nje jednostavno je nezamisliv. Elektromagnetska indukcija može se smatrati osnovom funkcioniranja današnjeg svijeta, ona aktivira semafore, automobili ju koriste za pretvaranje energije kočenja u električnu energiju svojih baterija, koristi se u sigurnosnim sustavima zračnih luka, na bankomatima kad se magnetna traka provuče kroz skener i u mnogim drugim svakodnevnim situacijama, a čak je i temelj elektromagnetskih valova koje nazivamo svjetlost. Ista stvar je i s primjenom izmjenične struje čiji je značaj i prednosti isticao i Nikola Tesla. Jedna od gospodarskih prednosti izmjeničnih struja je ta da se mogu učinkovito, uz vrlo male gubitke, prenositi na velike udaljenosti. Za prijenos snage nije važan ni samo iznos napona, ni samo iznos struje, već njihov umnožak. Gubitci u prijenosnom vodiču ovise o neizbježnom otporu vodiča i kvadratu struje koja kroz njega protječe, no uz povećanje napona i odgovarajuće smanjenje struje moguće je prenositi istu snagu uz manje gubitke. Povećanje napona za izmjenične struje može se vrlo jednostavno provesti u transformatoru kao što je opisano u radu. U Republici Hrvatskoj je propisano da se električna energija koja se isporučuje kućanstvima spojenima na niskonaponsku električnu mrežu isporučuje pri frekvenciji 50 Hz i naponu između faznih vodiča i zemlje od  $230\text{ V} \pm 10\%$ .

Kako je već spomenuto, u današnje moderno doba malo koji pojedinac živi bez kontakta s električnom energijom koja je s jedne strane neophodna za život, a s druge strane smrtonosna. Svakodnevno korištenje električne energije umanjuje ljudski osjećaj za

rizikom što čovjeka dovodi u veliku opasnost. Sa stajališta zaštite na radu čovjek koji svakodnevno radi sa električnom energijom, koristi električnu opremu i slično, za poslove održavanja i popravaka na električnoj opremi mora biti kvalitetno osposobljen i upućen u sve moguće rizike. Učinak opasnosti ovisi o brojnim rizicima čija kvalifikacija i kvantitativna procjena nije nimalo jednostavna. Osnovna pravila sigurnosti za izbjegavanje rizika koji proizlaze iz korištenja električnog sustava i alata glase: električni sustavi i alati moraju biti projektirani i izvedeni za siguran rad, električni sustavi i alati trebaju se koristiti na siguran način i njihova periodična ispitivanja moraju jamčiti sigurnost električne opreme prema važećim propisima i električne sustave i alate treba popravljati na siguran način te omogućiti da su sigurni za daljnju uporabu. Opasnost od električne energije ovisi o protoku struje koji se javlja u trenutku kada radnik dođe u kontakt s dijelovima pod naponom zbog oštećene električne opreme ili kvara strujnog kruga. Svaki protok struje, koji prelazi prag percepcije, u kombinaciji sa strujnim udarom ili sekundarnom nezgodom može biti opasan, no uglavnom ne i po život. Kontakt s naponom daleko nižim od granične vrijednosti od 50 V izmjenične struje može izazvati ozljedu pa zbog toga treba smatrati opasnim svaki dodirni napon koji dovodi do prolaska struje čija jačina prelazi granicu od 10 mA. Ukoliko uvjeti u radnom okruženju nisu otežani, neopasni napon koji može proteći kroz ljudsko tijelo smije biti do 50 V, a ukoliko se radi o otežanim uvjetima rada taj napon je potrebno ograničiti na manje od 24 V izmjenične struje. Protok struje kroz ljudsko tijelo napona iznad 50 V za posljedicu može imati smrt, a takvo je djelovanje dokazano i statistikom ozljeda. Većina se nesreća dogodi pri naponu od 230 V izmjenične struje prema zemlji i 400 V izmjenične struje između dva vanjska vodiča što odgovara naponu niskonaponske instalacije i električnim trošilima široke potrošnje kao što su strojevi, uređaji i aparati. Zbog toga čovjek uvijek mora biti oprezan kako ne bi ugrozio svoj vlastiti i život ljudi kojima je okružen.

## 14. LITERATURA

- [1] CINDRO N.: Fizika 2, Elektricitet i magnetizam, 2. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1988., str. 221. - 272.
- [2] STANIĆ E.: Osnove elektrotehnike, XXIX izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2007., ISBN 978-953-0-21801-7
- [3] ELEMENT d.o.o., za nakladništvo,  
<https://element.hr> (21.07.2017.)
- [4] MALJKOVIĆ Z., Transformatori,  
<https://www.fer.unizg.hr> (05.08.2017.)
- [5] SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU, ODJEL ZA FIZIKU,  
<http://fizika.unios.hr> (13.06.2017.)
- [6] SVEUČILIŠTE U SPLITU, POMORSKI FAKULTET,  
<http://www.pfst.hr> (21.07.2017.)
- [7] HOLOGRAM,  
<http://www.holo.hr> (15.08.2017.)
- [8] HRVATSKA ENCIKLOPEDIJA,  
<http://www.enciklopedija.hr> (15.08.2017.)
- [9] ARTAS d.o.o.,  
<https://www.artas.hr> (19.08.2017.)
- [10] FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA,  
<https://www.fer.unizg.hr> (15.07.2017.)
- [11] DOMINIS,  
<http://dominis.phy.hr> (19.08.2017.)
- [12] POVIJEST.hr,  
<http://povijest.hr> (18.08.2017.)
- [13] INSTITUT RUĐER BOŠKOVIĆ,  
<http://www.irb.hr> (05.08.2017)

## 15. POPIS PRILOGA

### 15.1. Popis slika

Slika 1. Gibanje vodiča u homogenom magnetskom polju .....	5
Slika 2. Inducirana struja u vodiču koji se giba u magnetskom polju .....	6
Slika 3. Pravilo desne ruke za smjer inducirane struje .....	7
Slika 4. Promjena toka kod gibanja vodiča kroz magnetsko polje .....	9
Slika 5. Promjena struje u petlji 1 uzrokuje promjenu toka magnetske indukcije u petlji 2, u kojoj se inducira elektromotorna sila.....	10
Slika 6. Elektromagnet kojim teče promjenjiva struja odbija prsten izrađen od vodljivog materijala .....	11
Slika 7. Princip rada rotacijskog generatora elektromotorne sile .....	13
Slika 8. Promjene toka kroz petlju kojom teče promjenjiva struja izazivaju samoindukciju u petlji.....	15
Slika 9. Struja u krugu sa zavojnicom .....	17
Slika 10. Porast jakosti struje u krugu s induktivnosti i omskim otporom.....	18
Slika 11. Mehanizam pohranjivanja elektromagnetske energije u zavojnici .....	19
Slika 12. Ekvivalentna induktivnost dviju serijski spojenih zavojnica: a) magnetski tokovi u istom smjeru, b) u suprotnom smjeru .....	21
Slika 13. Perioda izmjenične struje .....	23
Slika 14. Shema generatora izmjeničnog napona.....	24
Slika 15. Strujni krug s izmjeničnom elektromotornom silom u kojem se nalaze otpornik i zavojnica.....	25
Slika 16. Dijagram vektorskog slijeda oscilacija jakosti struje i napona u krugu s otporom $R$ i zavojnicom induktivnosti $L$ .....	27
Slika 17. Strujni krug s izmjeničnom elektromotornom silom u kojem se nalaze otpornik i kondenzator .....	28
Slika 18. Dijagram vremenskog slijeda oscilacija jakosti struje i napona u krugu s otporom $R$ i kapacitetom $C$ .....	30
Slika 19. Strujni krug s izmjeničnom elektromotornom silom u kojem se nalaze otpornik, zavojnica i kondenzator .....	31
Slika 20. Serijski i paralelno spojeni elementi u rezonantnom krugu .....	33
Slika 21. Razlika potencijala između dvije točke u krugu kojima teče izmjenična struja ..	35
Slika 22. Strujna mreža s izvorom izmjeničnog napona .....	37

Slika 23. Prikaz izmjenične struje pomoću metode rotirajućih vektora .....	38
Slika 24. Grafički prikaz jakosti struje i napona izmjenične struje metodom rotirajućih vektora .....	39
Slika 25. Prikaz jakosti izmjenične struje kompleksnim brojevima.....	40
Slika 26. a) Paralelno spojeni elementi u krugu izmjenične struje; b) Odgovarajući vektorski dijagram .....	42
Slika 27. a) Admitancija kruga s paralelno spojenim elementima; b) Krug s paralelno spojenim elementima $R, L$ i $C$ .....	43
Slika 28. Vremenska promjena snage izmjenične struje u ovisnosti o vremenskoj promjeni jakosti struje i napona.....	45
Slika 29. Grafičko prikazivanje električnog rada površinom pravokutnika .....	47
Slika 30. Električni rad pri omskom opterećenju .....	48
Slika 31. Električni rad pri induktivnom ili kapacitivnom opterećenju .....	48
Slika 32. Električni rad pri induktivno-omskom ili kapacitivno-omskom opterećenju .....	49
Slika 33. Princip transformatora sa željeznom jezgrom .....	50
Slika 34. Vektorski dijagram jakosti struje i napona u transformatoru za slučaj $N_2N_1 = 2$ : a) sekundar je otvoren $I_2 = 0, I_1 = I_m$ ; b) U sekundarni krug je uključen potrošač s induktivnim otporom .....	51
Slika 35. a) Shema trofaznog generatora, b) Fazni odnosi triju generiranih elektromotornih sila.....	53
Slika 36. Trofazni generator; a) namotaji vezani u trokut, b) namotaji vezani u zvijezdu..	54

## 15.2. Popis tablica

Tablica br. 1. Admitancija i impedancija elemenata strujnog kruga .....	42
-------------------------------------------------------------------------	----